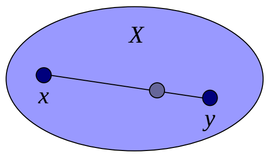
Metodi e modelli per il supporto alle decisioni

3. Geometria della Programmazione Lineare

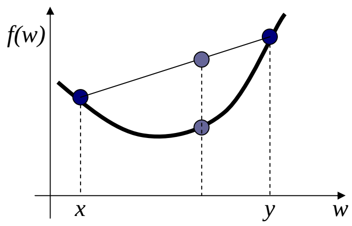
Problemi di programmazione convessa

$$\boxed{\begin{array}{c}\min f(x)\\ x \in X\end{array}}$$



$X \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$X \text{ convesso} \Rightarrow \forall\, x, y \in X, \lambda \in [0,1]:\ \lambda x + (1-\lambda) y \in X$$



$f : X \to \mathbb{R}$,

$$f \text{ convessa} \Rightarrow \forall\, x, y \in X, \lambda \in [0,1]:\ f(\lambda x + (1-\lambda) y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Proprietà: minimo locale $\Leftrightarrow$ minimo globale

Problemi di programmazione lineare (**PL**)

- Caso particolare della programmazione convessa
- Sempre possibile scriverli in forma standard

$$\min z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n$$

subject to

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_j \geq 0$$

Geometria della regione ammissibile

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n \leq \alpha_0$$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = \alpha_0$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \qquad \alpha^T = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n] \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$$

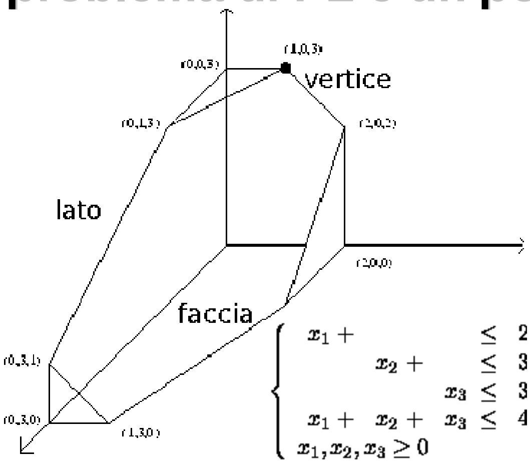
$$\alpha \in \mathbb{R}^n \qquad \alpha_0 \in \mathbb{R}$$

semispazio (affine) $\alpha^T x \leq \alpha_0$

iperpiano $\alpha^T x = \alpha_0$

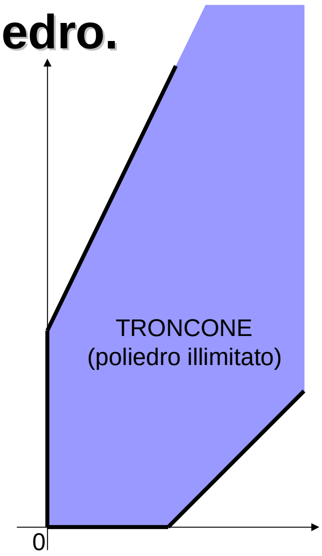
L'intersezione di semispazi e iperpiani in $\mathbb{R}^n$ è detto **POLIEDRO** (convesso) $P \subseteq \mathbb{R}^n$.

La regione ammissibile di un problema di PL è un poliedro.



$$\begin{cases} x_1 + & & & \leq & 2 \\ & x_2 + & & \leq & 3 \\ & & x_3 & \leq & 3 \\ x_1 + & x_2 + & x_3 & \leq & 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

POLITOPO (poliedro limitato)



Vertici di poliedri e PL

- **VERTICE** di un poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^n$: punto di P non ottenibile come combinazione convessa STRETTA di due punti distinti di P.

- **Proprietà:** Ogni poliedro ha un numero finito di vertici.

- **RAPPRESENTAZIONE DI POLITOPI** (teorema di Minkowski-Weyl - caso limitato): Ogni punto di un politopo $P \subseteq \mathbb{R}^n$ si può ottenere come combinazione convessa dei suoi vertici.

  Indicando con $x^1, x^2, ..., x^k$ ($x^i \in \mathbb{R}^n$) i vertici di P, si ha
  $x \in P \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i$ con $\lambda_i \geq 0, \forall i = 1..k$ e $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$

- **PROPRIETÀ**: Se il poliedro P delle soluzioni ammissibili di un problema di PL è limitato (politopo), allora esiste almeno un **vertice di P ottimo**

Esempio

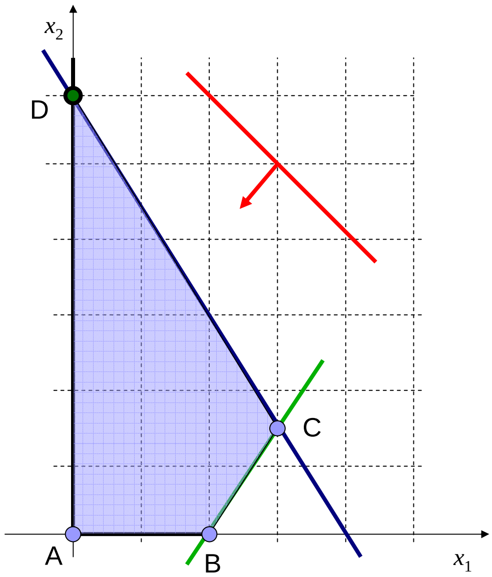
min z = $-x_1 - x_2$

s.t.

$6x_1 + 4x_2 \leq 24$

$3x_1 - 2x_2 \leq 6$

$x_1, x_2 \geq 0$



Generalizziamo…

- Scrivere in modo conveniente un problema di PL
- Richiamare concetti di Algebra Lineare

PL in forma STANDARD

min $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n$

s.t. $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$

…

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$

$x_j \geq 0, j = 1 \ldots n$

Notazione

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^T \\ \hline a_2^T \\ \hline \vdots \\ \hline a_m^T \end{bmatrix} = \left[A_1 \middle| A_2 \middle| \dots \middle| A_n \right] \text{ (matrice } m \times n\text{)}$$

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \text{ (vettore colonna)} \qquad c^T = [c_1, c_2, \dots, c_n] \text{ (vettore riga)}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad c^T x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \text{ (prodotto scalare come prodotto righe } \times \text{ colonne)}$$

Problema PL: forme compatte

funzione obiettivo: $\min c^T x$

vincoli:

$a_1^T x = b_1$
$a_2^T x = b_2$
$\dots$
$a_m^T x = b_m$

oppure

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n = b \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

oppure

$Ax = b$

Richiami di algebra lineare (I)

- **Combinazione lineare di vettori** $x^i \in \mathbb{R}^n$:, $i = 1...k$
  $\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + ... + \alpha_k x^k$ ($\alpha_i \in \mathbb{R}$)
- **Vettori linearmente indipendenti**: non esiste una loro combinazione lineare pari al vettore nullo con coefficienti non tutti nulli:
  $\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + ... + \alpha_k x^k = \underline{0} \Leftrightarrow \alpha_i = 0, \forall i = 1...k$
- **Rango di una matrice** $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$: indicato con $\rho(A)$, è il massimo numero di righe linearmente indipendenti (coincide con il massimo numero di colonne linearmente indipendenti).
- **Matrici quadrate** $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$:
  - **matrice inversa**: $B^{-1} \in \mathbb{R}^{m \times m} : B^{-1}B = BB^{-1} = I$ (matrice identità $m \times m$);
  - B è **invertibile** $\Longleftrightarrow det(B) \neq 0$ (matrice non singolare);
  - $det(B) \neq 0 \Longleftrightarrow \rho(B) = m$.

Richiami di algebra lineare (II)

- **Sistemi di equazioni in forma matriciale**: un sistema di m equazioni in n incognite può essere messo in forma matriciale:
  $Ax = b$, con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $x \in \mathbb{R}^n$.
- **Teorema di Rouché-Capelli**:
  $Ax = b$ ammette soluzioni $\Longleftrightarrow \rho(A) = \rho(A|b) = r$ (∞^{n-r} soluzioni).
- **Operazioni elementari su matrici**:
  - scambiare la riga i con la riga j;
  - moltiplicare la riga i per uno scalare non nullo;
  - sostituire alla riga i, la riga i più α volte la riga j ($\alpha \in \mathbb{R}$).

  Le operazioni elementari sulla matrice aumentata $[A|b]$ non alterano l'insieme delle soluzioni ammissibili del sistema $Ax = b$.
- **Metodo di Gauss-Jordan** per la soluzione di sistemi $Ax = b$: eseguire delle operazioni elementari sulla matrice aumentata in modo da ottenere in A una sottomatrice identità di dimensioni pari a $\rho(A) = \rho(A|b)$.

Soluzioni di base

$Ax = b$

$A = [B|F] \quad B \in \mathbb{R}^{m\times m}, det(B) \neq 0 \qquad x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_F \end{bmatrix}, x_B \in \mathbb{R}^m, x_F \in \mathbb{R}^{n-m}$

$Ax = b \Longrightarrow [B|F] \begin{bmatrix} x_B \\ x_F \end{bmatrix} = Bx_B + Fx_F = b$

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b - B^{-1}Fx_F \\ x_F \end{bmatrix}$$

Ponendo $x_F = 0$, si ottiene una **soluzione di base** rispetto alla base B (soluzione con almeno $n - m$ componenti nulle):

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$$

– Soluzione **ammissibile** di base, se $B^{-1}b \geq \underline{0}$

– Soluzione di base **degenere**, se $B^{-1}b$ $(\in \mathbb{R}^m)$ ha almeno una componente nulla (più di $n - m$ componenti nulle nella soluzione di base)

Caratterizzazione algebrica dei vertici e teorema fondamentale della PL

- **Teorema: corrispondenza tra vertici e soluzioni ammissibili di base.** Dato un poliedro non vuoto $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$:

  x è vertice di P $\Longleftrightarrow$ x è soluzione ammissibile di base del sistema $Ax = b$

  Dimostrazione!

Ipotesi di algoritmo risolutivo per problemi di PL

- Algoritmo enumerativo:
  1. Genero tutte le soluzioni di base (ponendo a 0 n-m variabili e risolvendo un sistema di equazioni lineari)
  2. Scelgo la migliore soluzione ammissibile di base
- MA… numero "elevato" di possibili soluzioni di base (al più tutte le possibili combinazioni di m tra n colonne)
- Suggerimento:
  - non genero tutte le soluzioni di base
  - a partire da una soluzione ammissibile di base, cerco di migliorarla "localmente" finché non sono più possibili miglioramenti $\Rightarrow$ ottimo locale $\Rightarrow$ ottimo globale
- **…ALGORTIMO del SIMPLESSO…**

Metodo del simplesso: ingredienti

1. **Generare una soluzione ammissibile di base di partenza**
2. **Verificare l'ottimalità della soluzione corrente**
3. **Se la soluzione non è ottima, generare una soluzione di base ("vicina") che migliora la funzione obiettivo**
4. **Iterare i passi 2 e 3**