Metodi e Modelli per l'Ottimizzazione Combinatoria

Metodo del Simplesso Duale

L. De Giovanni G. Zambelli

Abbiamo visto come il metodo del simplesso mantenga, ad ogni iterazione, due soluzioni primale e duale che sono, per costruzione, in scarti complementari e, quindi, diventano ottime nel momento in cui tutte e due sono ammissibili. In particolare, il metodo del simplesso parte da una soluzione primale ammissibile e cerca di rendere questa soluzione ottimale (costi ridotti non negativi), mantendo, ad ogni iterazione, una soluzione ammissibile primale. Questo corrisponde, visto che i costi ridotti corrispondono ai vincoli duali, ad avere, ad ogni iterazione, una soluzione duale non ammissibile che, al termine diventa ammissibile. Esistono casi (come vedremo frequenti nelle applicazioni) in cui si ha una soluzione di base *primale non ammissibile* in scarti complementari con una soluzione *ammissibile duale*. Chiaramente, vista la non ammissibilità primale, non è possibile applicare direttamente il metodo del simplesso come visto finora. Tuttavia è possibile sfruttare la coppia di soluzioni disponibili per arrivare, in modo molto efficiente, ad una soluzione ottima, attraverso il *metodo del simplesso duale*. Il metodo del simplesso duale mantiene ad ogni iterazione una base ammissibile nel duale (ovvero una base per la quale i costi ridotti siano non-negativi) e termina quando determina una base che sia ammissibile anche nel primale. Tale metodo può essere interpretato come il metodo del simplesso eseguito sul problema duale invece che sul primale.

Si consideri come al solito il problema (P)

$$\begin{aligned} \min c^T x & \\ Ax = & \; b \\ x \geq & \; 0 \end{aligned}$$

e il suo duale (D)

$$\begin{aligned} \max\ u^T b & \\ u^T A \leq & \; c^T, \end{aligned}$$

ove $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, e x è un vettore di variabili in $\mathbb{R}^n$.

Consideriamo una base B di A: il problema in forma canonica (detta anche *forma tableau*) rispetto a B sia

$$
\begin{array}{rrrrl}
\min & z & & & \\
& -z & +\bar{c}_F x_F & = & z_B \\
& x_B & +\bar{F} x_F & = & \bar{b}, \\
& & x & \geq & 0.
\end{array} \tag{1}
$$

ove

- $\bar{c}^T = c - c_B^T B^{-1} A$,
- $\bar{F} = B^{-1} F$,
- $\bar{b} = B^{-1} b$,
- $z_B = c_B^T B^{-1} b$

Assumiamo che B sia ammissibile nel duale, e cioè che la soluzione duale associata a B

$$\bar{u}^T = c_B^T B^{-1}$$

sia ammissibile per (D), dunque $\bar{u}^T A \leq c^T$, e dunque $\bar{c} \geq 0$. In altre parole i costi ridotti relativi a B sono non-negativi.

La soluzione (primale) di base $\bar{x}$ relativa a B è definita da

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ove $x_B = \begin{pmatrix} \bar{x}_{\beta[1]} \\ \vdots \\ \bar{x}_{\beta[m]} \end{pmatrix}$ se $\beta[i]$ denota l'indice della variabile in base alla riga i-esima.

Se $\bar{b}_i \geq 0$ per ogni $i = 1, \ldots, m$, allora $\bar{x}$ è ammissibile, e dunque B è una base ammissibile nel primale, e dunque ottima. In tal caso $\bar{x}$ è una soluzione ottima e abbiamo risolto il problema.

Supponiamo dunque che esista $h \in \{1, \ldots, m\}$ tale che $\bar{b}_h < 0$.

Vogliamo far uscire di base la variabile $x_{\beta[h]}$, e dobbiamo selezionare la variabile entrante in modo da ottenere una nuova base ammissibile nel duale. Sia come al solito $\bar{a}_{ij}$ la componente nella riga i e colonna j della matrice $\bar{A} = B^{-1} A = (I|\bar{F})$.

Abbiamo due casi.

Caso 1: $\bar{a}_{hj} \geq 0$ per ogni $j = 1, \ldots, n$.

In tal caso, ogni soluzione ammissibile x per il primale dovrà soddisfare

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{hj} x_j = \bar{b}_h$$

Poiché $x \geq 0$ e $\bar{a}_{hj} \geq 0$ per ogni $j = 1, \ldots, m$, avremo $\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{hj} x_j \geq 0$. Stiamo quindi dicendo che $\bar{b}_h \geq 0$, che è un assurdo, poiché abbiamo scelto $\bar{b}_h < 0$.
Pertanto, in tal caso, il problema primale non ammette soluzione.

Caso 2: $\bar{a}_{hj} < 0$ per qualche $j \in N$.

Vogliamo determinare un indice k tale che la base $\tilde{B}$, ottenuta da B rimuovendo la colonna relativa alla variabile x_k e aggiungendo la colonna relativa alla variabile $x_{\beta[h]}$, rimanga ammissibile nel duale. Questo avviene quando il vettore $\tilde{c}$ dei costi ridotti rispetto a $\tilde{B}$ è non-negativo. Come si può verificare facendo un pivot sull'entrata (h, k) del tableau relativo alla base B, il vettore $\tilde{c}$è dato da

$$\tilde{c}_j = \bar{c}_j - \frac{\bar{c}_k}{\bar{a}_{hk}} \bar{a}_{hj}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Dunque, poiché $\bar{c}_{\beta[h]} = 0$ e $\bar{a}_{h\beta[h]} = 1$,

$$\tilde{c}_{\beta[h]} = -\frac{\bar{c}_k}{\bar{a}_{hk}},$$

e poiché $\bar{c}_k \geq 0$, si ha che $\tilde{c}_{\beta[h]} \geq 0$ se e solo se $\bar{a}_{hk} < 0$. Dunque dobbiamo scegliere un'indice k tale che $\bar{a}_{hk} < 0$. Inoltre, affinché $\tilde{B}$ sia ammissibile nel duale, deve valere $\tilde{c}_j \geq 0$ per ogni $j = 1, \ldots, n$, $j \neq \beta[h]$, ovvero

$$\tilde{c}_j = \bar{c}_j - \frac{\bar{c}_k}{\bar{a}_{hk}} \bar{a}_{hj} \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n, \ j \neq \beta[h].$$

Se $\bar{a}_{hj} \geq 0$, allora la condizione è verificata poiché in tal caso $\tilde{c}_j \geq \bar{c}_j \geq 0$, ove la disuguaglianza discende dal fatto che $\frac{\bar{c}_k}{\bar{a}_{hk}} \bar{a}_{hj} \geq 0$ e che $\bar{c}_j \geq 0$.
Se $\bar{a}_{hj} < 0$, allora $\tilde{c}_j \geq 0$ se e solo se

$$\frac{\bar{c}_k}{\bar{a}_{hk}} \geq \frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{hj}},$$

ovvero

$$\frac{\bar{c}_k}{|\bar{a}_{hk}|} \leq \frac{\bar{c}_j}{|\bar{a}_{hj}|}.$$

Dobbiamo dunque scegliere k tale che $a_{hk} < 0$ e

$$\frac{\bar{c}_k}{|\bar{a}_{hk}|} = \min \left\{ \frac{\bar{c}_j}{|\bar{a}_{hj}|} \ : \ j = 1, \ldots, n \text{ tale che } \bar{a}_{hj} < 0 \right\};$$

Con una tale scelta di k, $\tilde{B}$ è una base ammissibile. Inoltre, si può verificare che il valore della soluzione duale rispetto alla base $\tilde{B}$ è

$$c_{\tilde{B}}^T \tilde{B}^{-1} b = z_B + \frac{\bar{c}_k}{\bar{a}_{hk}} \bar{b}_h \geq z_B,$$

ove la disuguaglianza vale poiché $\bar{c}_k \geq 0$, $\bar{a}_{hk} < 0$ e $\bar{b}_h < 0$.

Dunque abbiamo trovato una soluzione duale di base ammissibile di valore maggiore uguale alla soluzione precedente, e dunque una soluzione non peggiore di quella precedente (poiché il duale è un problema di massimo). In altre parole, abbiamo delle regole per effettuare un cambio base mantenendo una soluzione duale ammissibile e migliore di quella precedente. Il processo può quindi essere iterato fino a che non sia più possibile migliorare la soluzione duale, che corrisponde ad aver trovato l'ottimo del duale e quindi, per dualità forte, anche l'ottimo del primale.

Ricapitoliamo il metodo del **simplesso duale** nella tavola seguente.

Metodo del Simplesso Duale

Input: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, una base B (le cui colonne hanno indici $\{\beta[1], \ldots, \beta[m]\}$) ammissibile per il duale di (P);

Output: Una soluzione ottima di base $\bar{x}$ per (P), oppure il fatto che (P) è inammissibile.

1. Calcola il tableau rispetto alla base B;
2. Se $\bar{b} \geq 0$, allora B è una base ottima, STOP.
3. Altrimenti, scegli h tale che $\bar{b}_h < 0$;
4. Se $\bar{a}_{hj} \geq 0$ per ogni $j = 1, \ldots, n$, allora il problema è inammissibile, STOP.
5. Altrimenti scegli $k \in N$ tale che

$$\bar{a}_{hk} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\bar{c}_k}{|\bar{a}_{hk}|} = \min \left\{ \frac{\bar{c}_j}{|\bar{a}_{hj}|} \;:\; j = 1, \ldots, n \text{ tale che } \bar{a}_{hj} < 0 \right\};$$

6. Poni $\beta[h] := k$ e torna ad 1.

La complessità e la convergenza delsimplesso duale sono analoghe a quelle del simplesso (normale): complessità esponenziale, necessità di regole o accorgimenti anticiclo (ad esempio la regola di Bland) etc.