
Metodi e Modelli per il Supporto alle Decisioni

15. Branch and Bound per il problema dello zaino 0/1.

Il problema dello zaino binario (Knapsack KP-0/1)

- Sono dati n oggetti e uno zaino di capienza massima W . Ogni oggetto i ha un peso w_i e un'utilità p_i . Determinare gli oggetti da mettere nello zaino senza superare la capacità e massimizzando l'utilità complessiva.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^n p_i x_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^n w_i x_i \leq W \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i = 1..n \end{aligned}$$

Assunzioni:

1. $p_i, w_i, W \geq 0$
2. $w_i \leq W \quad \forall i = 1..n$
3. $\sum_{i=1}^n w_i > W$

- Metodo B&B: bisogna definire le seguenti componenti principali:

- (1) Calcolo del bound (upper bound, UB).
- (2) Regole di Branching.
- (3) Regole di Fathoming.
- (4) Regole di esplorazione dell'albero di ricerca.
- (5) Valutazione di soluzioni ammissibili.
- (6) Criteri di arresto.

B&B per KP-0/1: (1) calcolo del bound

- (1) **Calcolo del bound: rilassamento continuo.** Si dimostra che una soluzione ottima del rilassamento si ottiene con la seguente procedura $O(n \log n)$:

1. ordinare le variabili per $\frac{p_i}{w_i}$ **decrescenti**;
2. caricare gli oggetti nell'ordine fino a determinare la **variabile critica** x_s

$$s = \min_j \left\{ j : \sum_{i=1}^j w_i > W \right\}$$

(s è il primo oggetto, nell'ordine, che supera la capienza dello zaino)

3. determinare la soluzione del rilassamento: $x_i = \begin{cases} 1 & i < s \\ \frac{\bar{W}}{w_i} & i = s \\ 0 & i > s \end{cases}$

dove $\bar{W} = W - \sum_{i=1}^{s-1} w_i$ è la capienza residua dello zaino.

B&B per KP-0/1: scelte implementative

- (2) **Regole di Branching**: branching binario sulla variabile critica x_s .
- (3) **Regole di Fathoming**: standard.
- (4) **Regole di esplorazione**: tra le possibili, *Best Bound First*.
- (5) **Valutazione di soluzioni ammissibili**: è sempre possibile ottenere una soluzione ammissibile con una semplice euristica (porre a 1 tutte le variabili nell'ordine specificato, senza eccedere W):

```
 $\bar{W} = W$ ; forall i:  $x_i := 0$   
for ( i = 1 ; i ≤ n ; i++ ) {  
    if  $w_i \leq \bar{W}$  and  $w_i$  not fixed to 0 {  
         $x_i := 1$   
         $\bar{W} := \bar{W} - w_i$   
    }  
}
```

- (6) **Criterio di arresto**: standard.

Esempi

$$\begin{aligned} \max \quad & 36 x_1 + 15 x_2 + 3 x_3 + 5 x_4 + 11 x_5 + 30 x_6 \\ \text{s.t.} \quad & 12 x_1 + 6 x_2 + 2 x_3 + 3 x_4 + 5 x_5 + 9 x_6 \leq 17 \\ & x_i \in \{0, 1\}, \forall i = 1..6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & 15 x_1 + 20 x_2 + 25 x_3 + 30 x_4 + 35 x_5 + 40 x_6 \\ \text{s.t.} \quad & 5 x_1 + 10 x_2 + 15 x_3 + 20 x_4 + 25 x_5 + 30 x_6 \leq 67 \\ & x_i \in \{0, 1\}, \forall i = 1..6 \end{aligned}$$