ESEMPIO P.L. : PIANIFICAZIONE DI INVESTIMENTI

PROBLEMA: *un'azienda deve scegliere fra due possibili investimenti al fine di massimizzare il profitto netto nel rispetto delle condizioni interne e di mercato*

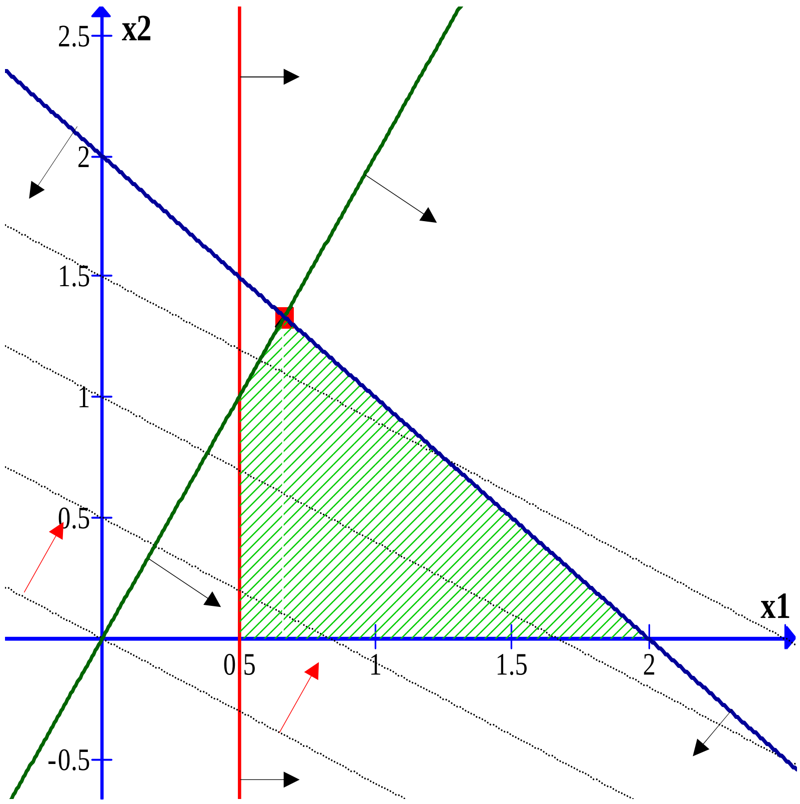
INVESTIMENTO
- Tipo 1 – Ritorno del 15% x_1
- Tipo 2 – Ritorno del 25% x_2

VARIABILI

B quantità massima. che si può investire (budget) $x_1 + x_2 \le B$

Investimento tipo 1 almeno ¼ del budget $x_1 \ge \frac{1}{4}B$

Investimento tipo 2 al massimo il doppio dell'investimento 1 $x_2 \le 2x_1$



$$\max \quad z = 0{,}15\, x_1 + 0{,}25\, x_2$$

$$x_1 + x_2 \le B$$
$$x_1 \ge \frac{1}{4} B$$
$$2x_1 - x_2 \ge 0$$
$$x_1 \ge 0 \qquad x_2 \ge 0$$

Soluzione ottima :

$$z^* = (1/20)B + (1/6)B = (13/60)B$$
$$x_1^* = (1/3)B$$
$$x_2^* = (2/3)B$$

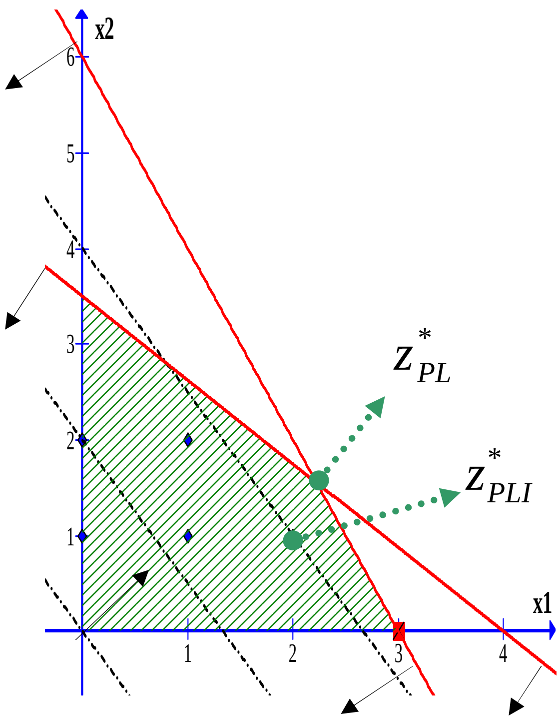
NOTA: La risoluzione geometrica è stata effettuata per B=2.

ESEMPIO P.L.I. : PIANIFICAZIONE DELLA PRODUZIONE

Un produttore di mobili ha a disposizione 6 unità di legno e 28 ore di tempo lavorativo giornaliero per produrre pannelli decorativi del modello I e II.
Il modello I richiede 2 unità di legno e 7 ore di tempo.
Il modello II richiede 1 unità di legno e 8 ore di tempo.
I prezzi di vendita dei modelli I e II sono rispettivamente 120 e 80 euro
$x_1 =$ n° di pannelli del MODELLO I da produrre
$x_2 =$ n° di pannelli del MODELLO II da produrre

x_1	x_2	Risorse
2	1	6
7	8	28
120	80	

PROBLEMA: QUANTI PANNELLI DI CIASCUN MODELLO DEVE PRODURRE GIORNALMENTE PER MASSIMIZZARE IL RICAVO TOTALE?



$$\max z = 120x_1 + 80x_2$$
$$2x_1 + x_2 \leq 6$$
$$7x_1 + 8x_2 \leq 2$$
$$x_i \geq 0 \ \textbf{INTERE}$$

Soluzione ottima INTERA:

$$z^*_{PLI} = 360, x_1^* = 3, x_2^* = 0$$

Soluzione ottima CONTINUA:

$$z^*_{PL} = 391.11, x_1^* = 20/9, x_2^* = 14/9$$

$$z^*_{PLI} \leq z^*_{PL}$$

NOTA : Per un problema di massimo (minimo) il valore dell'ottimo del problema di P.L.I. è minore (maggiore) o uguale del valore all'ottimo del problema di P.L. ottenuto rilassando i vincoli di interezza sulle variabili (*rilassamento lineare*)

CASO PARTICOLARE DI P.L. : PROBLEMA DEI TRASPORTI

Destinazioni / Origini	*DETTAGLIANTE 1*	*DETTAGLIANTE 2*	*DETTAGLIANTE 3*	***OFFERTA***
FABBRICA **1**	14	13	11	1200
FABBRICA **2**	13	13	12	1000
RICHIESTA	1000	700	500	

TABELLA DEI COSTI UNITARI DI TRASPORTO CON LE QUANTITA' PRODOTTE DALLE ORIGINI E LE QUANTITA' RICHIESTE DALLE DESTINAZIONI

PROBLEMA: *TROVARE LA DISTRIBUZIONE "OTTIMA" DALLE ORIGINI ALLE DESTINAZIONI IN MODO DA MINIMIZZARE IL COSTO TOTALE DEL TRASPORTO*

$x_{ij}\ (i=1,2;\ j=1,2,3)$ QUANTITÀ DA SPEDIRE DALLA FABBRICA i AL DETTAGLIANTE j

$$\min z = 14x_{11} + 13x_{12} + 11x_{13} + 13x_{21} + 13x_{22} + 12x_{23}$$

Vincoli di DISPONIBILITÀ

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 1200 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 1000 \end{cases}$$

Vincoli di DOMANDA

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} \ge 1000 \\ x_{12} + x_{22} \ge 700 \\ x_{13} + x_{23} \ge 500 \end{cases}$$

Vincolo di non negatività $x_{ij} \ge 0 \quad \forall i, j$

Vincolo di interezza x_{ij} intero $\forall i, j$

Soluzione ottima : $z^* = 27600$, $x_{12}^* = 700$, $x_{13}^* = 500$, $x_{21}^* = 1000$, $x_{12}^* = x_{22}^* = x_{23}^* = 0$

La soluzione ottima si può ottenere utilizzando un software di ottimizzazione lineare (AMPL, LINDO) o la funzione Risolutore di EXCEL.

CASO PARTICOLARE DI P.L. : PROBLEMA DI ASSEGNAMENTO

TABELLA DEI TEMPI (secondi)

	DORSO	*RANA*	*FARFALLA*	*S. LIBERO*
NUOTATORE 1	65	73	63	57
NUOTATORE 2	67	70	65	58
NUOTATORE 3	68	72	69	55
NUOTATORE 4	67	75	70	59

PROBLEMA: *IN CHE MODO IL MANAGER DELLA SQUADRA DEVE ASSEGNARE I NUOTATORI ALLE VARIE SPECIALITÀ IN MODO DA MINIMIZZARE LA SOMMA DEI TEMPI NELL'IPOTESI CHE UN NUOTATORE DEBBA SVOLGERE UNA SOLA SPECIALITA' E VICEVERSA ?*

$$x_{ij} \begin{cases} 1 & \text{nuotatore } i \text{ assegnato alla specialità } j \\ 0 & \text{nuotatore } i \text{ non assegnato alla specialità } j \end{cases}$$

$$\min z = 65x_{11} + 73x_{12} + 63x_{13} + 57x_{14} + 67x_{21} + 70x_{22} + 65x_{23} + 58x_{24} + 68x_{31} + 72x_{32} + 69x_{33} + 55x_{34}$$
$$+ 67x_{41} + 75x_{42} + 70x_{43} + 59x_{41} + 75x_{42} + 70x_{43} + 59x_{44}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1 \end{cases}$$

Un nuotatore svolge una sola gara

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1 \end{cases}$$

Una gara è svolta da un solo nuotatore

Soluzione ottima :

$z^* = 63 + 70 + 55 + 67 = 255''$

$x^*_{13} = 1$, $x^*_{22} = 1$, $x^*_{34} = 1$, $x^*_{41} = 1$ (e tutte le altre variabili uguali a zero)

NOTA : La soluzione ottima può essere ricavata esaminando il valore della funzione obiettivo per tutte le soluzioni ammissibili che sono 4! (4 fattoriale)

ESERCIZIO : CALCOLO DEL FATTORIALE

In generale le soluzioni ammissibili di un problema di assegnamento con n nuotatori ed n specialità sono n!

n	n!	t. di calcolo 1	t. di calcolo 2
1	1		
2	2		
3	6		
4	24		
5	120		
6	720		
7	5.040		
8	40.320		
9	362.880		
10	3.628.800		
11	39.916.800		
12	479.001.600		
13	6.227.020.800		
14	87.178.291.200		
15	1.307.674.368.000		
16	20.922.789.888.000		
17	355.687.428.096.000		
18	6.402.373.705.728.000		
19	121.645.100.408.832.000		
20	2.432.902.008.176.640.000		

Problema: calcolare mediante il foglio elettronico EXCEL nella terza e nella quarta colonna il tempo di calcolo che occorre ad un computer per valutare tutte le soluzioni ammissibili di un problema di assegnamento nell'ipotesi che per calcolare una soluzione occorra rispettivamente 10^{-9} secondi e 10^{-12} secondi

ESEMPIO DI P.L.B. : ASSEGNAMENTO GENERALIZZATO

TABELLA DEI TEMPI (secondi)

	DORSO	*RANA*	*FARFALLA*	*S. LIBERO*
NUOTATORE 1	65	73	63	57
NUOTATORE 2	67	70	65	58
NUOTATORE 3	68	72	69	55
NUOTATORE 4	67	75	70	59
NUOTATORE 5	71	69	75	57
NUOTATORE 6	69	71	66	59

$$\min\ z = 65x_{11} + 73x_{12} + 63x_{13} + 57x_{14} + 67x_{21} + \ldots\ldots\ldots. \qquad + 69x_{61} + 71x_{62} + 66x_{63} + 59x_{64}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} <= 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} <= 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{61} + x_{62} + x_{63} + x_{64} <= 1 \end{array}\right.$$

Un nuotatore svolge al più una sola gara

$$\left\{\begin{array}{l} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} = 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} + x_{62} = 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} + x_{63} = 1 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} + x_{64} = 1 \end{array}\right.$$

Una gara è svolta da un solo nuotatore

Soluzione ottima :

$$z^* = 65 + 65 + 55 + 69 = 254''$$

$x^*_{11} = 1$, $x^*_{23} = 1$, $x^*_{34} = 1$, $x^*_{52} = 1$ (e tutte le altre variabili uguali a zero)

NOTA : La soluzione ottima può essere ricavata esaminando il valore della funzione obiettivo per tutte le soluzioni ammissibili che sono 6!

ESEMPIO DI P.L.I.: PROBLEMA DI KNAPSACK

OGGETTO	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
PESO O VOLUME	52	23	35	15	7
VALORE	100	60	70	15	15

PROBLEMA: QUALI OGGETTI SI DEVONO PRENDERE IN UNO ZAINO PER MASSIMIZZARE IL VALORE TOTALE DEL CONTENUTO SENZA SUPERARE IL LIMITE DI PESO (60 Kg)

$$\max z = 100x_1 + 60x_2 + 70x_3 + 15x_4 + 15x_5$$

$$52x_1 + 23x_2 + 35x_3 + 15x_4 + 7x_5 \leq 60$$

$$x_i \geq 0 \;\; i = 1, \ldots 5 \quad \text{intero}$$

CASO PARTICOLARE: $x_i = \begin{cases} 0 \text{ oggetto } \textit{i-esimo} \text{ non preso} \\ 1 \text{ oggetto } \textit{i-esimo} \text{ preso} \end{cases}$

NUMERO **SOLUZIONI AMMISSIBILI** $\leq 2^n$

SOLUZIONE OTTIMA :

$$z^* = 130$$

$$x_1^* = 0\,,\;\; x_2^* = 1\,,\; x_3^* = 1\,,\; x_4^* = 0\,,\;\; x_5^* = 0$$

NOTE :

- La soluzione ottima può essere ottenuta esaminando il valore della funzione obiettivo per tutte le soluzioni ammissibili.
- In un problema di knapsack tutti i coefficienti sono positivi.

ESEMPIO : PROBLEMA DI "SCHEDULING" DEL PERSONALE

PERIODO	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
ORE	3-7	7-11	11-15	15-19	19-23	23-3
NUMERO MINIMO DIP.	7	20	14	20	10	5

PROBLEMA: *TROVARE IL NUMERO MINIMO DI DIPENDENTI SODDISFACENDO PER OGNI PERIODO IL NUMERO MINIMO DI DIPENDENTI RICHIESTO NELL'IPOTESI CHE OGNI DIPENDENTE LAVORI 8 ORE CONSECUTIVE COMINCIANDO ALL'INIZIO DI UNO DEI SEI PERIODI LAVORATIVI.*

x_i numero dei dipendenti che cominciano a lavorare all'inizio del periodo i

$$min\ z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

$$\begin{array}{llllllll}
x_1 & & & & & +x_6 & \geq 7 \\
x_1 + x_2 & & & & & & \geq 20 \\
& x_2 + x_3 & & & & & \geq 14 \\
& & x_3 + x_4 & & & & \geq 20 \\
& & & x_4 + x_5 & & & \geq 10 \\
& & & & x_5 + x_6 & & \geq 5
\end{array}$$

$$x_i \geq 0 \ \ INTERE,\ i = 1, 2 \ldots 6$$

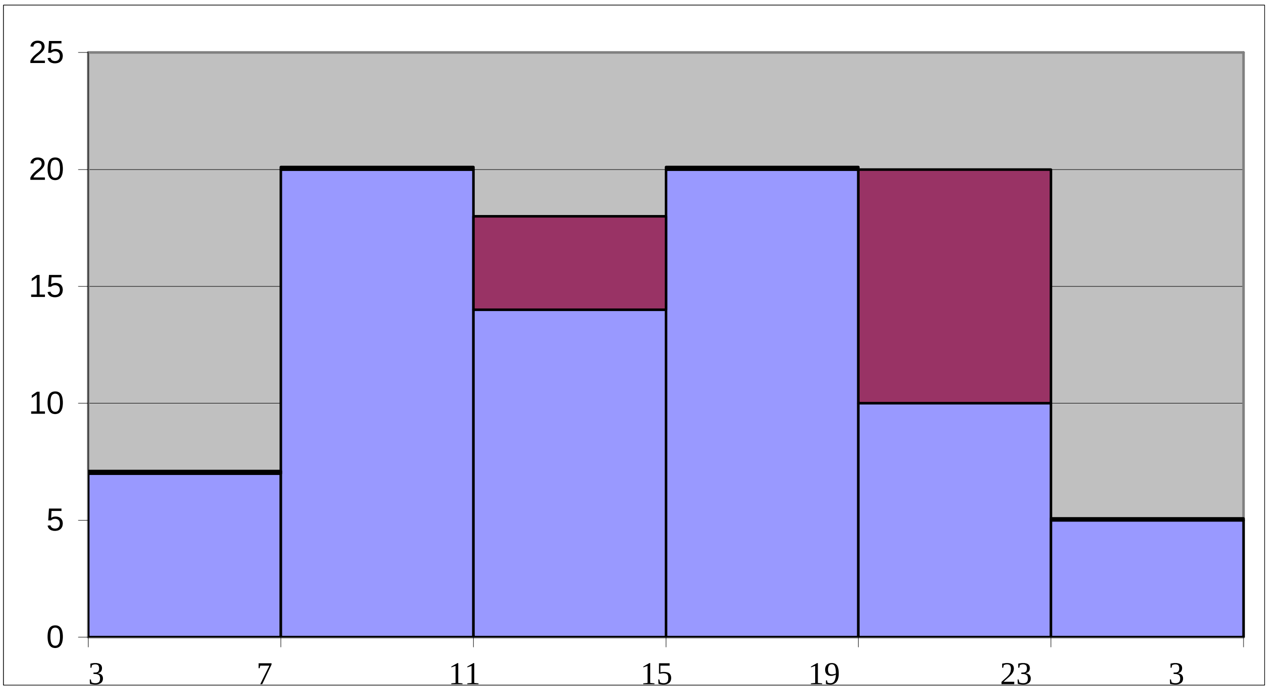
Soluzione ottima : $z^* = 45$

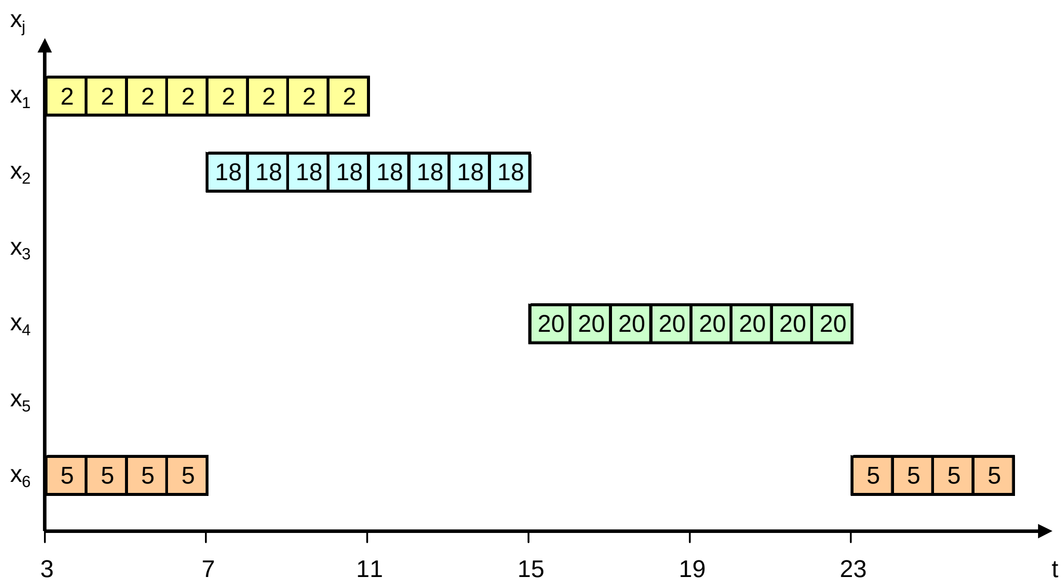
$x_1^* = 2$, $x_2^* = 18$, $x_3^* = 0$, $x_4^* = 20$, $x_5^* = 0$, $x_6^* = 5$

NOTA : La soluzione ottima può essere ottenuta utilizzando il software di ottimizzazione lineare LINDO scaricabile dal sito http://www.lindo.com/ o AMPL (www.ampl.com).

DIAGRAMMA DEL CARICO DI LAVORO

Rappresentazione grafica della soluzione ottima





Soluzione ottima : $z^* = 45$

$x_1^* = 2$	$x_2^* = 18$	$x_3^* = 0$	$x_4^* = 20$	$x_5^* = 0$	$x_6^* = 5$

NOTA : In due periodi (il terzo e il quinto periodo) si ha un'eccedenza di dipendenti rispetto a quelli richiesti come si vede dal diagramma del carico di lavoro.

PROBLEMA DI "SCHEDULING" DEL PERSONALE

Supponete di dover gestire un Call Center; attraverso delle analisi statistiche, siete riusciti a stimare i fabbisogni medi per i singoli giorni della settimana, rappresentati nella seguente tabella:

	lunedì	martedì	mercoledì	Giovedì	venerdì	sabato	domenica
Fabbisogno	20	13	10	12	16	18	20

Volete determinare la quantità di personale necessario per il vostro Call Center in grado di minimizzare i costi e al tempo stesso in grado di soddisfare i fabbisogni della domanda.

Ogni centralinista può lavorare solo 5 giorni lavorativi consecutivamente. Il costo per ogni dipendente è di 60 $ al giorno, a cui vanno aggiunti 25 $ nel caso egli lavori il sabato e 35 $ la domenica.

	lunedì	martedì	mercoledì	giovedì	venerdì	sabato	domenica	Costi
lunedì	X	X	X	X	X			300 $
martedì		X	X	X	X	X		325 $
mercoledì			X	X	X	X	X	360 $
giovedì	X			X	X	X	X	360 $
venerdì	X	X			X	X	X	360 $
sabato	X	X	X			X	X	360 $
domenica	X	X	X	X			X	335 $

PROBLEMA: Costruire il modello di programmazione lineare intera per determinare il numero di persone da assegnare ai diversi turni in modo da minimizzare il costo totale del personale o il numero totale dei dipendenti

ESEMPIO: SEQUENZA CICLICA DI PRODUZIONE

Ci si riferisca ad una macchina che produce quattro articoli A, B, C, D e che sia nota la tabella con tutti i costi di set up connessi con il cambio prodotto dall'uno all'altro articolo.

	A	**B**	**C**	**D**
A	0	10	15	12
B	5	0	7	18
C	12	10	0	5
D	18	10	5	0

Le sequenze cicliche possibili di produzione sono $n!$ e cioè nel nostro caso già estremamente semplice $4! = 24$

PROBLEMA 1: Determinare con un metodo di enumerazione totale che considera tutte le sequenze ammissibili la sequenza ottima degli articoli da produrre che minimizza il costo totale di set up

PROBLEMA 2: Determinare il modello di programmazione matematica del problema proposto introducendo ulteriori vincoli al modello del problema di assegnamento in modo da eliminare eventuali soluzioni del problema di assegnamento che non costituiscono cicli di produzione.

NOTA: $x_{ij} = 1$ se i precede j nella sequenza, 0 altrimenti.

NOTA: $x_{AB} = 1$, $x_{BA} = 1$, $x_{CD} = 1$, $x_{DC} = 1$ (e le altre variabili a zero) è una soluzione ammissibile del problema di assegnamento ma non è un ciclo di produzione in quanto genera due sequenze A-B-A e C-D-C che eseguono tutti gli articoli ma non in un'unica sequenza.

PROBLEMA 1 : COMPLETARE LA SEGUENTE TABELLA

Sequenze	*I CAMBIO*	*II CAMBIO*	*III CAMBIO*	*IV CAMBIO*	*COSTO TOTALE*
ABCDA	*10*	*7*	*5*	*18*	*40*
ABDCA	*10*	*18*	*5*	*12*	*45*
ACBDA	*15*	*10*	*18*	*18*	*61*
ACDBA	*15*	*5*	*10*	*5*	*35*
ADBCA	*12*	*10*	*7*	*12*	*41*
ADCBA	*12*	*5*	*10*	*5*	*35*
BACDB	*5*	*15*	*5*	*10*	*40*
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
DCBAD	*5*	*10*	*5*	*12*	*32*

Trovare la soluzione ottima col minimo costo totale

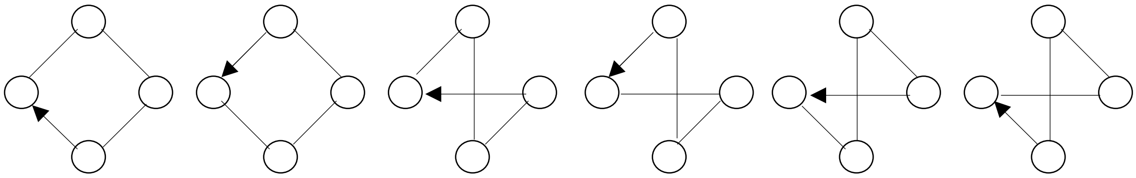
ESEMPIO: PROBLEMA DEL COMMESSO VIAGGIATORE

PROBLEMA : DETERMINARE IL GIRO OTTIMO DI CONSEGNA NELL'IPOTESI DI PASSARE UNA E UNA SOLA VOLTA PER OGNI CITTA' E DI RITORNARE NELLA CITTA' DI PARTENZA MINIMIZZANDO IL TEMPO TOTALE O LA DISTANZA TOTALE DI PERCORRENZA

numero di città $n = 4$

numero di giri di consegna possibili 6

RAPPRESENTAZIONE DEL PROBLEMA MEDIANTE GRAFI



Numero di soluzioni ammissibili: *(n-1)!*

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

1) $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i=1,\ldots\ldots n$

2) $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j=1,\ldots\ldots n$

3) $\sum_{i,j \in S} x_{ij} \le |S| - 1 \quad 2 \le |S| \le n-1$

$$x_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se il collegamento (i, j) non viene scelto} \\ 1 & \text{se il collegamento (i, j) viene scelto} \end{cases} \qquad \forall i, \forall j$$

Esercizio: determinare mediante un software di ottimizzazione lineare il giro ottimo di consegna (ciclo) di un'azienda con deposito in Ancona e i clienti in Fermo, Pesaro, Fabriano (utilizzare un motore di ricerca per trovare i valori delle distanze minime c_{ij} tra le varie città)

NOTE: Il problema della sequenza ciclica di produzione e quello del commesso viaggiatore hanno lo stesso modello di ottimizzazione.

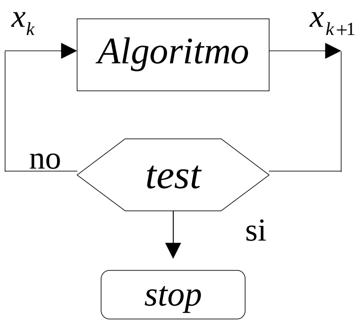
$|S|$ è la cardinalità dei nodi che costituiscono un sottociclo.

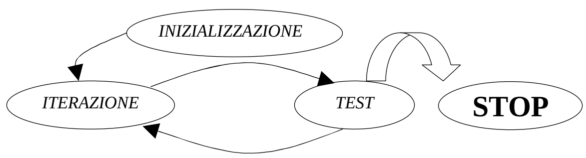
Il vincolo 3) è un vincolo di eliminazione dei sottocicli.

CLASSIFICAZIONE DEI METODI DI SOLUZIONE

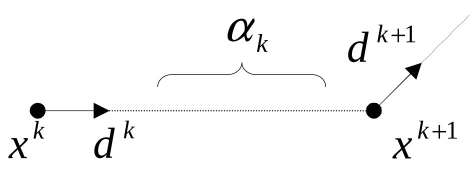
- **ESAUSTIVI:** enumerazione totale
- **ANALITICI:** condizioni analitiche dell'analisi matematica
- **EVOLUTIVI:** il passaggio da una soluzione alla successiva è ottenuto in modo "intelligente", utilizzando per le iterazioni successive le informazioni ricavate dalle iterazioni precedenti
- **ENUMERAZIONE PARZIALE:** valuta solo alcune soluzioni ammissibili
- **EURISTICI:** permettono di ottenere una "buona" soluzione (non necessariamente ottima) in ridotti tempi di calcolo

ESEMPIO DI ALGORITMO EVOLUTIVO





$x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k \qquad x^0 = \bar{x}^0$, noto (inizializzazione)



$x^k \in R^n \qquad d^k \in R^n$

α_k : lunghezza del passo k-esimo dell'algoritmo (è uno scalare)

d^k : vettore direzione nel punto x^k .

$d^k = \nabla f(x^k)^T$ è un vettore colonna.

$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial xn} \right)$: gradiente calcolato nel punto x^k (vettore riga).

TEST rappresenta un criterio di arresto dell'algoritmo.

DEFINIZIONE DI ALGORITMO

UN INSIEME FINITO DI ISTRUZIONI CHE GENERA UNA SEQUENZA DI OPERAZIONI PER RISOLVERE UNA CLASSE DI PROBLEMI

CARATTERISTICHE

- OGNI ISTRUZIONE È "BEN DEFINITA" (NON AMBIGUITÀ)
- OGNI ISTRUZIONE È ESEGUIBILE IN UN INTERVALLO FINITO DI TEMPO
- L'ALGORITMO TERMINA IN UN NUMERO FINITO DI PASSI (CONVERGENZA)
- EFFICIENZA COMPUTAZIONALE (NUMERO OPERAZIONI NECESSARIE PER TROVARE UNA SOLUZIONE)
  - PROBLEMI CON **COMPLESSITÀ POLINOMIALE**

    Numero di operazioni aumenta secondo una potenza delle dimensioni dell'input dei dati
  - PROBLEMI CON **COMPLESSITÀ ESPONENZIALE**

    Numero di operazioni aumenta esponenzialmente con l'aumentare delle dimensioni dell'input dei dati

COMPLESSITÀ COMPUTAZIONALE

LA PRESTAZIONE DI UN ALGORITMO È VALUTATA DAL TEMPO DI ESECUZIONE MISURATO CONTANDO IL NUMERO DI OPERAZIONI ELEMENTARI CHE ESSO DEVE COMPIERE NEL CASO PEGGIORE, CIOÈ IN PRESENZA DI DATI CHE LO OBBLIGHINO A COMPIERE TUTTI I PASSI CHE SONO STATI PREVISTI.

LA **COMPLESSITÀ COMPUTAZIONALE** È UNA FUNZIONE **O(.)** CHE ESPRIME IL NUMERO DI OPERAZIONI ELEMENTARI NECESSARIO PER RISOLVERE UN PROBLEMA, NEL CASO PEGGIORE, IN FUNZIONE DELLE **DIMENSIONI** DEL PROBLEMA

LA COMPLESSITÀ SI ESPRIME IN ORDINE DI GRANDEZZA **O(.)**

$O(n^k)$ **k** COSTANTE **COMPLESSITÀ POLINOMIALE** (ES. $O(n^3)$)

$O(a^n)$ ***a*** COSTANTE >1 **COMPLESSITÀ ESPONENZIALE** (ES. $O(2^n)$)

UN ALGORITMO SI DICE EFFICIENTE SE LA SUA COMPLESSITÀ È POLINOMIALE, CIOÈ SE LA FUNZIONE **O(.)** È UN POLINOMIO NELLE DIMENSIONI DEL PROBLEMA (ESEMPIO $O(n^3+m^2)$).

CI SONO PROBLEMI NON RISOLUBILI DA NESSUN ALGORITMO POLINOMIALE?

RISPOSTA: SI (PROBLEMI **NP-HARD**)