Ricerca Operativa

A.A. 2007/2008

17. Esercitazione di laboratorio: Branch and Bound.

.

Esercizio 1: Problema dell'assegnamento

Un'azienda manufatturiera vuole esternalizzare la produzione di alcune parti affidandole a terzisti. Il costo di produzione della parte i presso il terzista j è c_{ij}. Tutte le parti devono essere prodotte e, per rispettare i tempi di consegna del prodotto finito, ad ogni terzista non può essere assegnata più di una parte. L'azienda è interessata a minimizzare il costo complessivo per completare le parti.

- Scrivere il modello matematico per risolvere il problema (carta e penna!).
- Considerare un esempio con 5 parti, 7 terzisti e costi a piacere, e risolverlo con AMPL.
- Cosa succede se si rilassa il vincolo di interezza delle variabili?

Esercizio 2: B&B per PLI

Calcolare su foglio, applicando il metodo del Branch and Bound per PLI, il seguente problema:

$$\begin{array}{lrl} \max & 3\ x_1 + 6\ x_2 + 4\ x_3 + 7\ x_4 + 11\ x_5 & \\ s.t. & -\ 3\ x_1 - 6\ x_2 + 6\ x_3 + 12\ x_4 + 7\ x_5 & \leq 8 \\ & 6\ x_1 + 12\ x_2 - 3\ x_3 - 6\ x_4 + 7\ x_5 & \leq 8 \\ & x_i \in \mathbb{Z}_+,\ \forall\ i = 1..5 & \end{array}$$

- Utilizzare AMPL per calcolare il bound tramite rilassamento continuo (comandi `s.t. px: ...`, `drop px`, `restore px` per aggiungere, eliminare e ripristinare i vincoli di branching).
- Si suggerisce di applicare il branching dicotomico sulla variabile con parte frazionaria più prossima a 0.5 e, a parità, sulla variabile con indice minore.
- Si suggerisce una strategia di esplorazione Best Bound First.

Problema dell'assegnamento: modello

Dati due insiemi I e J e dei costi c_{ij} associati ad ogni coppia $(i,j) : i \in I, j \in J$, determinare come assegnare un elemento di I ad uno (ed un solo) elemento di J con l'obiettivo di minimizzare il costo di assegnamento complessivo.

$x_{i,j}$: variabile binaria che vale 1 se $i \in I$ è associato a $j \in J$, 0 altrimenti.

$$
\left.\begin{array}{ll}
\min & \displaystyle\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} \\
s.t. & \left.\begin{array}{l}
\displaystyle\sum_{j \in J} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in I \\
\displaystyle\sum_{i \in I} x_{ij} \leq 1 \quad \forall j \in J \\
0 \leq x_{ij} \leq 1 \quad \forall i \in I, j \in J
\end{array}\right\} P \\
& x_{ij} \text{ intera} \quad \forall i \in I, j \in J
\end{array}\right\} X
$$

* P è una formulazione valida per X

* P coincide con i vincoli del rilassamento continuo.

Problema dell'assegnamento: proprietà

Si può dimostrare che tutti i vertici di P sono interi: $P = conv(X)$.

La soluzione del rilassamento continuo è sempre intera: il problema, anche se a variabili intere (PLI), può essere risolto (efficientemente) come un problema di programmazione lineare (PL).

Esistono diversi problemi a variabili intere formulabili come modello di PLI (o PLI mista - PLMI) tale che la **matrice dei vincoli** gode di particolari proprietà: se anche i termini noti sono interi, tutte le soluzioni di base del rilassamento continuo sono intere.

Dati i vincoli $Ax \geq b$ con b intero: $x = \begin{bmatrix} x_B \\ 0 \end{bmatrix}$; $x_B = B^{-1}b$: basta che B^{-1} sia intera!

Ciò si verifica, ad esempio, se **A è totalmente unimodulare**: per ogni sottomatrice quadrata M di A, $det(M) = \pm 1$.

Considerazioni sulla complessità:

- PLI $\in \mathcal{NP}-$hard in generale: il B&B, ad esempio, ha complessità esponenziale.
- PL $\in \mathcal{P}$: sebbene il simplesso abbia complessità esponenziale, esistono algoritmi per PL polinomiali (anche se spesso meno efficienti del simplesso nel caso medio).

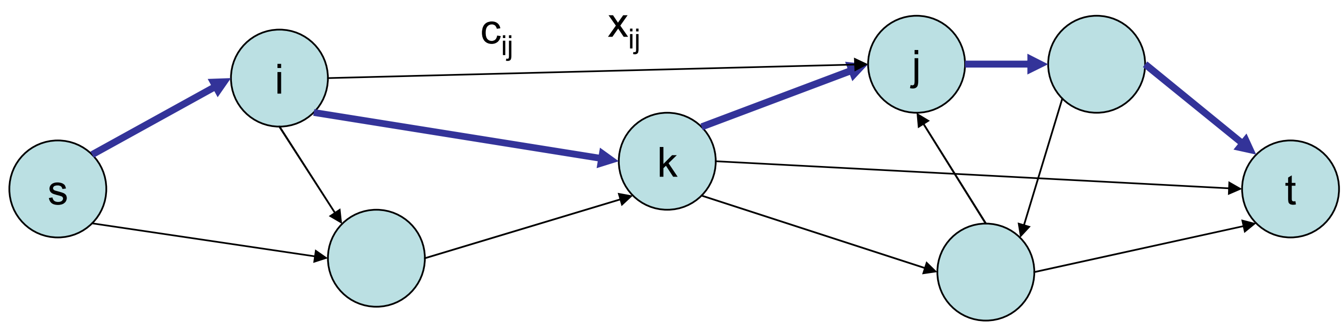
Altri esempi di PLI risolvibili come PL

- **Problema dei trasporti** di beni *indivisibili* da origini S a destinazioni T con capacità delle origini a_i, richieste delle destinazioni b_j e costi di trasporto unitari c_{ij}:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i \in S} \sum_{j \in T} c_{ij} x_{ij} \\
s.t. \quad & \sum_{j \in T} x_{ij} \le a_i \quad \forall i \in S \\
& \sum_{i \in S} x_{ij} \ge b_j \quad \forall j \in T \\
& x_{ij} \in \mathbb{Z}_+ \quad \forall i \in S, j \in T \quad \boxed{\equiv x_{ij} \ge 0, \text{ se } a_i \text{ e } b_j \text{ sono interi}}
\end{aligned}
$$

Altri esempi di PLI risolvibili come PL

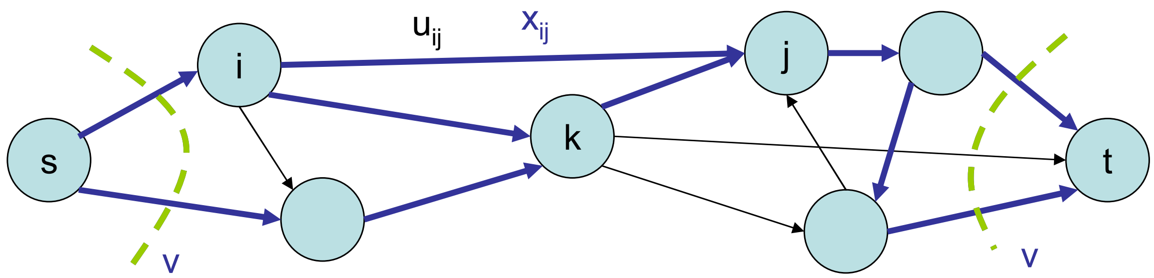
- **Problema del cammino minimo** da una sorgente s a una destinazione t su un grafo $G = (N, A)$ con costi c_{ij} associati agli archi, e senza cicli di costo negativo.



$$
\begin{array}{llll}
\min & \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} & & \\
s.t. & \sum_{j:(s,j)\in A} x_{sj} = 1 & & \text{(vincoli di...} \\
& \sum_{i:(i,t)\in A} x_{it} = 1 & & \text{...bilanciamento del...} \\
& \sum_{i:(i,k)\in A} x_{ik} - \sum_{j:(k,j)\in A} x_{kj} = 0 & \forall k \in N \setminus \{s,t\} & \text{...flusso ai nodi)} \\
& x_{ij} \in \{0,1\} & \forall (i,j) \in A & \boxed{\equiv 0 \le x_{ij} \le 1}
\end{array}
$$

Altri esempi di PLI risolvibili come PL

- **Problema del massimo flusso** di beni indivisibili da un nodo sorgente s ad un nodo pozzo t su un grafo $G = (N, A)$ con capacità u_{ij} degli archi:



$$
\begin{array}{llll}
\max & v & & (v \text{ è la variabile `flusso totale'}) \\
s.t. & \displaystyle\sum_{j:(s,j)\in A} x_{sj} = v & & \text{(vincoli di...} \\
& \displaystyle\sum_{i:(i,t)\in A} x_{it} = v & & \text{...bilanciamento del...} \\
& \displaystyle\sum_{i:(i,k)\in A} x_{ik} - \sum_{j:(k,j)\in A} x_{kj} = 0 & \forall k \in N \setminus \{s, t\} & \text{...flusso ai nodi)} \\
& x_{ij} \leq u_{ij} & \forall (i,j) \in A & \text{(vincoli di capacità degli archi)} \\
& v \geq 0 & & \\
& x_{ij} \in \mathbb{Z}_+ & \forall (i,j) \in A & \boxed{\equiv x_{ij} \geq 0, \text{ se } u_{ij} \text{ sono interi}}
\end{array}
$$

Altri esempi di PLI risolvibili come PL

- **Molti problemi di ottimizzazione su grafo**: flusso di costo minimo, alberi di copertura etc.
- **etc. etc. etc.**
- **NOTA: per molti di questi problemi esistono algoritmi risolutivi ad-hoc, più efficienti degli algoritmi standard per PL.**