Metodi e Modelli per l'Ottimizzazione Combinatoria

Esercitazione di laboratorio - Parte I

L. Brentegani, L. De Giovanni, M. Di Summa

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione combinatoria e il modello di programmazione lineare intera proposto. Si implementi il modello con Cplex e lo si testi su delle istanze di prova, in modo da capire fino a che dimensioni il problema può essere risolto in modo esatto in tempi ragionevoli (fino a 0.1 secondi, fino a 1 secondo, 10 secondi etc.).

1 Descrizione del problema

Un'azienda metalmeccanica produce pannelli forati per la costruzione di quadri elettrici. Per la foratura si serve di un macchinario a controllo numerico dotato di una punta diamantata che, muovendosi sul pannello secondo una sequenza programmata, produce i fori nelle posizioni desiderate. L'obiettivo dell'azienda è quello di individuare la sequenza di foratura ottimale che minimizzi i tempi di produzione, tenendo conto che il tempo necessario per la foratura è lo stesso e costante per tutti i punti.

2 Modello del problema

Il problema può essere rappresentato tramite un grafo pesato completo $G = (N, A)$ in cui N è l'insieme dei nodi che corrispondono alle posizioni dei fori desiderati, A è l'insieme degli archi (i, j), $\forall\ i, j \in N$, che corrispondono al tragitto che la punta del macchinario percorre per spostarsi dalla posizione i alla posizione j, e, a ciascun arco $(i, j) \in A$, è associato il peso c_{ij} che indica il tempo impiegato dalla punta diamantata per effettuare lo spostamento corrispondente. L'obiettivo è quello di trovare il cammino di costo minore visitando tutti i nodi del grafo una sola volta. Inoltre, poiché la punta, una volta effettuato l'ultimo foro, deve tornare alla posizione di partenza per iniziare la foratura del pannello successivo, il cammino cercato, dopo aver visitato tutti i nodi, dovrà ritornare al nodo di partenza. Si tratta quindi di un problema del commesso viaggiatore (Travelling Salesman Problem – TSP) sul grafo pesato G.

2.1 Modello su rete di flusso

A partire dal grafo $G = (N, A)$, il problema può essere formulato come un problema di ottimizzazione su reti di flusso. Si sceglie (arbitrariamente) un nodo $0 \in N$ come nodo di partenza e si fissa a $|N|$ il flusso uscente da tale nodo. L'idea è quella di spingere il flusso verso gli altri nodi in modo che:

- ciascun nodo (eccetto il nodo 0) riceva una e una sola unità di flusso;
- ogni nodo sia visitato una e una sola volta;
- il costo del cammino, in termini di pesi c_{ij}, sia minimo.

2.2 Modello di PLI

Il problema può essere formalizzato con il seguente modello di programmazione lineare intera.

INSIEMI:

- N = insieme dei nodi del grafo che rappresentano le posizioni dei fori desiderati;
- A = insieme degli archi (i, j), $\forall\ i, j \in N$, che rappresentano il tragitto percorso dalla punta diamantata per spostarsi della posizione i alla posizione j.

PARAMETRI:

- c_{ij} = tempo impiegato dalla punta diamantata per spostarsi dalla posizione i alla posizione j, $\forall\ (i, j) \in A$;
- 0 = nodo di partenza del cammino, $0 \in N$.

VARIABILI DECISIONALI:

- x_{ij}= numero di unità di flusso trasportate dal nodo i al nodo j, $\forall\ (i, j) \in A$;
- y_{ij}= 1 se l'arco (i, j) viene utilizzato, 0 altrimenti, $\forall\ (i, j) \in A$.

MODELLO:

$$
\begin{array}{llll}
\min & \displaystyle\sum_{i,j:(i,j)\in A} c_{ij} y_{ij} & & \\
s.t. & \displaystyle\sum_{j:(0,j)\in A} x_{0j} & = |N| & \\
 & \displaystyle\sum_{i:(i,k)\in A} x_{ik} - \sum_{j:(k,j)\in A} x_{kj} & = 1 & \forall\ k \in N \setminus \{0\} \\
 & \displaystyle\sum_{j:(i,j)\in A} y_{ij} & = 1 & \forall\ i \in N \\
 & \displaystyle\sum_{i:(i,j)\in A} y_{ij} & = 1 & \forall\ j \in N \\
 & x_{ij} & \leq |N|\ y_{ij} & \forall\ (i,j) \in A \\
 & x_{ij} \in \mathbb{Z}_+ & & \forall\ (i,j) \in A \\
 & y_{ij} \in \{0,1\} & & \forall\ (i,j) \in A
\end{array}
$$