Metodi e modelli per il supporto alle decisioni

4. Metodo del simplesso

Metodo del simplesso: ingredienti

1. **Generare una soluzione ammissibile <u>di base</u> di partenza**
2. **Verificare l'ottimalità della soluzione corrente**
3. **Se la soluzione non è ottima, generare una soluzione <u>di base</u> ("vicina") <u>che migliora</u> la funzione obiettivo**
4. **Iterare i passi 2 e 3**

Costi ridotti

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b - B^{-1}Fx_F \\ x_F \end{bmatrix}$$

$$z = c^T x = \left[c_B^T, c_F^T\right] \begin{bmatrix} x_B \\ x_F \end{bmatrix} = c_B^T B^{-1} b - c_B^T B^{-1} F x_F + c_F^T x_F =$$

$$= \underbrace{c_B^T B^{-1} b}_{\text{costante } (z_B)} + \left(c_F^T - c_B^T B^{-1} F\right) x_F$$

Definizione: **vettore dei** **costi ridotti** **rispetto alla base** B:

$$\bar{c}^T = c^T - c_B^T B^{-1} A = [c_B^T - c_B^T B^{-1} B, c_F^T - c_B^T B^{-1} F] = [0^T, \bar{c}_F^T]$$

Scriviamo la funzione obiettivo in funzione del valore z_B e dei costi ridotti:

$$z = z_B + 0^T x_B + \bar{c}_F^T x_F = z_B + \bar{c}^T x$$

Test di ottimalità

Osservazioni

- I costi ridotti delle variabili fuori base dicono quanto varia *z* al variare della corrispondente variabile
- I costi ridotti delle variabili in base sono nulli

Teorema

$$\text{Hp} \begin{cases} B\text{: base ammissibile} \\ \bar{c}^T = c^T - c_B^T B^{-1} A \geq 0^T \end{cases} \implies \text{Th} \begin{cases} \text{la soluzione di base associata} \\ \text{a } B \text{ è ottima.} \end{cases}$$

Dim:

$$z = c^T x = z_B + \bar{c}^T x = z_B + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\bar{c}_i x_i}_{\geq 0}}_{\geq 0} \geq z_B \qquad \forall\, x \geq 0$$

□

Attenzione! **Non vale** $\Leftarrow$ (contro-esempio: soluzioni di base degeneri).

Miglioramento della funzione obiettivo

- Cerchiamo soluzione di base:
  - "vicina": **scambio** una variabile di base con una fuori base;
  - "migliorante": faccio entrare una variabile fuori base con **costo ridotto negativo** $x_h : \bar{c}_h < 0$.
- Conviene porre x_h al valore più alto possibile.
- Ma... cosa succede alle altre variabili in base?

Le altre variabili fuori base restano al valore 0

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}F x_F = B^{-1}b - B^{-1}A_h x_h + 0$$

$$\text{ponendo: } \bar{b} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \vdots \\ \bar{b}_i \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{bmatrix}, \ \bar{A}_h = B^{-1}A_h = \begin{bmatrix} \bar{a}_{1h} \\ \vdots \\ \bar{a}_{ih} \\ \vdots \\ \bar{a}_{mh} \end{bmatrix}, \ x_B = \begin{bmatrix} x_{\beta[1]} \\ \vdots \\ x_{\beta[i]} \\ \vdots \\ x_{\beta[m]} \end{bmatrix}$$

Vogliamo, per l'ammissibiltà: $\boxed{x_B = \bar{b} - \bar{A}_h x_h \geq 0}$

Massimo miglioramento

Per esteso:

$$\begin{cases} x_{\beta[1]} = \bar{b}_1 - \bar{a}_{1h} x_h \geq 0 \\ \dots \\ x_{\beta[i]} = \bar{b}_i - \bar{a}_{ih} x_h \geq 0 \\ \dots \\ x_{\beta[m]} = \bar{b}_m - \bar{a}_{mh} x_h \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \bar{a}_{1h} x_h \leq \bar{b}_1 \\ \dots \\ \bar{a}_{ih} x_h \leq \bar{b}_i \\ \dots \\ \bar{a}_{mh} x_h \leq \bar{b}_m \end{cases}$$

- $\bar{a}_{ih} \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad x_h$ può crescere indefinitamente;
- $\bar{a}_{ih} > 0 \quad \Longrightarrow \quad x_h$ può crescere fino a $\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ih}}$.

Quindi, per l'ammissibilità devo porre:

$$\boxed{x_h = \vartheta = \min_{\substack{i = 1 \dots m \\ \bar{a}_{ih} \geq 0}} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ih}} \right\}}$$

Osservazioni

1. Se $x_h = \vartheta$, la funzione obiettivo migliora di $\bar{c}_h \vartheta \le 0$.

2. Se $\bar{a}_{ih} \le 0,\ \forall i = 1...m$, x_h può crescere indefinitamente rendendo il problema **ILLIMITATO**. Attenzione: basta che ciò si verifichi per una qualsiasi variabile fuori base.

3. Se la soluzione di base x_B è **degenere** e, in corrispondenza di $\bar{b}_i = 0$, si ha $\bar{a}_{ih} > 0$, allora $\vartheta = 0$: non si ottiene miglioramento della funzione obiettivo.

Cambiamento di base

- Se $t = \arg\min_{i=1...m\ \bar{a}_{ih} \ge 0} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ih}} \right\}$, allora

  $x_{\beta[t]} = \bar{b}_t - \bar{a}_{th} \frac{\bar{b}_t}{\bar{a}_{th}} = 0$:

  $x_{\beta[t]}$ *esce* dalla base e x_h *entra* in base (al posto di $x_{\beta[t]}$).

  $B = \left[A_{\beta[1]}, ..., A_{\beta[t]}, ..., A_{\beta[m]} \right] \leadsto \tilde{B} = \left[A_{\beta[1]}, ..., A_h, ..., A_{\beta[m]} \right]$.

- $\tilde{B}$ **è una base** $(\det(\tilde{B}) \ne 0)$ adiacente a B.

Possiamo passare da una soluzione di base ad un'altra (in generale migliorando la funzione obiettivo): abbiamo un (buon) metodo per esplorare lo spazio delle soluzioni di base alla ricerca della soluzione (di base) ottima.

Algoritmo del simplesso
(forma matriciale)

1. Siano $\beta[1], ..., \beta[m]$ gli indici delle colonne di una **base iniziale**.
2. Poni $B = \left[A_{\beta[1]}|...|A_{\beta[m]}\right]$ e calcola B^{-1} e $u^T = c_B^T B^{-1}$
3. Calcola i **costi ridotti**: $\bar{c}_h = c_h - u^T A_h$ per le variabili x_h fuori base.
4. Se $\bar{c}_h \geq 0$ per ogni x_h fuori base, **STOP**: B è **OTTIMA**.
5. Scegli una qualsiasi x_h fuori base con $\bar{c}_h < 0$.
6. Calcola $\bar{b} = B^{-1}b$ e $\bar{A}_h = B^{-1}A_h$
7. Se $\bar{a}_{ih} \leq 0$, $\forall i = 1...m$, **STOP**: problema **ILLIMITATO**.
8. Calcola $t = \arg\min_{i=1...m} \left\{\bar{b}_i/\bar{a}_{ih}, \bar{a}_{ih} > 0\right\}$.
9. Aggiorna la base corrente: $\beta[t] \leftarrow h$.
10. Torna al passo 2.