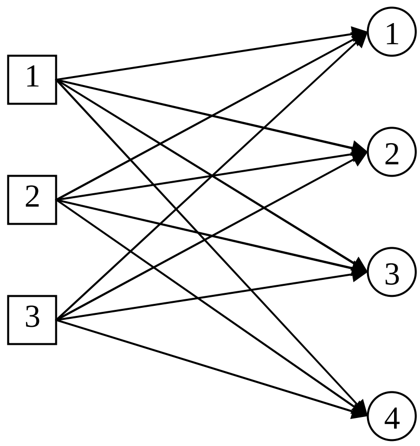
PROBLEMI DI TRASPORTO

OFFERTA	IMPIANTI	UTENTI	DOMANDA
(a_i)	(origini)	(destinazioni)	(b_i)

(150)

(200)

(130)



(180)

(120)

(90)

(90)

c_{ij} COSTO UNITARIO DI TRASPORTO DA i a j

	1	*2*	*3*	*4*	a_i
1	5	2	3	9	150
2	7	1	12	4	200
3	8	15	19	2	130
b_j	180	120	90	90	

TABELLA DEI DATI

IPOTESI :

$\sum a_i = \sum b_j$

PROBLEMA: DETERMINARE LE QUANTITA' DA INVIARE IN MODO DA MINIMIZZARE IL COSTO TOTALE DI TRASPORTO

x_{ij} (>=0) quantità di prodotto che dall'origine *i* raggiunge la destinazione *j*

	1	*2*	*3*	*4*	a_i
1	X_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	150
2	X_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	200
3	X_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	130
b_j	180	120	90	90	

TABELLA DELLE ALLOCAZIONI

PROBLEMI DI TRASPORTO CON DISEGUAGLIANZE

$$\min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$
$$\sum_j x_{ij} = a_i$$
$$\sum_i x_{ij} \le b_j$$
$$x_{ij} \ge 0$$

$$\min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$
$$\sum_j x_{ij} \le a_i$$
$$\sum_i x_{ij} = b_j$$
$$x_{ij} \ge 0$$

OFFERTA TOTALE. ≤ DOMANDA TOTALE.

$$\sum_i a_i \le \sum_j b_j$$

ORIGINE FITTIZIA

$$a_{m+1} = \sum_j b_j - \sum_i a_i$$

VARIABILI DI DIFETTO $x_{m+1,j} \ge 0$

$c_{m+1,j} = +\infty$ (PENALI)

OFFERTA TOTALE. ≥ DOMANDA TOTALE.

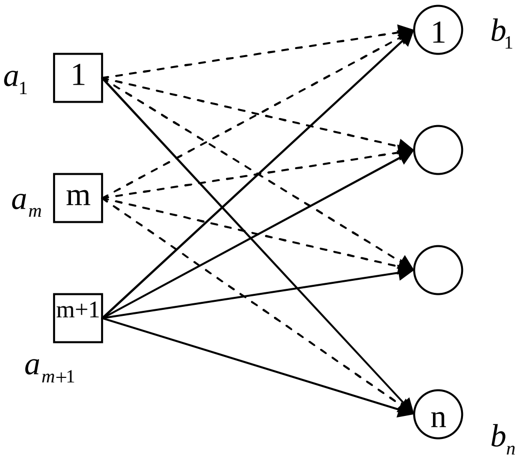
$$\sum_i a_i \ge \sum_j b_j$$

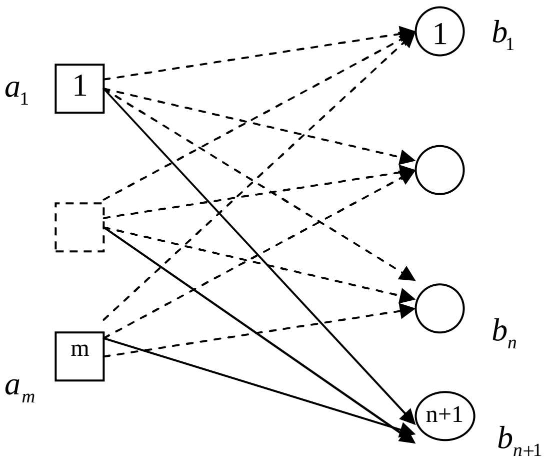
DESTINAZIONE FITTIZIA

$$b_{n+1} = \sum_i a_j - \sum_j b_i$$

VARIABILI DI ECCEDENZA $x_{i,n+1} \ge 0$

$c_{i,n+1} = 0$ (COSTI DI MAGAZZINO)





- L'ORIGINE FITTIZIA SI INTRODUCE CON UNA RIGA FITTIZIA *m+1* **CON COSTI DI PENALITA' NELLA TABELLA DEI DATI**

- LA DESTINZIONE FITTIZIA SI INTRODUCE CON UNA COLONNA FITTIZIA *n+1* **CON COSTI DI MAGAZZINO NELLA TABELLA DEI DATI**

MODELLO MATEMATICO DEL PROBLEMA

$$\min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

m ORIGINI $\quad \sum_j x_{ij} = a_i \qquad i = 1 \ldots m \qquad (a_i \geq 0)$

n DESTINAZIONI $\quad \sum_i x_{ij} = b_j \qquad j = 1 \ldots n \qquad (b_j \geq 0)$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \forall i, \forall j$$

FORMA MATRICIALE

$$\min c^T x \qquad c^T (1 \times mn) \qquad x(mn \times 1)$$

$$Ax = b \qquad A((m+n) \times mn)$$

$$x \geq 0 \qquad b((m+n) \times 1)$$

$$x = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}, \ldots\ldots x_{mn})^T$$

$$c^T = (c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1n}, c_{21}, c_{22}, \ldots, c_{2n}, \ldots\ldots c_{mn})$$

$$b = (a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$$

$$A = \begin{bmatrix} \underline{1} & \underline{0} & . & . & . & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{1} & . & . & . & \underline{0} \\ . & & & & & \\ \underline{0} & \underline{0} & . & . & . & \underline{1} \\ I_n & I_n & . & . & . & I_n \end{bmatrix}$$

- *IL PROBLEMA DEI TRASPORTI AMMETTE SEMPRE UNA SOLUZIONE OTTIMA FINITA (CASO PARTICOLARE DI P.L.)*
- *LA MATRICE* **A** E' <u>TOTALMENTE UNIMODULARE</u> CIOE' IL DETERMINANTE DI OGNI SUA SOTTOMATRICE QUADRATA E' –1, 0, 1.

PROPRIETA' DELLA MATRICE A

LEMMA:NEL PROBLEMA DEI TRASPORTI IL RANGO DI **A** è (n+m-1)

Dim.: Essendo le righe linearmente dipendenti $r(A) \le n+m-1$. Tralasciando l'ultima riga di ***A*** e scegliendo le colonne n, 2n…n+1,…n-1, si ha

$A' = (\underline{a}_{1n}, \underline{a}_{2n}, \ldots\ldots, \underline{a}_{mn}, \underline{a}_{11}, \underline{a}_{12}, \ldots\ldots \underline{a}_{1,n-1})$

$$A' = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & . & . & 0 & 1 & 1 & . & . & 1 \\ 0 & 1 & . & . & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ \hline . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 1 & 1 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 & . & . & 1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{c|c} I_m & F \\ \hline 0 & I_{n-1} \end{array}\right)$$

$$r(A') = r(A) = n + m - 1$$

LEMMA: LA MATRICE **A** E' TOTALMENTE UNIMODULARE

a) In A_k esiste una colonna con elementi tutti nulli per cui $|A_k| = 0$

b) Tutte le colonne di A_k hanno due elementi uguali ad 1 e gli altri tutti nulli. Sommando le righe dei vincoli origine e quelle dei vincoli destinazione si hanno due righe di tutti 1 $\Rightarrow |A_k| = 0$

c) Esiste una o più colonne con un solo elemento uguale ad 1 per cui $|A_k| = \pm 1 |A_{k-1}|$

TEOREMA: Se a_i, $1 \le i \le m$ e b_j, $1 \le i \le n$ sono intere allora le soluzioni di base del PROBLEMA DEI TRASPORTI sono intere

$\underline{x}_G = \underline{0}$ $\qquad\qquad$ $\underline{x}_S = \tilde{A}_S^{-1} \underline{\tilde{b}} = \dfrac{\hat{\tilde{A}}_S^{\,T}}{|\tilde{A}_S|} \underline{\tilde{b}}$

COROLLARIO: il problema dei trasporti può essere risolto con l'algoritmo del simplesso, anche nel caso di variabilli intere.

Soluzione del problema dei trasporti con l'algoritmo del simplesso:

1. Determinazione di una soluzione ammissibile di base di partenza
2. Determinazione dei costi ridotti
3. Cambio base

La struttura particolare della matrice dei coefficienti permette di eseguire queste operazioni in modo efficiente.

METODI PER LA DETERMINAZIONE DELLA SOLUZIONE INIZIALE

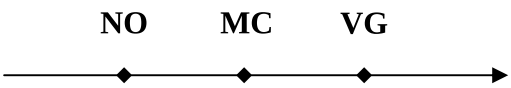
$r(A) = n + m - 1 \Rightarrow m + n - 1$ VARIABILI DI BASE

a) SCELTA DI UNA POSIZIONE (i,j)
b) CANCELLAZIONE DI UNA RIGA i (O DELLA COLONNA j) in seguito a saturazione del relativo vincolo
c) MODIFICA DELLA COLONNA j (O DELLA RIGA i) non saturata

IL PROCEDIMENTO E' RIPETUTO m+n-1 VOLTE

1. **METODO NORD-OVEST**
   LA POSIZIONE (i,j) SCELTA E' QUELLA IN ALTO A SINISTRA NELLA TABELLA CORRENTE
2. **METODO MINIMI COSTI**
   LA POSIZIONE (i,j) SCELTA E' QUELLA (O UNA DI QUELLE) IN CUI IL COSTO E' DI VOLTA IN VOLTA MINIMO PER L'INTERA TABELLA
3. **METODO VOGEL (*maximum regret*)**
   IN CORRISPONDENZA AD OGNI VINCOLO (riga e colonna) SI DETERMINANO I VALORI ASSOLUTI DEGLI SCARTI TRA I DUE COSTI MIGLIORI. SIANO TALI SCARTI $p_i \left(i = 1,2,\ldots m \right)$ e $a_j \left(j = 1,2,\ldots n \right)$. SI SELEZIONA IL VINCOLO (riga o colonna) AVENTE LO SCARTO MASSIMO. LA POSIZIONE (i,j) E' QUELLA RELATIVA AL COSTO MINIMO DELLA RIGA O COLONNA COSI' SELEZIONATA.

valore della funzione obiettivo



Tempi di calcolo

DEGENERAZIONE: SATURAZIONE CONTEMPORANEA DI UNA RIGA ED UNA COLONNA $\Rightarrow$ SOLUZIONE DI "BASE" DEGENERE

<u>DEGENERAZIONE</u> (riga e colonna si saturano contemporaneamente)

	1	2	3	
1	20	30		50
2			40	40
	20	30	40	

N.O.

VI SONO MENO ALLOCAZIONI DI QUELLE PREVISTE (m+n-1).

UN SOTTOINSIEME DELLE DISPONIBILITA' E' UGUALE AD UN SOTTOINSIEME DELLE RICHIESTE

<u>METODO DELLE PERTURBAZIONI</u>

20	30	ε	$50+\varepsilon$
		40	40
20	30	$40+\varepsilon$	

$\varepsilon \to 0$

20	30	**0**	50
		40	40
20	30	40	

20	30		50
	ε	40	$40+\varepsilon$
20	$30+\varepsilon$	40	

$\varepsilon \to 0$

20	30		50
	0	40	40
20	30	40	

LA VARIABILE DI BASE È NULLA.

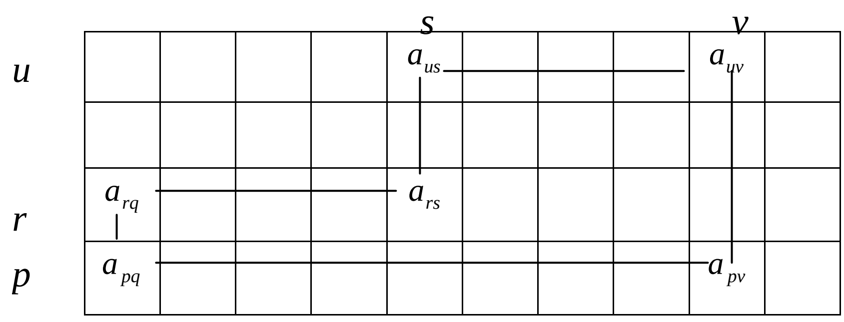
CIÒ AVVIENE QUANDO SI SATURA CONTEMPORANEAMENTE UNA RIGA ED UNA COLONNA

DETERMINAZIONE DI UNA SOLUZIONE AMMISSIBILE INIZIALE

In un problema dei trasporti, si dice che una successione di variabili forma un **ciclo** se nella tabella dei trasporti è possibile congiungerle tutte con una successione di segmenti alternativamente orizzontali e verticali, ognuno dei quali abbia come estremi due di tali variabili, che, partendo da una qualunque di esse ritorni sulla stessa senza passare mai due volte per una variabile

- LE COLONNE DELLA MATRICE **A** CORRISPONDENTI A VARIABILI CHE FORMANO UN CICLO SONO LINEARMENTE DIPENDENTI
- SE UN SOTTOINSIEME DELLE VARIABILI CORRISPONDE A COLONNE DELLA MATRICE **A** LINEARMENTE DIPENDENTI ALLORA TALI VARIABILI FORMANO UN CICLO

COROLLARIO: CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE AFFINCHE' m+n-1 VARIABILI ENTRINO A COSTITUIRE UNA SOLUZIONE DI BASE E' CHE ESSE, O UN LORO SOTTOINSIEME, NON FORMINO UN CICLO



NOTA: I METODI SOPRA MENZIONATI NON INTRODUCONO CICLI (SI CANCELLA LE RIGHE/COLONNE SATURE) E QUINDI PORTANO A SOLUZIONI AMMISSIBILI DI BASE!

CALCOLO DEI COSTI RIDOTTI

In generale, nell'algoritmo del simplesso per un problema con p variabili e q vincoli, i costi ridotti sono ottenuti come

$$\mathbf{r_j = c_j - c_B^T\, B^{-1}\, A_j}$$

Indichiamo con $\lambda \in \Re^q$ il prodotto

$$\boldsymbol{\lambda^T = c_B^T\, B^{-1} \in \Re^{1\times q}}$$

Definiamo λ il vettore dei **moltiplicatori del simplesso.**

NOTA: esiste un moltiplicatore associato ad ogni vincolo del problema.

Il calcolo dei costi ridotti si riduce quindi al calcolo dei moltiplicatori del simplesso.

Nel caso del problema dei trasporti, il calcolo è semplificato dalla struttura della matrice A dei vincoli.

$$\boldsymbol{\lambda^T = [\, u^T , v^T \,]}$$

$u \in \Re^m$: moltiplicatori associati ai vincoli di origine

$v \in \Re^n$: moltiplicatori associati ai vincoli di destinazione

Inoltre, per ogni colonna A_{ij} (colonna associata alla variabile x_{ij}), **ci sono due soli '1': uno per il vincolo di origine i e uno per il vincolo di destinazione j.** Di conseguenza, il costo ridotto r_{ij} associato alla variabile x_{ij} è:

$$\boldsymbol{r_{ij} = c_{ij} - \lambda^T A_{ij} = c_{ij} - [\, u^T , v^T \,]\, A_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j}$$

Dato che, per le (m+n-1) variabili in base, $r_{ij} = 0$ si può scrivere il sistema nelle incognite u_i e v_j

$$\boldsymbol{c_{ij} - u_i - v_j = 0, \ \forall\, x_{ij} \text{ in base}}$$

Il sistema ha m+n incognite e m+n-1 equazioni ed è risolvibile scegliendo a piacere il valore di un moltiplicatore e determinando il valore degli altri per sostituzione (tale possibilità deriva dall'assenza di cicli)

Una volta determinati i valori dei moltiplicatori u e v è possibile determinare i costi ridotti delle variabili fuori base con la formula

$$\mathbf{r_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j = 0, \forall\, x_{ij} \text{ fuori base}}$$

e verificare l'ottimalità della base corrente come condizione

$$\mathbf{r_{ij} \geq 0, \forall\, x_{ij} \text{ fuori base}}$$

CAMBIO BASE

Facendo entrare in base una delle variabili x_{ij} con $r_{ij} < 0$, questa forma necessariamente un ciclo con la base corrente. Per eliminare il ciclo bisogna eliminare una delle variabili attualmente in base. Si fa notare che, per mantenere l'ammissibilità in termini di saturazione di origini e destinazioni, le variabili di ordine dispari nel ciclo (+, tra cui la variabile entrante) devono essere aumentate, mentre le variabili di ordine pari (–) devono essere diminuite di una stessa **quantità ϑ. Per mantenere la non negatività delle variabili, si sceglie ϑ pari al minimo valore delle variabiali attiualmente in base di ordine pari.**

<u>**Esempio**</u> (tra parentesi i costi ridotti per le variabili fuori base)

20	20	(-1)	40
(2)	10	30	40
20	30	30	

	–	+	40
	+	–	40
20	30	30	

ϑ = 20

20	/	20	40
	30	10	40
20	30	30	

Nota: se ϑ = 0, si passa da una soluzione degenere ad un'altra soluzione degenere.

Notazione: si userà indifferentemente r_{ij} o c'_{ij} per indicare il costo ridotto della variabile x_{ij}

ALGORITMO DI OTTIMIZZAZIONE

DETERMINATA LA SOLUZIONE "BASE" INIZIALE E' NOTO L'INSIEME DEGLI INDICI DI BASE $S = \{(i_1, j_1), \ldots\ldots, (i_{m+n-1}, j_{m+n-1})\}$

1. si risolve il sistema $u_{i_h} + v_{j_h} = c_{i_h, j_h}$
2. si calcolano i nuovi valori dei coefficienti c_{ij} in base a

$$c'_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j \qquad i = 1,2,\ldots m \qquad j = 1,2,\ldots n$$

3. si esamini il segno dei coefficienti c'_{ij} $\forall (i,j) \in G$

   3.1. se $c'_{ij} \geq 0$ $\forall (i,j) \in G$ STOP $\underline{x}$ <u>è la soluzione OTTIMA</u>

   3.2. se esiste qualche $\forall (i,j) \in G$ tale che $c'_{ij} < 0$ si sceglie tra questi l'indice *(i,j)* a cui corrisponde $\max|c_{ij}| = c_{hk}$; x_{hk} entra in base

4. si determinino le variabili di base che con x_{hk} formano un ciclo e tra quelle di ordine pari a partire da x_{hk} si determini quella minima, sia x_{lp}; x_{lp} esce dalla base
5. si ponga $x'_{hk} = x_{lp}$ e si determini il nuovo valore delle rimanenti variabili del ciclo $(x_{hk}, x_{hj}, x_{ij}, \ldots\ldots x_{vw}, x_{vk})$

$$\begin{aligned} x'_{hj} &= x_{hj} - x_{hk} \\ x'_{ij} &= x_{ij} + x_{hk} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x'_{lp} &= x_{lp} - x_{hk} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x'_{vw} &= x_{vw} + x_{hk} \\ x'_{vk} &= x_{vk} - x_{hk} \end{aligned}$$

6. si aggiorni l'insieme degli indici di base sostituendo *(l,p)* con *(h,k)* e si torni al passo 1).