Metodi e Modelli per l'Ottimizzazione Combinatoria

Ripasso sulla teoria della dualità in programmazione lineare

L. De Giovanni G. Zambelli

1 Definizione del problema duale

La teoria della dualità in programmazione lineare può essere introdotta come strumento per verifica dell'ottimalità di una soluzione ammissibile. Dato un problema di programmazione lineare con funzione obiettivo in forma di minimo, l'idea è quella di fornire una limitazione inferiore ai possibili valori che la funzione obiettivo può assumere nella regione di ammissibilità.

Consideriamo il problema di PL in forma standard

$$\begin{array}{rrl} (PL) \quad z^* = \min z = & c^T x & \\ \text{s.t.} & Ax & = b \\ & x & \geq 0 \end{array}$$

dove $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, x è un vettore di variabili in $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1 (Limitazione inferiore - Lower bound): *Sia dato un problema di programmazione lineare $PL : \min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$ e sia z^* il valore ottimo della funzione obiettivo. $l \in \mathbb{R}$ è un lower bound per il problema se e solo se $l \leq c^T x \; \forall \; x$ ammissibile per PL.*

Un modo per ottenere un lower bound per (PL) è il seguente. Si scelga un qualsiasi vettore $u \in \mathbb{R}^m$. Se x è ammissibile per (PL) allora:

$$u^T Ax = u^T b$$

Sotto la condizione $c^T \geq u^T A$, ed essendo $x \geq 0$, si ha:

$$c^T x \geq u^T Ax = u^T b, \; \forall \; x \text{ ammissibile}$$

In sintesi: dato un vettore $u \in \mathbb{R}^m$, se $c \geq u^T A$, allora $u^T b$ è un lower bound per (PL).

Si noti che, avendo a disposizione un lower bound l e una soluzione ammissibile $\tilde{x}$, se $c^T \tilde{x} = l$, allora $\tilde{x}$ è ottima. Conviene quindi avere a disposizione il miglior lower bound possibile, ossia il lower bound più alto possibile. Il miglior lower bound per (PL) ottenibile con la tecnica descritta è quindi dato scegliendo opportunamente il vettore u. Si tratta di un problema di ottimizzazione in cui le variabili decisionali sono quelle del vettore u e che può essere modellato come segue:

$$\begin{array}{llll} (DL) & \omega^* = \max \omega = & u^T b & \\ & \text{s.t.} & u^T A & \leq c^T \\ & & u & \text{libero} \end{array}$$

Il problema (DL) introdotto è detto *problema duale* di (PL). In relazione a questa definizione, (PL) è detto *problema primale* e la coppia dei problemi (PL) e (DL) viene detta *coppia primale-duale*.

Si noti come si introduca:

- una variabile duale in corrispondenza di ciascun vincolo primale;
- un vincolo duale in corrispondenza di ciascuna variabile primale.

2 Teoremi della dualità

La definizione del problema duale permette di dimostrare immediatamente il seguente risultato:

Teorema 1 (dualità debole): *Data una soluzione $\tilde{x}$ ammissibile per (PL) e una soluzione $\tilde{u}$ ammissibile per (DL), si ha*

$$c^T \tilde{x} \geq \tilde{u}^T b$$

Segue immediatamente

Corollario 1 *Siano date una soluzione $\tilde{x}$ ammissibile per (PL) e una soluzione $\tilde{u}$ ammissibile per (DL). Se $c^T \tilde{x} = \tilde{u}^T b$, allora $\tilde{x}$ è una soluzione ottima per (PL) e $\tilde{u}$ è una soluzione ottima per (DL).*

Si può anche facilmente dimostrare il seguente risultato

Corollario 2 *Sia data una coppia di problemi primale-duale (PL)-(DL). Allora:*

(i) Se (PL) è illimitato, allora (DL) è inammissibile.

(ii) Se (DL) è illimitato, allora (PL) è inammissibile.

Si ribadisce che le due implicazioni valgono solo nella direzione data. Esistono infatti esempi di coppie di problemi primale-duale in cui entrambi i problemi sono inammissibili.

Si ha inoltre il seguente importante risultato:

Teorema 2 (Dualità forte): *(PL) ammette soluzione ottima x^* $\iff$ (DL) ammette soluzione ottima u^*. Inoltre $c^T x^* = u^{*T} b$.*

Il risultato può essere dimostrato in vari modi. Diamo di seguito la dimostrazione della direzione (PL) ammette ottimo $\Rightarrow$ (DL) ammette ottimo, per noi interessante perché fa uso della teoria del simplesso.
Dimostrazione: ($\Rightarrow$)
Se (PL) ammette soluzione ottima, allora ammetterà una soluzione ottima di base. Ricaviamo tale soluzione ottima con il metodo del simplesso. Chiamiamo tale soluzione ottima $x^* = \begin{bmatrix} x_B^* \\ x_F^* \end{bmatrix}$. A partire dalla soluzione ottima primale, possiamo costruire un vettore $u \in \mathbb{R}^m$ e dimostrare che si tratta di una soluzione ammissibile e ottima. Poniamo

$$u^T = c_B^T B^{-1}$$

Essendo x^* una soluzione ottima ricavata con il metodo del simplesso, si avrà:

$$\begin{array}{c} \bar{c}_B = 0 \\ \bar{c}_F \geq 0 \end{array}$$

Per la definizione di costo ridotto, quindi:

$$\bar{c}_F^T = c_F - c_B^T B^{-1} F = c_F - u^T F \geq 0 \Rightarrow c_F \geq u^T F$$

Possiamo quindi scrivere:

$$u^T A = u^T [B|F] = [u^T B|u^T F] = [c_B^T B^{-1} B|u^T F] = [c_B^T|u^T F] \leq [c_B^T|c_F^T] = c^T$$

La soluzione $u^T = c_B^T B^{-1}$ è pertanto ammissibile duale. Il corrispondente valore della funzione obiettivo duale è

$$u^T b = c_B^T B^{-1} b = c_B^T x_B^* = c^T x^*$$

Abbiamo quindi una coppia di soluzioni ammissibili primale (x^*) e duale (u) con pari valore della funzione obiettivo. Per il corollario visto, u è soluzione ottima duale. Possiamo quindi porre $u^* = u$ e ottenere l'asserto.■

I risultati visti finora possono essere sintetizzati nella seguente tabella dei casi possibili:

		(DL)		
		Finito	Illimitato	Impossibile
(PL)	Finito	SI e ($z^* = \omega^*$)	NO	NO
	Illimitato	NO	NO	SI (corollario)
	Impossibile	NO	SI (corollario)o	SI (esempi)

3 Dualità per problemi in forma generica

I ragionamenti fatti sopra per l'introduzione del problema duale possono essere generalizzati per un problema di PL in qualsiasi forma (non necessariamente standard). Ricordiamo che, affinché $u^T b$ rappresenti un lower bound per $c^T x$ ($u^T b \leq c^T x$), deve essere mantenuta la catena di maggiorazioni

$$c^T x \geq u^T A x \geq u^T b$$

Ad esempio, se i vincoli sono nella forma $Ax \geq b$, per mantenere il secondo $\geq$ si devono specificare ulteriori condizioni su u, che deve essere non negativa, per preservare il verso delle disuguaglianze. Infatti, solo se $u \geq 0$ si può scrivere

$$Ax \geq b \wedge u \geq 0 \Rightarrow u^T A x \geq u^T b$$

Analogamente, i vincoli duali su u che permettano di mantenere il verso opportuno delle disuguaglianze (primo $\geq$) dipende anche dal segno di x. Ripetendo i ragionamenti per ciascun caso (verso delle disuguaglianze dei vincoli, segno delle variabili) si può ottenere la seguente tabella per il passaggio da un problema primale a un problema duale, che considera ciascun vincolo e variabile singolarmente e consente di mantenere la catena di maggiorazioni$c^T x \geq u^T A x \geq u^T b$.

Primale ($\min c^T x$)	**Duale** ($\max u^T b$)
$a_i^T x \geq b_i$	$u_i \geq 0$
$a_i^T x \leq b_i$	$u_i \leq 0$
$a_i^T x = b_i$	u_i libera
$x_j \geq 0$	$u^T A_j \leq c_j$
$x_j \leq 0$	$u^T A_j \geq c_j$
x_j libera	$u^T A_j = c_j$

La tabella si legge da sinistra a destra se si ha un problema primale in forma di minimo e da destra a sinistra se si ha un problema primale in forma di massimo.

Attenzione: i risultati visti nella precedente sezione possono essere generalizzati a coppie di problemi primale-duale in qualsiasi forma.

Esempio:

$$
\begin{array}{llllll}
\min & 10x_1 & +20x_2 & & \\
s.t. & 2x_1 & -x_2 & & \geq 1 \\
 & & x_2 & +x_3 & \leq 2 \\
 & x_1 & & -2x_3 & = 3 \\
 & & 3x_2 & -x_3 & \geq 4 \\
 & x_1 & & & \geq 0 \\
 & & x_2 & & \leq 0 \\
 & & & x_3 & \text{libera}
\end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{llllll}
\max & u_1 & +2u_2 & +3u_3 & +4u_4 & \\
s.t. & u_1 & & & & \geq 0 \\
 & & u_2 & & & \leq 0 \\
 & & & u_3 & & \text{libera} \\
 & & & & u_4 & \geq 0 \\
 & 2u_1 & & +u_3 & & \leq 10 \\
 & -u_1 & +u_2 & & +3u_4 & \geq 20 \\
 & & u_2 & -2u_3 & -u_4 & = 0
\end{array}
$$

4 Condizioni di complementarietà primale-duale

Sia data una coppia di problemi primale-duale:

$$
\begin{array}{lll}
(PP) & \min & c^T x \\
 & \text{s.t.} & Ax \geq b \\
 & & x \geq 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
(PD) & \max & u^T b \\
 & \text{s.t.} & u^T A \leq c^T \\
 & & u \geq 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\text{due vettori} \\
\bar{x} \in \mathbb{R}^n \\
\bar{u} \in \mathbb{R}^m
\end{array}
$$

Il teorema della dualità forte fornisce delle *condizioni di ottimalità*:

$$
\begin{array}{c}
\bar{x} \text{ e } \bar{u} \text{ ottime} \\
\text{primale e duale (risp.)}
\end{array}
\iff
\begin{array}{ll}
\bar{x} \text{ è ammissibile primale:} & A\bar{x} \geq b \wedge \bar{x} \geq 0 \\
\bar{u} \text{ è ammissibile duale:} & \bar{u}^T A \leq c^T \wedge \bar{u} \geq 0 \\
\text{vale la dualità forte:} & c^T \bar{x} = \bar{u}^T b
\end{array}
$$

Si noti che abbiamo utilizzato un problema primale con vincoli di $\geq$, ma le condizioni sono valide anche per soluzioni non di base e possono essere estese a coppie di problemi in qualsiasi forma.

Esercizio 1 *Trovare la soluzione ottima del seguente problema di programmazione lineare:*

$$
\begin{array}{lll}
max & z = & -3x_1 - x_3 \\
s.t. & & x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\
 & & 2x_1 + x_2 + x_3 = 20 \\
 & & x_1, x_2, x_3 \textit{ libere}
\end{array}
$$

Suggerimento: la presenza di soli vincoli di uguaglianza e di sole variabili libere suggerisce l'applicazione diretta delle condizioni di ottimalità primale duale, impostando un sistema di equazioni lineari contenente i vincoli del primale (di uguaglianza) i vincoli del duale (variabili primali libere $\Rightarrow$ vincoli del duale di uguaglianza) e il vincolo di uguaglianza tra la funzione obiettivo primale e la funzione obiettivo primale.

Risultato: infinite soluzione ottime del tipo $x_1 = 11 - \frac{1}{3}x_3$, $x_2 = -2 - \frac{1}{3}x_3$.

Le condizioni di ottimalità possono essere espresse nella seguente forma.

Teorema 3 condizioni di ortogonalità (o di complementarietà) primale duale. *Data la coppia di problemi primale-duale*

$$\begin{array}{l}\min\{c^T x : x \geq 0, Ax \geq b\} \\ \max\{u^T b : u \geq 0, u^T A \leq c^T\}\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\textit{x e u ottime} \\ \textit{primale e duale (risp.)}\end{array} \iff \begin{array}{ll} Ax \geq b \wedge x \geq 0 & \textit{(ammissibilità primale)} \\ u^T A \leq c^T \wedge u \geq 0 & \textit{(ammissibilità duale)} \\ \left.\begin{array}{c} u^T(Ax - b) = 0 \\ (c^T - u^T A)x = 0 \end{array}\right\} & \textit{(ortogonalità)} \end{array}$$

Le condizioni di ortogonalità di due soluzioni ammissibili e ottime x e u possono essere scritte come segue.

$$\begin{aligned} u^T(Ax - b) &= \sum_{i=1}^{m} u_i(a_i^T x - b_i) = 0 \\ (c^T - u^T A)x &= \sum_{j=1}^{n} (c_j - u^T A_j)x_j = 0 \end{aligned}$$

Ricordando che, per l'ammissibilità dei problemi primale e duale TUTTI i fattori sono ≥ 0[1], si ha che, all'ottimo:

$$\begin{aligned} u_i(a_i^T x - b_i) &= 0, \quad \boxed{\forall}\ i = 1...m \\ (c_j - u^T A_j)x_j &= 0, \quad \boxed{\forall}\ j = 1...n \end{aligned}$$

Le condizioni di ortogonalità (o complementarietà) sono rispettate <u>per ciascun</u> vincolo/variabile primale/duale.

In altri termini, siano u e x soluzioni ammissibili di una coppia di problemi primale-duale $\min\{c^T x : x \geq 0, Ax \geq b\}$ e $\max\{u^T b : x \geq 0, u^T A \leq c^T\}$. x e u sono ottime se e solo se:

1)	variabile primale positiva	$x_j > 0$	$\Rightarrow$	$u^T A_j = c_j$	vincolo duale saturo
2)	vincolo duale *lasco*	$u^T A_j < c_j$	$\Rightarrow$	$x_j = 0$	variabile primale nulla
3)	variabile duale positiva	$u_i > 0$	$\Rightarrow$	$a_i^T x = b_i$	vincolo primale saturo
4)	vincolo primale *lasco*	$a_i^T x > b_i$	$\Rightarrow$	$u_i = 0$	variabile duale nulla

[1]In questa forma del problema primale, i due fattori di ciascun addendo sono ≥ 0 e quindi i singoli addendi sono ≥ 0. In forma generale, la definizione dei domini delle variabili duali e dei versi dei vincoli duali garantiscono che i due fattori di ogni addendo, moltiplicati tra loro, diano di nuovo, tutti gli addendi ≥ 0, e quindi i ragionamenti che seguono valgono in generale.

Si fa notare che le implicazioni sono valide solo nel verso $\Rightarrow$ dato!

Le implicazioni possono essere estese a coppie primale-duale in qualsiasi forma. Ad esempio, se il primale è in forma standard, le condizioni 3) e 4) non sono da considerarsi, perch già contenute nell'ammissibilità primale.

5 Simplesso e dualità

Consideriamo la dimostrazione (parziale) vista per il teorema di dualità forte. Abbiamo visto che, data una soluzione ammissibile di base e i relativi moltiplicatori del simplesso $u^T = c_B^T B^{-1}$ la condizione "costo ridotto di una variabile rispetto alla base non negativo" equivale a dire "il corrispondente vincolo duale è rispettato dalla soluzione duale ottenuta dai moltiplicatori". La definizione di costo ridotto ricalca infatti la definizione del vincolo duale:

$$\bar{c}_j = c_j - c_B^T B^{-1} A_j \geq 0 \Leftrightarrow c_j - u^T A_j \leq 0 \Leftrightarrow u^T A_j \leq c_j$$

Inoltre si può vedere che gli stessi moltiplicatori, visti come soluzione del problema duale, sono sempre, per costruzione, in scarti complementari con la soluzione di base ammissibile corrente. Infatti, considerando che il problema in forma standard ha soli vincoli di uguaglianza, la condizione $u^T(Ax - b) = 0$ deriva dall'ammissibilità della soluzione primale. Per la condizione $(c^T - u^T A)x = 0$, considerando che $x_B = B^{-1}b$ e $x_F = 0$ nella soluzione di base, si ha:

$$(c^T - u^T A)x = ([c_B^T | c_F^T] - u^T[B|F])[x_B|x_F] = c_B^T x_B + c_F^T x_F - c_B^T B^{-1} B x_B - c_B^T B^{-1} F x_F =$$
$$= c_B^T x_B + 0 - c_B^T x_B - 0 = 0.$$

In altre parole, $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_F \end{bmatrix}$ e $u = c_B^T B^{-1}$ sono una coppia di soluzioni primale-duale in scarti complementari e questo vale *ad ogni iterazione del simplesso*. Possiamo quindi interpretare il simplesso in due modi:

- come un metodo che, ad ogni passo, determina una soluzione primale ammissibile e cerca iterativamente di farla diventare ottima;
- come un metodo che, ad ogni passo, determina una soluzione duale (i moltiplicatori) in scarti complementari con una soluzione ammissibile primale e cerca iterativamente di renderla ammissibile duale.

In ogni caso, *alla fine* del simplesso avremo in mano una soluzione primale ammissibile x e una soluzione duale ammissibile tra loro in scarti complementari (e quindi ottime primale e duale rispettivamente). Nel corso del simplesso avremo invece sempre una coppia di soluzioni primale-duale che sono in scarti complementari, ma con la sola soluzione primale ammissibile, e quindi non è applicabile il teorema degli scarti complementari se non alla fine del simplesso, quando tutti i costi ridotti sono non negativi (che e equivale a dire che i moltiplicatori sono una soluzione duale ammissibile).

6 Esercizi

Esercizio 2 *Verificare se la soluzione $x_1 = 8$, $x_2 = 3$ è ottima per il problema:*

$$
\begin{array}{lll}
max & z = & 4x_1 + 2x_2 \\
s.t. & & 2x_1 \leq 16 \\
 & & 2x_1 + 3x_2 \leq 27 \\
 & & x_2 \leq 5 \\
 & & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Suggerimento: scrivere il duale e le relative condizioni di complementarietà. Utilizzare tali condizioni per ricavare dei valori delle variabili duali, una volta fissate le variabili primali ai valori suggeriti. Se i valori ricavati per le variabili primali sono ammissibili per il problema duale, allora la soluzione primale suggerita è ottima: siamo infatti in presenza di soluzioni primale e duale ammissibili (per verifica) e in scarti complementari (per costruzione), quindi ottime.

Risultato: la soluzione proposta è ottima.

Esercizio 3 *Per soddisfare la richiesta di acciai speciali, un'azienda di produzione ha bisogno di 11 quintali di cromo, 2 di molibdeno e 1 di manganese. Il mercato offre confezioni di due tipi. la prima contiene 3 chilogrammi di cromo e 1 di manganese e costa 200 euro, la seconda contiene 1 chilogrammo di cromo e 1 di molibdeno e costa 300 euro. Attualmente, l'azienda acquista 300 confezioni di tipo 1 e 200 confezioni di tipo 2. Si vuole:*

1. *verificare che l'azienda implementi una politica di approvvigionamento ottima;*
2. *valutare se la politica deve essere cambiata in seguito alla disponibilità sul mercato di un terzo e di un quarto tipo di confezioni. Il terzo contiene 2 chilogrammi di cromo e 1 di manganese e costa 200 euro. Il quarto contiene 2 chilogrammi di cromo e 1 di molibdeno e costa 400 euro.*
3. *valutare se la politica deve essere cambiata in seguito alla disponibilità sul mercato di un quinto tipo di confezioni, contenente 2 chilogrammi di cromo 2 di molibdeno e 2 di manganese, al costo di 550 euro.*

Nota: all'azienda interessa conoscere come si compone la politica ottima di approvvigionamento solo in modo approssimativo ed espresso in centinaia di confezioni. Per questo motivo il modello può essere espresso tramite variabili continue e può essere applicata la teoria della dualità in programmazione lineare.

Traccia di soluzione: scriviamo innanzitutto il modello del problema. Le variabili sono x_i: numero di centinaia di confezioni di tipo $i = 1..2$ da acquistare. Visto che interessa una soluzione approssimata, possiamo considerare continue tali variabili, invece che intere, come suggerirebbe la loro natura.

$$
\begin{array}{lll}
min & z = & 2x_1 + 3x_2 \\
s.t. & & 3x_1 + x_2 \geq 11(u_1) \\
 & & x_2 \geq 2(u_2) \\
 & & x_1 \geq 1(u_3) \\
 & & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Risolvere il punto 1 significa semplicemente verificare l'ottimalità della soluzione $x_1 = 3$, $x_2 = 2$. Il risultato è positivo: la politica è ottima.

Per risolvere il punto 2 si consideri che le nuove opportunità si traducono, dal punto di vista primale, in due nuove variabili. Dal punto di vista duale, si hanno due nuovi vincoli ($2u_1 + u_3 \leq 2$ e $2u_1 + u_2 \leq 4$). Si fa notare che, vista l'aggiunta di ulteriori vincoli al problema duale, la soluzione ottima del problema duale stesso non può migliorare, ma rimanere la stessa (se non viola i nuovi vincoli) o peggiorare (se la vecchia soluzione ottima viola i vincoli). Quindi, con l'aggiunta dei due nuovi vincoli duali, si possono verificare due casi:

a) i vincoli sono verificati dalle variabili duali ottime ottenute al punto 1. Allora la soluzione ottima duale non cambia e, per la dualità forte, neanche la soluzione ottima del primale, cioè l'aggiunta di due nuove alternative non inficia l'ottimalità della politica attualmente adottata dall'azienda (raggiungo il valore ottimo della funzione obiettivo anche se il valore delle nuove variabili resta a 0)[2].

b) i vincoli non sono verificati dalle variabili duali ottime ottenute al punto 1. Quindi la soluzione ottima del duale cambia e, in particolare, avendo aggiunto ulteriori

[2] Come esercizio, vediamo una dimostrazione alternativa del fatto che la soddisfazione dei nuovi vincoli duali con i valori u determinati al punto precedente implichi l'ottimalità della vecchia soluzione primale. Osserviamo che:

- la soluzione primale $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = x_4 = 0$ è ammissibile anche per il problema esteso alle nuove variabili (il contributo delle nuove variabili è nullo);
- il numero di variabili duali non cambia (sempre 3 vincoli primali) e la stessa soluzione duale u ottenuta al passo precente è in scarti complentari anche con la nuova soluzione $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = x_4 = 0$. Infatti $x_3(\text{corrispondente vincolo duale}) = 0$ e $x_4(\text{corrispondente vincolo duale}) = 0$; inoltre, $u_i(\text{corrispondente nuovo vincolo primale}) = 0 \Leftrightarrow u_i(\text{corrispondente vecchio vincolo primale}) = 0$, $i = 1, 2, 3$, essendo il contributo delle nuove variabili primali x_3 e x_4 pari a 0.

Pertanto se i vincoli duali sono soddisfatti, siamo in presenza di una soluzione primale ammissile e di una soluzione duale ammissibile in scarti complementari, quindi soluzioni ottime.

vincoli, peggiora, cioè diminuisce (funzione obiettivo duale di max). Sempre per la dualità forte, il valore della funzione obiettivo del primale corrispondente (quello con due nuove variabili) sarà uguale al nuovo valore ottimo del duale, quindi più basso di prima. Ne risulta che la politica attuale potrebbe essere migliorata sfruttando le nuove confezioni offerte dal mercato[3].

Risultato: caso a).

La soluzione del punto 3 è simile al punto 2, con il risultato che la politica attualmente adottata non è ottimale e dovrebbe essere cambiata.

Esercizio 4 *Dato il problema*

$$\begin{array}{rrl} max & z = & x_1 - x_2 \\ s.t. & & x_2 \leq 1 \\ & & 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ & & -x_1 - 3x_2 \leq 10 \\ & & -x_1 - x_2 \leq 2 \\ & & x_1 \geq 0, x_2 \ \textit{libera} \end{array}$$

Verificare se le soluzioni $x^a = [2, -4]$ *o* $x^b = [5, -5]$ *sono ottime.*

Attenzione: il secondo vincolo duale sarà di uguaglianza (x_2 libera). Non potrà quindi essere sfruttato per scrivere una condizione di ortogonalità, ma può essere direttamente sfruttato come equazione nel sistema che cerca delle variabili duali ammissibili e in scarti complementari. Risultato: x^a non è ottima. x^b è ottima.

[3] Come dimostrazione alternativa, con riferimento alla nota 2, saremmo in presenza di soluzione ammissibile primale in scarti complementari con una soluzione duale non ammissibile, cioè le due soluzioni non sono ottime per i rispettivi problemi.