Metodi e Modelli per l'Ottimizzazione Combinatoria

Problema dell'assegnamento e matrici totalmente unimodulari

L. De Giovanni M. Di Summa G. Zambelli

1 Problema dell'assegnamento

Sia dato un grafo non orientato bipartito $G = (V, E)$, dove V denota l'insieme dei nodi di G e E l'insieme degli spigoli. Ricordiamo che "bipartito" significa che V può essere partizionato in due sottoinsiemi disgiunti V_1, V_2 tali che, per ogni spigolo $uv \in E$, esattamente uno tra u e v è in V_1 (e l'altro in V_2).

Nel problema dell'assegnamento abbiamo $|V_1| = |V_2|$ e costi c_{uv} su ogni spigolo $uv \in E$, e vogliamo assegnare ad ogni nodo u in V_1 esattamente un nodo adiacente v in V_2, in modo che ogni nodo in V_2 sia assegnato esattamente ad un nodo in V_1 e che la somma dei costi sugli spigoli selezionati sia la più piccola possibile.

Dunque avremo una variabile binaria x_{uv} per ogni $u \in V_1$ e $v \in V_2$ tali che $uv \in E$, dove

$$x_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{se } u \text{ è assegnato a } v, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Il costo totale di un assegnamento determinato da x è dunque

$$\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}.$$

Il fatto che ad ogni nodo u in V_1 sia assegnato esattamente un nodo adiacente $v \in V_2$ è espresso dai vincoli

$$\sum_{v \in V_2 : uv \in E} x_{uv} = 1, \quad u \in V_1,$$

mentre il fatto che ogni nodo $v \in V_2$ sia assegnato esattamente ad un nodo adiacente $u \in V_1$ è espresso dai vincoli

$$\sum_{u \in V_1 : uv \in E} x_{uv} = 1, \quad v \in V_2.$$

Il problema dell'assegnamento può dunque essere scritto come il problema di programmazione lineare intera

$$
\begin{array}{rcll}
\min \sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv} & & & \\
\sum_{v \in V_2 : uv \in E} x_{uv} & = & 1, & u \in V_1, \\
\sum_{u \in V_1 : uv \in E} x_{uv} & = & 1, & v \in V_2, \\
x_{uv} & \geq & 0, & uv \in E, \\
x_{uv} & \in & \mathbb{Z}, & uv \in E.
\end{array}
\tag{1}
$$

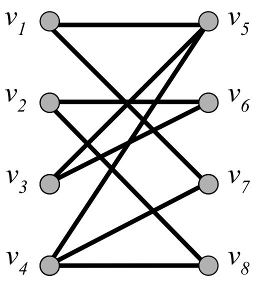
Si noti che non è necessario includere i vincoli $x_{uv} \leq 1$ per ogni $uv \in E$, in quanto sono implicati dai vincoli del sistema.

Vogliamo esprimere il problema precedente in termini di matrici.

Definizione 1 *Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$ (non necessariamente bipartito), la* matrice di incidenza di G *è la matrice $A(G)$ con $|V|$ righe, $|E|$ colonne e tutte le componenti in $\{0, 1\}$, dove l'elemento $a_{v,e}$ nella riga di $A(G)$ corrispondente al nodo $v \in V$ e nella colonna di $A(G)$ corrispondente allo spigolo $e \in E$ vale*

$$
a_{v,e} = \begin{cases} 1 & \textit{se } v \textit{ è un'estremità di } e, \\ 0 & \textit{altrimenti.} \end{cases}
$$

Si noti che ogni colonna di $A(G)$ ha esattamente due componenti di valore 1 e tutte le altre 0. Inoltre, se G è bipartito, allora ogni colonna di $A(G)$ ha esattamente una componente di valore 1 nelle righe di $A(G)$ corrispondenti ai nodi in V_1, e una componente di valore 1 nelle righe di $A(G)$ corrispondenti ai nodi in V_2. La figura seguente mostra l'esempio di un grafo bipartito e della sua matrice di incidenza.



	v_1v_5	v_1v_7	v_2v_6	v_2v_8	v_3v_5	v_3v_6	v_4v_5	v_4v_7	v_4v_8
v_1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
v_2	0	0	1	1	0	0	0	0	0
v_3	0	0	0	0	1	1	0	0	0
v_4	0	0	0	0	0	0	1	1	1
v_5	1	0	0	0	1	0	1	0	0
v_6	0	0	1	0	0	1	0	0	0
v_7	0	1	0	0	0	0	0	1	0
v_8	0	0	0	1	0	0	0	0	1

È facile verificare che il problema dell'assegnamento può essere scritto nella forma

$$
\begin{array}{c}
\min c^T x \\
A(G)\, x = \mathbf{1} \\
x \geq 0 \\
x \in \mathbb{Z}^{|E|},
\end{array}
$$

dove con $\mathbf{1}$ denotiamo il vettore con tutte le componenti uguali ad 1.

In quanto segue, osserveremo che nel precedente problema i vincoli di interezza possono essere rimossi, in quanto la formulazione data è ideale. In altri termini, dimostreremo che le soluzioni di base del sistema $A(G)\ x = \mathbf{1}$, $x \geq 0$, sono tutte intere. Questo seguirà da una proprietà fondamentale della matrici di incidenza dei grafi bipartiti: la totale unimodularità.

2 Matrici Totalmente Unimodulari

Diremo che un vettore (o matrice) è *intero* se tutte le sue componenti sono intere.

Definizione 2 *Una matrice A si dice* totalmente unimodulare *se, per ogni sottomatrice quadrata B di A, si ha* $\det(B) \in \{0, +1, -1\}$.

Si noti che, poiché ogni componente di A è una sottomatrice quadrata 1×1, allora ogni matrice totalmente unimodulare ha componenti con valore 0, $+1$ o -1.

Ricordiamo il seguente fatto di algebra lineare. Data una matrice quadrata $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$, e dati indici $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, denotiamo con B^{ji} la matrice ottenuta da B rimuovendo la j-esima riga e la i-esima colonna. Se B è invertibile (cioè $\det(B) \neq 0$), allora la componente (i, j) della matrice inversa di B è

$$(B^{-1})_{i,j} = (-1)^{i+j} \frac{\det(B^{ji})}{\det(B)}.$$

Ciò implica che, se B è intera, allora tutte le componenti di B^{-1} sono numeri interi divisi per il determinante di B. Dunque, se B è intera e $\det(B) = \pm 1$, allora B^{-1} è una matrice intera. In particolar modo, se A è una matrice totalmente unimodulare, allora, per ogni sottomatrice quadrata invertibile B di A, la matrice B^{-1} è intera. Inoltre, se A è totalmente unimodulare, si ha $\det(B^{ij}) \in \{0, +1, -1\}$, pertanto B^{-1} è una matrice con componenti in $\{0, +1, -1\}$.

Teorema 1 *Siano $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matrice totalmente unimodulare e $b \in \mathbb{R}^m$ un vettore intero. Allora tutte le soluzioni di base del sistema*

$$\begin{array}{c} Ax = b \\ x \geq 0 \end{array}$$

sono intere.

Dimostrazione: Data una base B di A, la soluzione di base $\bar{x}$ di $Ax = b$, $x \geq 0$ associata a B è

$$\begin{aligned} \bar{x}_B &= B^{-1}b, \\ \bar{x}_F &= 0. \end{aligned}$$

Poiché A è totalmente unimodulare, dalla precedente discussione B^{-1} è una matrice intera. Siccome stiamo assumendo che b sia un vettore intero, allora $B^{-1}b$ è un vettore intero, e dunque $\bar{x}$ è un vettore intero. $\square$

Teorema 2 *Sia A una matrice con tutte le componenti in $\{0, +1\}$ tale che ogni colonna di A abbia al più due componenti di valore 1. Se le righe di A possono essere partizionate in due insiemi V_1 e V_2 tali che ogni colonna di A abbia al più una componente uguale ad 1 nelle righe di V_1 ed al più una componente uguale ad 1 nelle righe di V_2, allora A è totalmente unimodulare.*

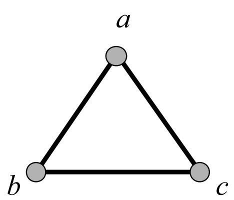
Dimostrazione: Sia B una sottomatrice quadrata di A di ordine k. Dimostriamo, per induzione su k, che $\det(B) \in \{0, +1, -1\}$. Se $k = 1$, allora per ipotesi B ha un'unica componente di valore 0 o 1, e dunque $\det(B) \in \{0, 1\}$. Supponiamo dunque $k \geq 2$ e che ogni sottomatrice quadrata di A di ordine $k - 1$ abbia determinante 0, $+1$ o -1. Si noti che ogni colonna di B ha al più due componenti di valore 1. Consideriamo tre casi.
a) B ha almeno una colonna di tutti zeri. In tal caso $\det(B) = 0$.
b) B ha almeno una colonna con esattamente una componente uguale ad 1. Supponiamo che la j-esima colonna di B abbia un'unica componente di valore 1, diciamo la componente i-esima, e tutte le altre di valore 0. Per la nota regola di Laplace per calcolare i determinanti, se B' è la sottomatrice di B ottenuta rimuovendo la riga i-esima e la colonna j-esima, abbiamo $\det(B) = (-1)^{i+j} \det(B')$. Per induzione, $\det(B') \in \{0, +1, -1\}$, e dunque $\det(B) = (-1)^{i+j} \det(B') \in \{0, +1, -1\}$.
c) Tutte le colonne di B hanno esattamente due componenti uguali ad 1. In tal caso, per le ipotesi del teorema, ogni colonna di A ha una componente di valore 1 nelle righe di V_1 ed una componente di valore 1 nelle righe di V_2. Dunque la somma di tutte le righe di B in V_1 meno la somma di tutte le righe di B in V_2 dà il vettore nullo. Pertanto, in tal caso le righe di B sono linearmente dipendenti, e dunque $\det(B) = 0$. □

Corollario 1 *La matrice di incidenza di un grafo bipartito è totalmente unimodulare.*

Dimostrazione: Sia $G = (V, E)$ un grafo bipartito e V_1, V_2 sia la bipartizione dei nodi di G tale che ogni spigolo ha un estremo in V_1 e l'altro in V_2. Allora ogni colonna di $A(G)$ ha una componente uguale ad 1 nelle righe corrispondenti ad elementi di V_1 ed una componente uguale ad 1 nelle righe corrispondenti ad elementi di V_2. Dunque $A(G)$ è totalmente unimodulare per il Teorema 2. □

Dunque il Teorema 1 ed il Corollario 1 implicano che tutte le soluzioni di base di (1) sono intere.

Si noti che l'ipotesi nel Corollario 1 che il grafo sia bipartito è fondamentale. Ad esempio, si consideri il grafo



$$\begin{array}{c|ccc|} & ab & ac & bc \\ \cline{2-4} a & 1 & 1 & 0 \\ b & 1 & 0 & 1 \\ c & 0 & 1 & 1 \\ \cline{2-4} \end{array}$$

Si noti che la matrice precedente ha determinante -2 e dunque non è totalmente unimodulare.

Ci sono varie operazioni che mantengono la totale unimodularità. Ad esempio, se A è una matrice $m \times n$ totalmente unimodulare, allora

1. Ogni matrice ottenuta da A permutando righe e colonne è totalmente unimodulare,
2. Ogni matrice ottenuta da A moltiplicando alcune righe e/o colonne per -1 è totalmente unimodulare,
3. A^T è totalmente unimodulare,
4. La matrice (A, I) è totalmente unimodulare (dove I è la matrice identità $m \times m$),
5. La matrice $\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix}$ è totalmente unimodulare (dove I è la matrice identità $n \times n$).

I fatti 1,2 sono immediati, poiché se B è una matrice quadrata e B' è ottenuta da B permutando righe e colonne o moltiplicandole per -1, allora $\det(B') = \pm\det(B)$. Il punto 3 discende dal fatto che $\det(B) = \det(B^T)$. Il punto 5 discende da 3 e 4. Per dimostrare il punto 4, si consideri una sottomatrice quadrata B di (A, I). A meno di permutazioni di righe, possiamo scrivere B come

$$\left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline D & I \end{array}\right)$$

dove C e D sono sottomatrici di A. Dunque, per note regole del calcolo dei determinanti, $\det(B) = \det(C)$, e dunque $\det(B) \in \{0, +1, -1\}$ poiché C è una sottomatrice di A ed A è totalmente unimodulare.

I fatti precedenti ed il Teorema 1 implicano il seguente:

Teorema 3 *Siano $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ una matrice totalmente unimodulare e $b \in \mathbb{R}^m$ un vettore intero. Allora tutte le soluzioni di base del sistema*

$$\begin{aligned} Ax &\le b \\ x &\ge 0 \end{aligned}$$

sono intere.

Dimostrazione: Un punto $\bar{x}$ è di base per il sistema nell'enunciato se il punto $(\bar{x}, \bar{s})$, dove $\bar{s} = b - A\bar{x}$, è di base per il sistema in forma standard

$$\begin{gathered} Ax + Is = b \\ x \ge 0,\ s \ge 0. \end{gathered}$$

Poiché, per il punto 4, la matrice dei vincoli di uguaglianza è totalmente unimodulare, allora $(\bar{x}, \bar{s})$ è intera, e dunque, per il Teorema 1, $\bar{x}$ è un vettore intero. $\square$

Problema dei trasporti Sia dato un grafo non orientato bipartito $G = (V, E)$, e sia V_1, V_2 una partizione di V tale che ogni spigolo di G abbia un estremo in V_1 e l'altro in V_2. Per ogni nodo $u \in V_1$, sia $d_u \in \mathbb{Z}$ la quantità che può essere inviata da u ai nodi in V_2, e per ogni nodo $v \in V_2$ sia $r_v \in \mathbb{Z}$ la quantità richiesta al nodo v. Per ogni spigolo $uv \in E$ (con $u \in V_1$ e $v \in V_2$), sia c_{uv} il costo unitario di trasporto da u a v. Vogliamo spedire dai nodi di V_1 ai nodi di V_2 lungo gli spigoli di G a costo minimo, in modo da soddisfare le domande dei nodi in V_2, e in modo che la quantità totale spedita da ogni nodo $u \in V_2$ non ecceda d_u. Questo è il *problema dei trasporti*, che può essere formulato come

$$\begin{aligned} \min \sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv} & & & \\ \sum_{v \in V_2 : uv \in E} x_{uv} & \leq & d_u, & \quad u \in V_1, \\ \sum_{u \in V_1 : uv \in E} x_{uv} & \geq & r_v, & \quad v \in V_2, \\ x_{uv} & \geq & 0, & \quad uv \in E, \\ x_{uv} & \in & \mathbb{Z}, & \quad uv \in E. \end{aligned} \tag{2}$$

dove x_{uv} rappresenta il numero di unità spedite da $u \in V_1$ a $v \in V_2$.

Per i Teoremi 2 e 3, tutte le soluzioni di base del sistema precedente sono intere, e dunque il rilassamento lineare del problema ha una soluzione ottima intera.

Matrici di incidenza di grafi orientati Dato un grafo orientato $D = (V, A)$, la *matrice di incidenza di* D è la matrice $A(D)$ con componenti in $\{0, +1, -1\}$ con $|V|$ righe e $|A|$ colonne, dove, per ogni arco $e = (v, w)$ l'elemento $a_{u,e}$ nella riga di $A(D)$ corrispondente al nodo u e nella colonna di $A(D)$ corrispondente all'arco e vale

$$a_{u,e} = \begin{cases} -1 & \text{se } u = v, \\ 1 & \text{se } u = w, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Teorema 4 *La matrice di incidenza di un grafo orientato è totalmente unimodulare.*

La dimostrazione del Teorema 4 è praticamente identica a quella del Teorema 2: l'unica differenza è che, se B è una sottomatrice quadrata di $A(D)$ in cui ogni colonna di B ha esattamente due componenti non-nulle, allora la somma di tutte le righe di B dà il vettore nullo, pertanto in tal caso le righe di B sono linearmente dipendenti, e dunque $\det(B) = 0$.

Problema del flusso massimo Come applicazione di quanto appena visto, consideriamo il problema del flusso massimo. È dato un grafo orientato $D = (V, A)$ con capacità c_{uv} per ogni arco $(u, v) \in A$. Inoltre sono fissati due nodi $s, t \in V$, detti sorgente e pozzo rispettivamente. Un flusso ammissibile da s a t è un vettore $x \in \mathbb{R}^{|A|}$ tale che:

(a) $0 \leq x_{uv} \leq c_{uv}$ per ogni $(u, v) \in A$ (cioè il flusso non eccede le capacità degli archi);

(b) per ogni nodo $u \in V \setminus \{s,t\}$,

$$\sum_{v\in V:(v,u)\in A} x_{vu} - \sum_{v\in V:(u,v)\in A} x_{uv} = 0$$

(cioè in ogni nodo il flusso entrante e quello uscente coincidono).

Il valore del flusso, che indichiamo con ϕ, è dato dalla quantità di flusso uscente dal nodo s, cioè

$$\phi = \sum_{v\in V:(s,v)\in A} x_{sv}$$

(si dimostra che tale valore coincide anche con la quantità di flusso entrante in t). Il problema del flusso massimo consiste nel determinare un flusso di valore massimo da s a t. Il seguente programma lineare descrive il problema del flusso massimo:

$$\max \phi \tag{3}$$
$$\sum_{v\in V:(v,u)\in A} x_{vu} - \sum_{v\in V:(u,v)\in A} x_{uv} = 0, \quad u \in V \setminus \{s,t\}, \tag{4}$$
$$-\sum_{v\in V:(s,v)\in A} x_{sv} + \phi = 0, \tag{5}$$
$$\sum_{v\in V:(v,t)\in A} x_{vt} - \phi = 0, \tag{6}$$
$$x_{uv} \le c_{uv}, \quad (u,v) \in A, \tag{7}$$
$$x_{uv} \ge 0, \quad (u,v) \in A. \tag{8}$$

I vincoli (4) assicurano che la condizione (b) sia soddisfatta, i successivi due vincoli definiscono correttamente la funzione obiettivo ϕ (cioè il valore del flusso), mentre i vincoli (7) e (8) impongono la condizione (a).

Se creiamo un grafo orientato D' aggiungendo a D un arco fittizio da t a s (corrispondente alla variabile ϕ), possiamo riscrivere il sistema costituito da (4), (5) e (6) nella forma $A(D')\ x = 0$, dove $A(D')$ è la matrice di incidenza di D ed è dunque totalmente unimodulare per il Teorema 4. L'aggiunta dei vincoli (7) mantiene la totale unimodularità della matrice in base al fatto 5. Ne segue che, nel caso le capacità c_{uv} siano tutte intere, risolvendo il programma lineare col metodo del simplesso si ottiene una flusso massimo intero.[1]

[1] La forma del sistema è in parte quella del Teorema 1 e in parte quella del Teorema 3; procedendo come nella dimostrazione del Teorema 3 si dimostra che anche per questa forma mista le soluzioni di base sono tutte intere.