Metodi e Modelli per l'Ottimizzazione Combinatoria

Ripasso sulla Modellazione in Programmazione Lineare

Luigi De Giovanni

1 Modelli di programmazione lineare

I modelli di programmazione lineare sono una particolare classe di *modelli di programmazione matematica*. Un modello di programmazione matematica è utilizzato per descrivere le caratteristiche della soluzione ottima di un problema di ottimizzazione attraverso relazioni matematiche. Oltre a costituire una descrizione formale del problema, il modello fornisce la base per l'applicazione di algoritmi standard di ottimizzazione (disponibili in forma di modellatori algebrici e software di ottimizzazione) in grado di determinare una soluzione ottima. Di seguito riassumiamo gli elementi di un modello di programmazione matematica, con riferimento, a titolo di esempio, al seguente semplice problema di ottimizzazione.

Esempio 1 *Una ditta di profumi realizza due nuove fragranze a partire da tre essenze: rosa, mughetto e viola. Per realizzare un decalitro di fragranza* uno *sono richiesti 1,5 litri di rosa, 1 litro di mughetto e 0,3 litri di viola. Per realizzare un decalitro di fragranza* due *sono richiesti 1 litro di rosa, 1 litro di mughetto e 0,5 litri di viola. La disponibilità in magazzino per le tre essenze è di 27, 21 e 9 litri per rosa, mughetto e viola rispettivamente. Sapendo che l'azienda realizza un profitto di 130 e 100 euro per ogni decalitro venduto di fragranza* uno e due *rispettivamente, determinare le quantità ottimali delle due fragranze da produrre.*

Un modello di programmazione matematica è composto dai seguenti elementi.

- **Insiemi**: raggruppano gli elementi del sistema. Nell'esempio possiamo individuare due insiemi, quello delle essenze ($I = \{rosa, mughetto, viola\}$) e quello delle fragranze ($J = \{uno, due\}$).
- **Parametri**: sono i dati del problema e rappresentano delle quantità fissate che dipendono dai diversi elementi del sistema. Nell'esempio, i parametri sono i profitti, definiti per ogni fragranza (130 euro per ogni decalitro di fragranza *uno* e 100 euro per decalitro di fragranza *due*), le disponibilità di magazzino, definite per ogni essenza (27, 21 e 9 litri per le essenze *rosa*, *mughetto* e *viola* rispettivamente), e

le richieste di essenza per ogni unità di fragranza, definite per ogni coppia essenza-fragranza (ad esempio, 1 litro di mughetto per ogni decalitro di fragranza *uno*, 0,5 litri di viola per ogni decalitro di fragranza *due* etc.).

- **Variabili decisionali o di controllo**: sono le grandezze del sistema di cui non conosciamo il valore (assimilabili a delle incognite) e sulle quali possiamo agire per determinare diverse soluzioni alternative del problema. Nell'esempio, le variabili decisionali sono la quantità, in decalitri, delle due fragranze da produrre (che chiamiamo x_{uno} e x_{due}).

- **Vincoli**: sono delle relazioni matematiche che descrivono le condizioni di ammissibilità delle soluzioni. Servono quindi per discriminare le combinazioni di valori delle variabili decisionali che rappresentano soluzioni accettabili al problema, da quelle che non lo sono. Ad esempio, tutte le soluzioni ammissibili non possono utilizzare più di 27 litri di essenza *rosa*, relazione esprimibile come $1,5x_{uno} + 1x_{due} \leq 27$.

- **Funzione obiettivo**: è la quantità da massimizzare o minimizzare, espressa come funzione delle variabili decisionali. Nell'esempio si vuole massimizzare il profitto in euro, esprimibile come $130x_{uno} + 100x_{due}$.

La *soluzione* di un problema di ottimizzazione formulato con un modello di programmazione matematica consiste nella determinazione dei valori delle variabili che soddisfano tutti i vincoli e massimizzano o minimizzano il valore della funzione obiettivo.

Un *modello di Programmazione Lineare* è un modello di programmazione matematica in cui

- la funzione obiettivo è un'espressione *lineare* delle variabili decisionali;
- i vincoli sono determinati da un sistema di equazioni e/o disequazioni *lineari*.

In base alla natura o *dominio* delle variabili decisionali, si parla di

- modelli di Programmazione Lineare (in senso stretto, PL) se tutte le variabili possono assumere valori reali;
- modelli di Programmazione Lineare Intera (PLI) se tutte le variabili possono assumere valori interi;
- modelli di Programmazione Lineare Intera Mista (PLIM) se alcune variabili possono assumere valori reali e altre valori interi.

Il problema descritto nell'esempio può quindi essere formulato con il seguente modello di Programmazione Lineare (in senso stretto):

$$
\begin{array}{rrcrcrl}
\max & 130x_{uno} & + & 100x_{due} & & & \text{funzione obiettivo} \\
s.t. & 1,5x_{uno} & + & x_{due} & \leq & 27 & \text{vincolo disponibilità rosa} \\
 & x_1 & + & x_{due} & \leq & 21 & \text{vincolo disponibilità mughetto} \\
 & 0,3x_{uno} & + & 0,5x_{due} & \leq & 9 & \text{vincolo disponibilità viola} \\
 & x_{uno} & , & x_{due} & \geq & 0 & \text{domini delle variabili}
\end{array}
$$

E' conveniente esprimere i modelli in termini generali, sfruttando le opportune notazioni algebriche, in modo che lo stesso modello rappresenti una descrizione di più casi (o *istanze*) dello stesso *problema*, inteso come classe di problemi definiti allo stesso modo. Allo scopo, una volta definiti gli insiemi e dei relativi indici, si può generalizzare la definizione dei parametri e delle variabili e, quindi, della funzione obiettivo e dei vincoli. Nell'esempio, potremmo definire il problema dell'ottimizzazione della produzione dove si vuole determinare la quantità di prodotti per massimizzare i profitti, sotto vincoli legati alla disponibilità di risorse. Indicando con

- I: insieme delle risorse (nell'esempio, essenze);
- J: insime dei prodotti (nell'esempio, fragranze);

- D_i: disponibilità di risorsa $i \in I$;
- P_j: profitto unitario per il prodotto $j \in J$;
- Q_{ij}: quantità di risorsa $i \in I$ necessaria per ogni unità di prodotto $j \in J$;

- x_j: quantità di prodotto $j \in J$ (variabili decisionali)

il modello per il problema (generale) si può formulare come segue:

$$
\begin{array}{rlcll}
\max & \sum_{j \in J} P_j x_j & & & \\
s.t. & \sum_{j \in J} Q_{ij} x_j & \leq & D_i & \forall \quad i \in I \\
 & x_j \in \mathbb{R}_+ & & & \forall \quad j \in J
\end{array}
$$

L'istanza descritta nell'esempio è ottenuta ponendo $I = \{rosa, mughetto, viola\}$, $J = \{uno, due\}$ e fissando gli opportuni valori dei parametri D_i, P_j e Q_{ij}. Fissando insiemi e/o parametri ad altri valori si ottengono diverse istanze dello stesso problema per le quali il modello continua a essere valido.

2 Esercizi

Si trovi una formulazione di programmazione lineare per i seguenti problemi di ottimizzazione. Per ogni punto, si sviluppi una formulazione generale, in grado di modellare diverse istanze dello stesso problema.

1. Una cooperativa edile deve organizzare il riposizionamento delle impalcature da tre cantieri in fase di chiusura (cantieri A,B,C) a tre nuovi cantieri (cantieri 1, 2 e 3). Le impalcature sono costituite da tubi in ferro appositamente attrezzati: nei tre cantieri A, B e C si trovano 7000, 6000 e 4000 tondini rispettivamente, mentre i nuovi cantieri 1, 2 e 3 richiedono 8000, 5000 e 4000 tondini rispettivamente. I costi per lo spostamento di un singolo tondino da un cantiere in chiusura a un cantiere nuovo sono sintetizzati nella seguente tabella:

Costi (euro-cent)	**1**	**2**	**3**
A	9	6	5
B	7	4	9
C	4	6	3

   Per rendere il riposizionamento il più rapido possibile, viene dedicato un camion per ogni singolo spostamento di tondini da un cantiere ad un altro. La capacità di un camion è di 10000 tondini ed è quindi sufficiente per spostare tutti i tondini richiesti. Si formuli un modello di programmazione lineare che determini il piano di riposizionamento a costo minimo, considerando che:

   - ogni camion effettivamente utilizzato impone un costo fisso di 50 euro;
   - si hanno a disposizione quattro camion;
   - nel nuovo cantiere 2 non possono arrivare tondini sia da A che da B;
   - è possibile noleggiare un quinto camion al costo fisso 65 euro (15 euro in più rispetto al costo degli altri quattro camion).

2. Un'azienda di telefonia mobile deve installare delle antenne per la copertura di sei zone sul territorio. Sono stati individuati cinque siti possibili per l'installazione delle antenne. In seguito a delle simulazioni, è stato possibile determinare il livello del segnale captato nelle diverse zone e proveniente da un'antenna installata nei vari siti. Tali livelli sono riportati nella seguente tabella:

	zona 1	**zona 2**	**zona 3**	**zona 4**	**zona 5**	**zona 6**
sito A	10	20	16	25	0	10
sito B	0	12	18	23	11	6
sito C	21	8	5	6	23	19
sito D	16	15	15	8	14	18
sito E	21	13	13	17	18	22

I ricevitori sono sensibili ai segnali di livello almeno 18. Inoltre, non è possibile avere più di un segnale sopra la soglia in una stessa zona, altrimenti il segnale risulterebbe disturbato e il ricevitore non riuscirebbe a sintonizzarsi. Infine, l'installazione di un'antenna nel sito E è subordinata all'installazione di un'antenna nel sito D, che faccia da ponte. L'azienda di telefonia vuole determinare dove installare le antenne per coprire il maggior numero di zone.

3. La costruzione di una barca da diporto comporta il completamento delle operazioni indicate nella tabella che segue, che ne riporta anche la durata in giorni.

Operazione	**Durata**	**Precedenze**
A	2	nessuna
B	4	A
C	2	A
D	5	A
E	3	B,C
F	3	E
G	2	E
H	7	D,E,G
I	4	F,G

Si consideri che alcune operazioni sono in alternativa. In particolare, bisogna eseguire solo una tra le operazioni B e C, e solo una tra le operazioni F e G. Inoltre, se si eseguono sia C che G, la durata dell'operazione I si allunga di 2 giorni. La tabella indica anche, per ogni operazione, l'insieme delle precedenze (operazioni che devono essere completate prima di poter eseguire l'operazione stessa). Ad esempio, l'operazione H può iniziare solo dopo la fine delle operazioni E, D e G (se G viene eseguita). Scrivere un modello di programmazione lineare per decidere quali operazioni in alternativa eseguire, con l'obiettivo di minimizzare la durata complessiva delle operazioni di costruzione.

4. Andrea, Bruno, Carlo e Dario condividono un appartamento. Ogni sabato ricevono quattro giornali: “La Repubblica”, “Il Messaggero”, “La Stampa” e “La Gazzetta delle Sport”, che leggono prima di uscire di casa. Essendo dei tipi molto pignoli, ciascuno di loro pretende di leggere tutti i giornali secondo un proprio particolare ordine. Andrea desidera iniziare con “La Repubblica” per un’ora, poi prosegue con “La Stampa” per 30 minuti, dà solo un’occhiata a “Il Messaggero” per due minuti e termina dedicando cinque minuti a “La Gazzetta dello Sport”. Bruno preferisce iniziare con “La Stampa” che legge per 75 minuti; successivamente dà appena uno sguardo a “Il Messaggero” per tre minuti, prosegue con “La Repubblica” per 25 minuti e infine con “La Gazzetta dello Sport” per 10 minuti. Carlo comincia con “Il Messaggero” per cinque minuti, poi legge “La Stampa” per 15 minuti, “La Repubblica” per 10 minuti e termina con “La Gazzetta dello Sport” per 30 minuti. Infine, Dario inizia con “La Gazzetta dello Sport” per 90 minuti per poi dedicare solo un minuto a testa rispettivamente a “La Repubblica”, “La Stampa” e “Il Messaggero” nell’ordine indicato. Ciascuno dei quattro coninquilini è talmente insistente nelle proprie richieste che, pur di seguire l’ordine di lettura che preferisce, è disposto a non leggere nulla fino a che non diventa disponibile il giornale che desidera. Inoltre, nessuno di loro è disposto a interrompere la lettura di un giornale prima del tempo per poi riprenderla successivamente. Sapendo che Andrea si alza dal letto alle 8h30, Bruno e Carlo alle 8h45 e Dario alle 9h30, e sapendo che nel periodo di lettura dei giornali ciascuno di loro riesce anche a lavarsi, vestirsi e fare colazione, si vuole calcolare l’ordine secondo il quale essi devono leggere i giornali in modo da partire per una gita in campagna il più presto possibile.

5. La federazione dei farmacisti vuole organizzare i turni festivi delle farmacie sul territorio regionale. E‘ stabilito a priori il numero dei turni, che devono essere bilanciati in termini di numero di farmacie, considerando che ciascuna farmacia deve appartenere, per equità, a un solo turno. Ad esempio, se il numero complessivo di farmacie è 12 e si vogliono organizzare tre turni, ciascun turno sarà formato da quattro farmacie. Sia le farmacie che gli utenti si considerano distribuiti sul territorio e concentrati in centroidi (corrispondenti in genere con comuni o quartieri). Per ogni centroide sono noti il numero di utenti e il numero di farmacie. E‘ inoltre nota la distanza tra ogni coppia ordinata di centroidi. In prima istanza, si trascurano problemi relativi alla congestione e si assume che gli utenti, in ciascun turno, si servano dalla farmacia aperta più vicina. Si vuole determinare la distribuzione dei turni festivi che minimizza la distanza complessiva percorsa dagli utenti per il servizio festivo.

6. *(Un problema di distribuzione di energia)* Una società di produzione di energia elettrica dispone di diverse centrali di produzione e distribuzione, collegate tra loro con cavi reofori. Ogni centrale i può:

   - produrre p_i kW di energia elettrica ($p_i = 0$ se la centrale non produce energia);
   - distribuire energia elettrica su una sottorete di utenti la cui domanda complessiva è di d_i kW ($d_i = 0$ se la centrale non serve utenti);
   - smistare l'energia da e verso altre centrali.

   I cavi che collegano una centrale i ad una centrale j hanno una capacità massima di u_{ij} kW e costano c_{ij} euro per ogni kW trasportato. La società vuole determinare il piano di distribuzione dell'energia elettrica di costo minimo, sotto l'ipotesi che l'energia complessivamente prodotta sia pari alla domanda totale delle sottoreti di utenti.

7. *(Un problema di distribuzione di vari tipi di energia)* Una società di produzione di energia elettrica dispone di diverse centrali di produzione e distribuzione, collegate tra loro con cavi reofori. Ogni centrale tratta diversi tipi di energia (continua/alternata, diverso voltaggio etc.). In particolare, ogni centrale i può:

   - produrre p_i^k kW di energia elettrica del tipo k ($p_i^k = 0$ se la centrale non produce energia del tipo k);
   - distribuire energia elettrica del tipo k su una sottorete di utenti la cui domanda complessiva è di d_i^k kW ($d_i^k = 0$ se la centrale non serve utenti che richiedono energia di tipo k);
   - smistare l'energia dei diversi tipi da e verso altre centrali.

   Si noti che ogni centrale può produrre e/o distribuire più tipi di energia. I cavi che collegano una centrale i ad una centrale j hanno una capacità massima di u_{ij} kW, indipendentemente dal tipo di energia trasportata. Il costo di trasporto dipende sia dalla coppia di centrali (i, j) collegate, sia dal tipo di energia k trasportata, e ammonta a c_{ij}^k euro per ogni kW trasportato. La società vuole determinare il piano di distribuzione dell'energia elettrica di costo minimo, sotto l'ipotesi che l'energia complessivamente prodotta per ogni tipo sia pari alla domanda totale delle sottoreti di utenti per lo stesso tipo.

8. Una rete di telecomunicazione è formata da un insieme di router e da tratte di collegamento. Ogni router genera del traffico verso ciascun altro router e, per ogni coppia (ordinata) di router, è stata stimata la domanda di traffico, in termini di banda richiesta. Il traffico generato nel router i e diretto al router j è instradato sulla rete in tecnologia *multi-hop* (il traffico può passare da nodi intermedi) e *splittable flow* (il traffico può essere frazionato su più percorsi). Le tratte collegano coppie di router e permettono l'installazione dei cavi necessari per l'instradamento dei flussi. Per ogni tratta, è definita la capacità, in termini di flusso nelle due direzioni che

può essere instradato sulla tratta stessa, e un costo unitario per l'instradamento di una unità di flusso. Si vuole dimensionare ogni tratta, in modo permettere l'instradamento di tutte le domande di traffico al costo minimo.

2.1 Soluzione esercizio 1

Diamo di seguito una possibile formulazione generale. Introduciamo i seguenti **insiemi** delle entità coinvolte nel problema:

- I: insieme dei cantieri di *origine*;
- J: insieme dei cantieri di *destinazione*;

I parametri (costanti) sono:

- C_{ij}: costo unitario (per tondino) di trasporto da $i \in I$ a $j \in J$;
- D_i: disponibilità di tondini nell'origine $i \in I$;
- R_j: richiesta di tondini alla destinazione $j \in J$;
- F: costo fisso per camion proprio;
- N: numero di camion disponibili;
- L: costo fisso per il noleggio di un camion;
- K: capacità di un camion.

Le **variabili** decisionali:

- x_{ij}: numero di tondini trasferiti da $i \in I$ a $j \in J$;
- y_{ij}: variabile binaria che vale 1 se viene usato un camion da $i \in I$ a $j \in J$, 0 alrtimenti.
- z: variabile binaria che vale 1 se viene utilizzato il camion a noleggio, 0 altrimenti.

Il modello è il seguente:

$$
\begin{array}{llcll}
\min & \displaystyle\sum_{i \in I, j \in J} C_{ij} x_{ij} + F \sum_{i \in I, j \in J} y_{ij} + (L - F) z & & & \\
\text{s.t.} & \displaystyle\sum_{i \in I} x_{ij} & \geq & R_j & \forall \ j \in J \\
 & \displaystyle\sum_{j \in J} x_{ij} & \leq & D_i & \forall \ i \in I \\
 & x_{ij} & \leq & K y_{ij} & \forall \ i \in I, j \in J \\
 & \displaystyle\sum_{i \in I, j \in J} y_{ij} & \leq & N + z & \\
 & x_{ij} & \in & \mathbb{Z}_+ & \forall \ i \in I, j \in J \\
 & y_{ij} & \in & \{0, 1\} & \forall \ i \in I, j \in J \\
 & z & \in & \{0, 1\} &
\end{array}
$$

L'istanza descritta nel testo si ottiene ponendo $I = \{1, 2, 3\}$, $J = \{A, B, C\}$ e gli opportuni valori per i parametri (ad esempio, $N = 4$).

La struttura descritta corrisponde ad un modello per *problemi di trasporto* e fornisce la base per la formulazione di problemi in diversi ambiti. Ad esempio, se il trasporto fosse riferito a sabbia, invece che tondini basterebbe cambiare il dominio delle varibili x da $\mathbb{Z}_+$ a $\mathbb{R}_+$. Il modello (con l'opportuno dominio per le variabili x) potrebbe essere riferito al trasporto di frigoriferi tra centri di produzione e magazzini di vendita, o di energia elettrica tra centrali e utenti etc.

Lo stesso modello potrebbe essere adattato a situazioni leggermente diverse. Ad esempio, se le capacità e/o le disponibilià/richieste non fossero tali da garantire che un solo camion è in grado di trasportare tutti i tondini necessari, potrebbe porsi il problema di *quanti* camion utilizzare tra un'origine e una destinazione. In questo caso sarebbe necessario:

- introdurre delle nuove variabili w: $w_{ij} \in \mathbb{Z}_+ \; \forall \, i \in I, j \in J$;
- introdurre un altro insieme di vincoli (che contano il numero di camion)

$$x_{ij} \leq K w_{ij} \; \forall \, i \in I, j \in J;$$

- sostituire w a y in funzione obiettivo.

Ancora, supponiamo che il problema preveda anche degli ulteriori costi fissi per l'attrezzaggio della zona di carico nei cantieri origine: se ci sono dei tondini da trasportare da $i \in I$ verso un qualsiasi altro cantiere in J, allora si paga un costo A. Il modello dovrebbe essere completato come segue:

- introdurre delle ulteriori variabili binarie v_i che valgono 1 se è necessario attrezzare il cantiere $i \in I$, 0 altrimenti;
- inserire in funzione obiettivo il termine

$$\sum_{i \in I} A \, v_i;$$

- "attivare" le varibili binarie v_i con i vincoli

$$\sum_{j \in J} x_{ij} \leq M_i v_i \; \forall \, i \in I$$

  dove M è una costante sufficientemente grande, ad esempio $M_i = D_i$. Si noti che, con questa definizione dei parametri *big-M*, questi vincoli possono sostituire i vincoli sulla disponibilità delle origini.

Da questo piccolo esempio si vede come il processo di modellazione di uno specifico problema possa partire da un modello base (proposto dalla letteratura) per un problema simile in termini di struttra, più che di ambito applicativo. Quindi si può procedere con i necessari aggiustamenti per soddisfare le specifiche del problema in questione.

2.2 Soluzione esercizio 4

Il problema è analogo a un problema di scheduling della produzione in cui alcuni *job* (persone) devono essere lavorati su diverse macchine (giornali), siano definiti dei tempi di lavorazione (tempi di lettura) e un preciso ordine in cui le operazioni si devono succedere sulle macchine, e si vogliano terminare tutte le lavorazioni al più presto.

Si introducono i seguenti insiemi:

- I: insieme delle persone;
- K: insieme dei giornali;

i seguenti parametri:

- D_{ik}: tempo in minuti per cui la persona $i \in I$ legge il giornale $k \in K$;
- R_i: ora di sveglie della persona $i \in I$, in minuti dopo le 8h30 (release time);
- M: costante sufficientemente elevata, in modo che sia sicuramente più elevata del tempo ottimale di partenza per la gita, ad esempio $M = 60 + \sum_{i \in I, k \in K} D_{ik}$;
- $\sigma[i, l]$: giornale letto dalla persona $i \in I$ in posizione $l \in \{1, 2...|K|\}$. Il parametro σ definisce la sequenza di lettura imposta da ciascuna persona i. Nota: $\sigma[i, l] \in K$ e quindi può essere usato come indice per parametri e variabili definiti su K.

e le seguenti variabili:

- h_{ik}: ora (in minuti dopo le 8h30) in cui la persona $i \in I$ *inizia* a leggere il giornale $k \in K$;
- y: ora (in minuti dopo le 8h30) di partenza per la gita;
- x_{ijk}: variabile binaria pari a 1 se la persona $i \in I$ legge il giornale $k \in K$ prima della persona $j \in I$, 0 altrimenti;

Un possibile formulazione è:

$$
\begin{array}{llll}
\min & y & & (1) \\
\text{s.t.} & y \geq h_{i\,\sigma[i,|K|]} + D_{i\,\sigma[i,|K|]} & \forall\, i \in I & (2) \\
& h_{i\,\sigma[i,l]} \geq h_{i\,\sigma[i,l-1]} + D_{i\,\sigma[i,l-1]} & \forall\, i \in I, l = 2...|K| & (3) \\
& h_{i\,\sigma[i,1]} \geq R_i & \forall\, i \in I & (4) \\
& h_{ik} \geq h_{jk} + D_{jk} - M x_{ijk} & \forall\, k \in K, i \in I, j \in I : i \neq j & (5) \\
& h_{jk} \geq h_{ik} + D_{ik} - M(1 - x_{ijk}) & \forall\, k \in K, i \in I, j \in I : i \neq j & (6) \\
& y \in \mathbb{R}_+ & & (7) \\
& h_{ik} \in \mathbb{R}_+ & \forall\, k \in K, i \in I & (8) \\
& x_{ijk} \in \{0, 1\} & \forall\, k \in K, i \in I, j \in I : i \neq j & (9)
\end{array}
$$

La funzione obiettivo minimizza l'ora di partenza. Il vincolo (2), ripetuto per ogni persona, assicura che tutti terminino la lettura prima della partenza. Il vincolo (3) fa rispettare la sequenza di lettura di ciascuno, senza sovrapposizioni (ciascuno deve finire di leggere il giornale precedente, prima di cominciare a leggere il successivo). Il vincolo (4) impone di non poter cominciare a leggere il primo giornale prima della sveglia. I vincoli (5) e (6) sono i vincoli disgiuntivi, che garantiscono che, per ogni giornale e per ogni coppia di persone, una delle due termini di leggere il giornale stesso prima che l'altra inizi.

2.3 Soluzione esercizio 2

Una possibile formulazione è la seguente:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{j \in J} z_j & & \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i \in I : \sigma_{ij} \geq T} x_i \geq z_j & \forall\, j \in J & \\
& \sum_{i \in I : \sigma_{ij} \geq T} x_i \leq N + M_j (1 - z_j) & \forall\, j \in J & \\
& x_i \in \{0, 1\} & \forall\, i \in I & \quad (10) \\
& z_j \in \{0, 1\} & \forall\, j \in J & \quad (11)
\end{aligned}
$$

dove

- I: insieme dei siti per le possibili localizzazioni;
- J: insieme delle zone;
- σ_{ij}: parametro che indica il livello del segnale dell'antenna nel sito $j \in J$ nella zona $i \in I$;
- T: parametro che indica la soglia di sensibilità dei ricevitori;
- N: parametro che indica il numero massimo di segnali attivi (sopra la soglia) che un ricevitore riesce a ricevere riuscendo comunque a sintonizzarsi (nell'istanza descritta nel teso del problema $N = 1$);
- x_i: variabile binaria pari a 1 se si installa un'antenna nel sito $i \in I$, 0 altrimenti;
- z_j: variabile binaria pari a 1 se si decide di coprire la zona $j \in J$, 0 altrimenti;
- M_j: parametro sufficientemente alto, ad esempio, fissata la zona $j \in J$, $M_j = card(\{i \in I : \sigma_{ij} \geq T\})$.

2.4 Soluzione esercizio 3 (suggerimenti)

Un modello per l'istanza proposta è il seguente (se ne lascia al lettore la generalizzazione):

$$
\begin{array}{rll}
\min & z & \\
s.t. & z \geq t_i & \forall i \in A...I \\
& t_A \geq d_A & \\
& t_B \geq t_A + d_B - M(1 - y_B) & \\
& t_C \geq t_A + d_C - M(1 - y_C) & \\
& t_D \geq t_A + d_D & \\
& t_E \geq t_B + d_E & \\
& t_E \geq t_C + d_E & \\
& t_F \geq t_E + d_F - M(1 - y_F) & \\
& t_G \geq t_A + d_G - M(1 - y_G) & \\
& t_H \geq t_D + d_H & \\
& t_H \geq t_E + d_H & \\
& t_H \geq t_G + d_H & \\
& t_I \geq t_F + d_I + 2y_{CG} & \\
& t_I \geq t_G + d_I + 2y_{CG} & \\
& y_B + y_C = 1 & \\
& y_F + y_G = 1 & \\
& y_C + y_G <= 1 + y_{CG} & \\
& z, t_i \geq 0 & \forall i \in \{A...I\} \\
& y. \in \{0, 1\} &
\end{array}
$$

dove

- t_i variabile legata al tempo di completamento al più presto dell'operazione $i \in \{A, B, C, D, E, F, G, H, I\}$;
- y_i variabile binaria che vale 1 se si esegue l'operazione $i \in \{B, C, F, G\}$, 0 altrimenti;
- y_{CG} variabile binaria che vale 1 se si eseguono sia l'operazione C sia l'operazione G, 0 altrimenti;
- z variabile indicante il tempo di fine dell'ultima operazione.
- d_i parametro indicante la durata da tabella dell'operazione i;
- M costante sufficientemente grande.

2.5 Soluzione esercizio 5 (suggerimenti)

Ci sono almeno due modelli alternativi, la cui formulazione presenta diversi punti di riflessione e costituisce un buon esercizio per il lettore.

La prima formulazione utilizza variabili del tipo:

y_{ik} binaria, pari a 1 se la farmacia i viene inclusa nel turno k, 0 altrimenti;

x_{ijk} binaria, pari a 1 se il centroide i si serve dalla farmacia j nel turno k.

La seconda formulazione utilizza un numero esponenziale di variabili binarie del tipo x_J pari a 1 se il sottinsieme $J \subset F$ (F sia l'insieme di tutte le farmacie) è scelto per costituire un possibile turno, 0 altrimenti. Si tratta quindi di scegliere, tramite le variabili x, dei sottinsiemi opportuni che partizionino l'insieme F, abbiano cardinalità bilanciata e minimizzino le distanze percorse dagli utenti, turno per turno.

2.6 Soluzione esercizio 6

Per la modellazione matematica del problema consideriamo un grafo orientato costruito come segue. Sia $G = (N, A)$ un grafo i cui nodi corrispondono alle centrali e i cui archi corrispondono ai collegamenti tra le centrali. Per ogni nodo $v \in N$ definiamo il parametro $b_v = d_v - p_v$ che rappresenta la differenza tra la domanda che la centrale deve soddisfare e l'offerta di energia che è in grado di generare. Si noti che:

- $b_v > 0$ se la centrale deve soddisfare una domanda superiore alla capacità produttiva (la centrale deve far arrivare energia da altre centrali);
- $b_v < 0$ se nella centrale c'è un eccesso di offerta (la produzione in eccesso deve essere convogliata verso altre centrali);
- $b_v = 0$ se la domanda e l'offerta di energia si equivalgono o (come caso particolare) se la centrale svolge semplici funzioni di smistamento ($p_v = d_v = 0$).

In generale possiamo dire che b_v è la *richiesta* del nodo $v \in N$ (una richiesta negativa rappresenta un'offerta messa a disposizione della rete) e distinguere:

- nodi domanda (richiesta $b_i > 0$);
- nodi offerta (richiesta $b_i < 0$);
- nodi di transito (richiesta $b_i = 0$).

Le variabili decisionali sono definite sugli archi del grafo e sono relative alla quantità x_{ij} da far fluire sull'arco $(i, j) \in A$. Il modello è il seguente:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} \\
s.t. \quad \sum_{(i,v)\in A} x_{iv} - \sum_{(v,j)\in A} x_{vj} &= b_v \qquad \forall v \in N \\
x_{ij} &\leq u_{ij} \qquad \forall (i,j) \in A \\
x_{ij} &\in \mathbb{R}_+
\end{aligned}
$$

La funzione obiettivo minimizza il costo complessivo di distribuzione mentre i vincoli definiscono le x_{ij} come *flusso ammissibile* sulla rete:

- il primo insieme di vincoli, uno per ogni nodo, è detto *vincolo di bilanciamento dei nodi* e assicura che la differenza tra tutto il flusso (di energia elettrica) entrante in un nodo v (archi (i, v)) e tutto il flusso uscente dal nodo stesso (archi (v, j)) sia esattamente pari alla richiesta del nodo stesso (positiva per i nodi domanda, negativa per i nodi offerta e nulla per i nodi di transito);

- il secondo insieme di vincoli, uno per ogni arco, è il vincolo di *capacità degli archi* e limita la quantità che può fluire in ogni arco.

A questo punto disponiamo di un modello di programmazione lineare per il problema e pertanto, per la sua soluzione, possiamo utilizzare, ad esempio, il metodo del simplesso.

Il modello presentato per questo problema di distribuzione di energia elettrica può essere facilmente generalizzato a diversi altri problemi di distribuzione su reti: reti di distribuzione di beni materiali (il flusso è relativo al trasporto dei beni e i nodi rappresentano punti di produzione, consumo e smistamento), reti di telecomunicazioni (il flusso rappresenta la banda da riservare su ogni collegamento), reti di trasporto (il flusso rappresenta i veicoli sulla rete) etc. In generale, il problema prende il nome di *problema del flusso su reti di costo minimo* e può essere utilizzato per modellare e risolvere svariati problemi di ottimizzazione combinatoria (anche non direttamente modellabili su una rete di flusso).

2.7 Soluzione Esercizio 7

Il problema è analogo al precedente, con la differenza che, in questo caso, sono presenti diversi tipi di flusso, uno per ogni tipo di energia. Consideriamo quindi un grafo orientato $G = (N, A)$ in cui i nodi $v \in N$ rappresentano le centrali e gli archi $(i, j) \in A$ i collegamenti tra coppie di centrali. Definiamo inoltre in ogni nodo i termini di bilanciamento $b_v^k = d_v^k - p_v^k$. Si noti come ogni nodo può essere di domanda, di offerta o di transito, a seconda del tipo di energia considerato. In effetti, ad ogni nodo, dobbiamo garantire che siano rispettati i vincoli di bilanciamento *distinti* per tipo di energia. Pertanto, dovendo controllare il flusso di diversi tipi di energia, consideriamo delle variabili decisionali x_{ij}^k che indicano la quantità di energia di tipo k da far fluire sull'arco $(i.j)$. Indicando con K l' insieme dei tipi di energia, il modello di programmazione lineare per il problema risulta pertanto il seguente:

$$
\begin{array}{llcll}
\min & \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij}^k x_{ij}^k & & & \\
s.t. & \sum_{(i,v) \in A} x_{iv}^k - \sum_{(v,j) \in A} x_{vj}^k & = & b_v^k & \forall\, v \in N,\ \forall\, k \in K \\
 & \sum_{k \in K} x_{ij}^k & \leq & u_{ij} & \forall\, (i,j) \in A \\
 & x_{ij}^k & \in & \mathbb{R}_+ & \forall\, (i,j) \in A,\ \forall\, k \in K
\end{array}
$$

La funzione obiettivo minimizza i costi di distribuzione, ottenuti sommando i costi su tutti gli archi e su tutti i tipi di energia. Il primo gruppo di vincoli replica le condizioni di bilanciamento dei nodi viste precedentemente per ogni tipo di energia: ad ogni nodo v e per ogni tipo di energia k, la somma dei flussi entranti (sugli archi (i, v)) per il tipo k meno la somma dei flussi uscenti (sugli archi (v, j)) per lo stesso tipo k, deve essere uguale alla richiesta del nodo v (positiva per i nodi domanda, negativa per i nodi offerta e nulla per i nodi di transito)sempre relativa al tipo k. In sostanza abbiamo replicato i vincoli di bilanciamento per ogni tipo di energia. Il terzo gruppo di vincoli assicura che venga rispettata la capacità degli archi: essendo la capacità definita senza distinguere i tipi di energia, si ha, come nel caso dell'esercizio 6, un vincolo per ogni arco, solo che il termine a sinistra somma *tutti* i tipi di energia.

Il modello può essere generalizzato, considerando, al posto di diversi tipi di energia, diverse *commodity* (termine inglese con diversi significati, tra cui *merce*). Si parla infatti di problemi di *flusso multicommodity* (*multicommodity flow*): una commodity può essere un diverso tipo di merce su una rete stradale, una specifica domanda di traffico relativa a una particolare coppia origine/destinazione su una rete dati etc.

Anche in questo caso, la disponibilità di un modello di programmazione lineare consente di risolvere il problema con metodi standard, come il simplesso. Si noti che, se non ci fossero vincoli di capacità sugli archi, una soluzione ottima potrebbe essere ottenuta risolvendo separamtamente $|K|$ problemi di flusso di costo minimo, uno per ogni commodity. La presenza dei vincoli di capacità, invece, crea un'accoppiamento tra le commodity, per cui è necessario considerare tutte le commodity simultaneamente: questo rende la soluzione dei problemi di flusso multicommodity più "difficile" della soluzione di problemi con una sola commodity.

2.8 Soluzione Esercizio 8 (suggerimenti)

Il problema può essere formalizzato come segue. Si definisca un grafo $G = (N, A)$ dove l'insieme dei nodi N corrisponde all'insieme dei router, e l'insieme degli archi A corrisponde all'insieme delle tratte su cui è possibile installare cavi. Per ogni domanda di traffico da un nodo i a un nodo j si definisca una commodity, ottenendo l'insieme K delle commodity. Per ciascuna commodity k è quindi data un'origine $o(k)$, una destinazione $d(k)$ e una domanda di traffico $r(k)$. Inoltre, per l'arco $(i, j) \in A$, siano u_{ij} la capacità, e c_{ij} il costo unitario di instradamento. Se si definiscono i termini di bilanciamento per ogni nodo $v \in N$ e commodity $k \in K$ come segue:

$$b_v^k = \begin{cases} -r(k) & \text{se } v = o(k) \\ +r(k) & \text{se } v = d(k) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

il problema può essere modellato come un flusso multicommodity sul grafo G.