

Metodi e Modelli per l'Ottimizzazione Combinatoria

Ripasso sulla Modellazione in Programmazione Lineare

Luigi De Giovanni

1 Modelli di programmazione lineare

I modelli di programmazione lineare sono una particolare classe di *modelli di programmazione matematica*. Un modello di programmazione matematica è utilizzato per descrivere le caratteristiche della soluzione ottima di un problema di ottimizzazione attraverso relazioni matematiche. Oltre a costituire una descrizione formale del problema, il modello fornisce la base per l'applicazione di algoritmi standard di ottimizzazione (disponibili in forma di modellatori algebrici e software di ottimizzazione) in grado di determinare una soluzione ottima. Di seguito riassumiamo gli elementi di un modello di programmazione matematica, con riferimento, a titolo di esempio, al seguente semplice problema di ottimizzazione.

Esempio 1 *Una ditta di profumi realizza due nuove fragranze a partire da tre essenze: rosa, mughetto e viola. Per realizzare un decalitro di fragranza uno sono richiesti 1,5 litri di rosa, 1 litro di mughetto e 0,3 litri di viola. Per realizzare un decalitro di fragranza due sono richiesti 1 litro di rosa, 1 litro di mughetto e 0,5 litri di viola. La disponibilità in magazzino per le tre essenze è di 27, 21 e 9 litri per rosa, mughetto e viola rispettivamente. Sapendo che l'azienda realizza un profitto di 130 e 100 euro per ogni decalitro venduto di fragranza uno e due rispettivamente, determinare le quantità ottimali delle due fragranze da produrre.*

Un modello di programmazione matematica è composto dai seguenti elementi.

- **Insiemi:** raggruppano gli elementi del sistema. Nell'esempio possiamo individuare due insiemi, quello delle essenze ($I = \{\text{rosa}, \text{mughetto}, \text{viola}\}$) e quello delle fragranze ($J = \{\text{uno}, \text{due}\}$).
- **Parametri:** sono i dati del problema e rappresentano delle quantità fissate che dipendono dai diversi elementi del sistema. Nell'esempio, i parametri sono i profitti, definiti per ogni fragranza (130 euro per ogni decalitro di fragranza *uno* e 100 euro per decalitro di fragranza *due*), le disponibilità di magazzino, definite per ogni essenza (27, 21 e 9 litri per le essenze *rosa*, *mughetto* e *viola* rispettivamente), e

le richieste di essenza per ogni unità di fragranza, definite per ogni coppia essenza-fragranza (ad esempio, 1 litro di mughetto per ogni decalitro di fragranza *uno*, 0,5 litri di viola per ogni decalitro di fragranza *due* etc.).

- **Variabili decisionali o di controllo:** sono le grandezze del sistema di cui non conosciamo il valore (assimilabili a delle incognite) e sulle quali possiamo agire per determinare diverse soluzioni alternative del problema. Nell'esempio, le variabili decisionali sono la quantità, in decaltri, delle due fragranze da produrre (che chiamiamo x_{uno} e x_{due}).
- **Vincoli:** sono delle relazioni matematiche che descrivono le condizioni di ammissibilità delle soluzioni. Servono quindi per discriminare le combinazioni di valori delle variabili decisionali che rappresentano soluzioni accettabili al problema, da quelle che non lo sono. Ad esempio, tutte le soluzioni ammissibili non possono utilizzare più di 27 litri di essenza *rosa*, relazione esprimibile come $1,5x_{uno} + 1x_{due} \leq 27$.
- **Funzione obiettivo:** è la quantità da massimizzare o minimizzare, espressa come funzione delle variabili decisionali. Nell'esempio si vuole massimizzare il profitto in euro, esprimibile come $130x_{uno} + 100x_{due}$.

La *soluzione* di un problema di ottimizzazione formulato con un modello di programmazione matematica consiste nella determinazione dei valori delle variabili che soddisfano tutti i vincoli e massimizzano o minimizzano il valore della funzione obiettivo.

Un *modello di Programmazione Lineare* è un modello di programmazione matematica in cui

- la funzione obiettivo è un'espressione *lineare* delle variabili decisionali;
- i vincoli sono determinati da un sistema di equazioni e/o disequazioni *lineari*.

In base alla natura o *dominio* delle variabili decisionali, si parla di

- modelli di Programmazione Lineare (in senso stretto, PL) se tutte le variabili possono assumere valori reali;
- modelli di Programmazione Lineare Intera (PLI) se tutte le variabili possono assumere valori interi;
- modelli di Programmazione Lineare Intera Mista (PLIM) se alcune variabili possono assumere valori reali e altre valori interi.

Il problema descritto nell'esempio può quindi essere formulato con il seguente modello di Programmazione Lineare (in senso stretto):

$ \begin{array}{ll} \max & 130x_{uno} + 100x_{due} \\ s.t. & 1,5x_{uno} + x_{due} \leq 27 \\ & x_1 + x_{due} \leq 21 \\ & 0,3x_{uno} + 0,5x_{due} \leq 9 \\ & x_{uno} \geq 0, \quad x_{due} \geq 0 \end{array} $	funzione obiettivo vincolo disponibilità rosa vincolo disponibilità mughetto vincolo disponibilità viola domini delle variabili
--	---

È conveniente esprimere i modelli in termini generali, sfruttando le opportune notazioni algebriche, in modo che lo stesso modello rappresenti una descrizione di più casi (o *istanze*) dello stesso *problema*, inteso come classe di problemi definiti allo stesso modo. Allo scopo, una volta definiti gli insiemi e dei relativi indici, si può generalizzare la definizione dei parametri e delle variabili e, quindi, della funzione obiettivo e dei vincoli. Nell'esempio, potremmo definire il problema dell'ottimizzazione della produzione dove si vuole determinare la quantità di prodotti per massimizzare i profitti, sotto vincoli legati alla disponibilità di risorse. Indicando con

- I : insieme delle risorse (nell'esempio, essenze);
- J : insieme dei prodotti (nell'esempio, fragranze);
- D_i : disponibilità di risorsa $i \in I$;
- P_j : profitto unitario per il prodotto $j \in J$;
- Q_{ij} : quantità di risorsa $i \in I$ necessaria per ogni unità di prodotto $j \in J$;
- x_j : quantità di prodotto $j \in J$ (variabili decisionali)

il modello per il problema (generale) si può formulare come segue:

$$\begin{array}{ll}
 \max & \sum_{j \in J} P_j x_j \\
 s.t. & \sum_{j \in J} Q_{ij} x_j \leq D_i \quad \forall i \in I \\
 & x_j \in \mathbb{R}_+ \quad \forall j \in J
 \end{array}$$

L'istanza descritta nell'esempio è ottenuta ponendo $I = \{\text{rosa}, \text{mughetto}, \text{viola}\}$, $J = \{\text{uno}, \text{due}\}$ e fissando gli opportuni valori dei parametri D_i , P_j e Q_{ij} . Fissando insieme e/o parametri ad altri valori si ottengono diverse istanze dello stesso problema per le quali il modello continua a essere valido.

2 Esercizi

Si trovi una formulazione di programmazione lineare per i seguenti problemi di ottimizzazione. Per ogni punto, si sviluppi una formulazione generale, in grado di modellare diverse istanze dello stesso problema.

1. Una cooperativa edile deve organizzare il riposizionamento delle impalcature da tre cantieri in fase di chiusura (cantieri A,B,C) a tre nuovi cantieri (cantieri 1, 2 e 3). Le impalcature sono costituite da tubi in ferro appositamente attrezzati: nei tre cantieri A, B e C si trovano 7000, 6000 e 4000 tondini rispettivamente, mentre i nuovi cantieri 1, 2 e 3 richiedono 8000, 5000 e 4000 tondini rispettivamente. I costi per lo spostamento di un singolo tondino da un cantiere in chiusura a un cantiere nuovo sono sintetizzati nella seguente tabella:

Costi (euro-cent)	1	2	3
A	9	6	5
B	7	4	9
C	4	6	3

Per rendere il riposizionamento il più rapido possibile, viene dedicato un camion per ogni singolo spostamento di tondini da un cantiere ad un altro. La capacità di un camion è di 10000 tondini ed è quindi sufficiente per spostare tutti i tondini richiesti. Si formuli un modello di programmazione lineare che determini il piano di riposizionamento a costo minimo, considerando che:

- ogni camion effettivamente utilizzato impone un costo fisso di 50 euro;
- si hanno a disposizione quattro camion;
- nel nuovo cantiere 2 non possono arrivare tondini sia da A che da B;
- è possibile noleggiare un quinto camion al costo fisso 65 euro (15 euro in più rispetto al costo degli altri quattro camion).

2. Un'azienda di telefonia mobile deve installare delle antenne per la copertura di sei zone sul territorio. Sono stati individuati cinque siti possibili per l'installazione delle antenne. In seguito a delle simulazioni, è stato possibile determinare il livello del segnale captato nelle diverse zone e proveniente da un'antenna installata nei vari siti. Tali livelli sono riportati nella seguente tabella:

	zona 1	zona 2	zona 3	zona 4	zona 5	zona 6
sito A	10	20	16	25	0	10
sito B	0	12	18	23	11	6
sito C	21	8	5	6	23	19
sito D	16	15	15	8	14	18
sito E	21	13	13	17	18	22

I ricevitori sono sensibili ai segnali di livello almeno 18. Inoltre, non è possibile avere più di un segnale sopra la soglia in una stessa zona, altrimenti il segnale risulterebbe disturbato e il ricevitore non riuscirebbe a sintonizzarsi. Infine, l'installazione di un'antenna nel sito E è subordinata all'installazione di un'antenna nel sito D, che faccia da ponte. L'azienda di telefonia vuole determinare dove installare le antenne per coprire il maggior numero di zone.

3. La costruzione di una barca da diporto comporta il completamento delle operazioni indicate nella tabella che segue, che ne riporta anche la durata in giorni.

Operazione	Durata	Precedenze
A	2	nessuna
B	4	A
C	2	A
D	5	A
E	3	B,C
F	3	E
G	2	E
H	7	D,E,G
I	4	F,G

Si consideri che alcune operazioni sono in alternativa. In particolare, bisogna eseguire solo una tra le operazioni B e C, e solo una tra le operazioni F e G. Inoltre, se si eseguono sia C che G, la durata dell'operazione I si allunga di 2 giorni. La tabella indica anche, per ogni operazione, l'insieme delle precedenze (operazioni che devono essere completate prima di poter eseguire l'operazione stessa). Ad esempio, l'operazione H può iniziare solo dopo la fine delle operazioni E, D e G (se G viene eseguita). Scrivere un modello di programmazione lineare per decidere quali operazioni in alternativa eseguire, con l'obiettivo di minimizzare la durata complessiva delle operazioni di costruzione.

4. Andrea, Bruno, Carlo e Dario condividono un appartamento. Ogni sabato ricevono quattro giornali: “La Repubblica”, “Il Messaggero”, “La Stampa” e “La Gazzetta dello Sport”, che leggono prima di uscire di casa. Essendo dei tipi molto pignoli, ciascuno di loro pretende di leggere tutti i giornali secondo un proprio particolare ordine. Andrea desidera iniziare con “La Repubblica” per un’ora, poi prosegue con “La Stampa” per 30 minuti, dà solo un’occhiata a “Il Messaggero” per due minuti e termina dedicando cinque minuti a “La Gazzetta dello Sport”. Bruno preferisce iniziare con “La Stampa” che legge per 75 minuti; successivamente dà appena uno sguardo a “Il Messaggero” per tre minuti, prosegue con “La Repubblica” per 25 minuti e infine con “La Gazzetta dello Sport” per 10 minuti. Carlo comincia con “Il Messaggero” per cinque minuti, poi legge “La Stampa” per 15 minuti, “La Repubblica” per 10 minuti e termina con “La Gazzetta dello Sport” per 30 minuti. Infine, Dario inizia con “La Gazzetta dello Sport” per 90 minuti per poi dedicare solo un minuto a testa rispettivamente a “La Repubblica”, “La Stampa” e “Il Messaggero” nell’ordine indicato. Ciascuno dei quattro coninquilini è talmente insistente nelle proprie richieste che, pur di seguire l’ordine di lettura che preferisce, è disposto a non leggere nulla fino a che non diventa disponibile il giornale che desidera. Inoltre, nessuno di loro è disposto a interrompere la lettura di un giornale prima del tempo per poi riprenderla successivamente. Sapendo che Andrea si alza dal letto alle 8h30, Bruno e Carlo alle 8h45 e Dario alle 9h30, e sapendo che nel periodo di lettura dei giornali ciascuno di loro riesce anche a lavarsi, vestirsi e fare colazione, si vuole calcolare l’ordine secondo il quale essi devono leggere i giornali in modo da partire per una gita in campagna il più presto possibile.
5. La federazione dei farmacisti vuole organizzare i turni festivi delle farmacie sul territorio regionale. E’ stabilito a priori il numero dei turni, che devono essere bilanciati in termini di numero di farmacie, considerando che ciascuna farmacia deve appartenere, per equità, a un solo turno. Ad esempio, se il numero complessivo di farmacie è 12 e si vogliono organizzare tre turni, ciascun turno sarà formato da quattro farmacie. Sia le farmacie che gli utenti si considerano distribuiti sul territorio e concentrati in centroidi (corrispondenti in genere con comuni o quartieri). Per ogni centroide sono noti il numero di utenti e il numero di farmacie. E’ inoltre nota la distanza tra ogni coppia ordinata di centroidi. In prima istanza, si trascurano problemi relativi alla congestione e si assume che gli utenti, in ciascun turno, si servano dalla farmacia aperta più vicina. Si vuole determinare la distribuzione dei turni festivi che minimizza la distanza complessiva percorsa dagli utenti per il servizio festivo.

6. (*Un problema di distribuzione di energia*) Una società di produzione di energia elettrica dispone di diverse centrali di produzione e distribuzione, collegate tra loro con cavi reofori. Ogni centrale i può:

- produrre p_i kW di energia elettrica ($p_i = 0$ se la centrale non produce energia);
- distribuire energia elettrica su una sottorete di utenti la cui domanda complessiva è di d_i kW ($d_i = 0$ se la centrale non serve utenti);
- smistare l'energia da e verso altre centrali.

I cavi che collegano una centrale i ad una centrale j hanno una capacità massima di u_{ij} kW e costano c_{ij} euro per ogni kW trasportato. La società vuole determinare il piano di distribuzione dell'energia elettrica di costo minimo, sotto l'ipotesi che l'energia complessivamente prodotta sia pari alla domanda totale delle sottoreti di utenti.

7. (*Un problema di distribuzione di vari tipi di energia*) Una società di produzione di energia elettrica dispone di diverse centrali di produzione e distribuzione, collegate tra loro con cavi reofori. Ogni centrale tratta diversi tipi di energia (continua/alternata, diverso voltaggio etc.). In particolare, ogni centrale i può:

- produrre p_i^k kW di energia elettrica del tipo k ($p_i^k = 0$ se la centrale non produce energia del tipo k);
- distribuire energia elettrica del tipo k su una sottorete di utenti la cui domanda complessiva è di d_i^k kW ($d_i^k = 0$ se la centrale non serve utenti che richiedono energia di tipo k);
- smistare l'energia dei diversi tipi da e verso altre centrali.

Si noti che ogni centrale può produrre e/o distribuire più tipi di energia. I cavi che collegano una centrale i ad una centrale j hanno una capacità massima di u_{ij} kW, indipendentemente dal tipo di energia trasportata. Il costo di trasporto dipende sia dalla coppia di centrali (i, j) collegate, sia dal tipo di energia k trasportata, e ammonta a c_{ij}^k euro per ogni kW trasportato. La società vuole determinare il piano di distribuzione dell'energia elettrica di costo minimo, sotto l'ipotesi che l'energia complessivamente prodotta per ogni tipo sia pari alla domanda totale delle sottoreti di utenti per lo stesso tipo.

8. Una rete di telecomunicazione è formata da un insieme di router e da tratte di collegamento. Ogni router genera del traffico verso ciascun altro router e, per ogni coppia (ordinata) di router, è stata stimata la domanda di traffico, in termini di banda richiesta. Il traffico generato nel router i e diretto al router j è instradato sulla rete in tecnologia *multi-hop* (il traffico può passare da nodi intermedi) e *splittable flow* (il traffico può essere frazionato su più percorsi). Le tratte collegano coppie di router e permettono l'installazione dei cavi necessari per l'instradamento dei flussi. Per ogni tratta, è definita la capacità, in termini di flusso nelle due direzioni che

può essere instradato sulla tratta stessa, e un costo unitario per l'instradamento di una unità di flusso. Si vuole dimensionare ogni tratta, in modo permettere l'instradamento di tutte le domande di traffico al costo minimo.