

Ricerca Operativa

A.A. 2007/2008

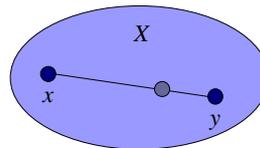
5. Geometria della Programmazione Lineare

Problemi di programmazione convessa

$$\min_{x \in X} f(x)$$

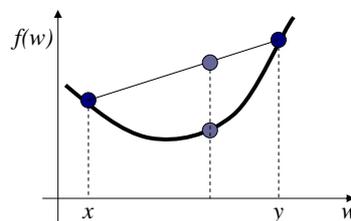
$$X \subseteq \mathbb{R}^n,$$

$$X \text{ convesso} \\ \Rightarrow \forall x, y \in X, \lambda \in [0, 1] : \\ \lambda x + (1 - \lambda)y \in X$$



$$f : X \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f \text{ convessa} \\ \Rightarrow \forall x, y \in X, \lambda \in [0, 1] : \\ f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$



Proprietà: minimo locale \Leftrightarrow minimo globale

Problemi di programmazione lineare (PL)

- Caso particolare della programmazione convessa
- Sempre possibile scriverli in forma standard

$$\min z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_jx_j + \dots + c_nx_n$$

subject to

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_j \geq 0$$

Geometria della regione ammissibile

$$\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \dots + \alpha_nx_n \leq \alpha_0$$

$$\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \dots + \alpha_nx_n = \alpha_0$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \quad \alpha^T = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\alpha \in \mathbb{R}^n \quad \alpha_0 \in \mathbb{R}$$

semispazio (affine)

$$\alpha^T x \leq \alpha_0$$

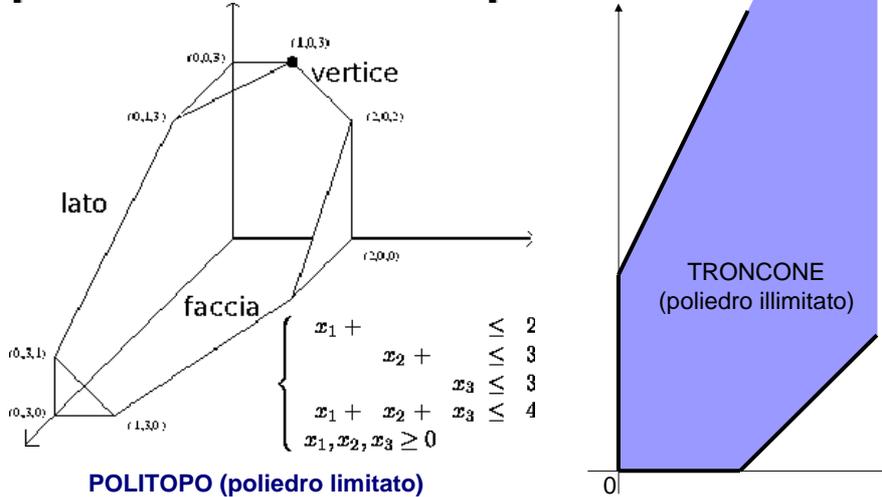
iperpiano

$$\alpha^T x = \alpha_0$$

L'intersezione di semispazi e iperpiani in \mathbb{R}^n è detto

POLIEDRO (convesso) $P \subseteq \mathbb{R}^n$.

La regione ammissibile di un problema di PL è un poliedro.



Luigi De Giovanni - Ricerca Operativa - 5. Geometria della Programmazione Lineare

5.5

Vertici di poliedri e PL

- **VERTICE** di un poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^n$: punto di P non ottenibile come combinazione convessa STRETTA di due punti distinti di P .
- **Proprietà**: Ogni poliedro ha un numero finito di vertici.
- **RAPPRESENTAZIONE DI POLITOPI** (teorema di Minkowski-Weyl - caso limitato): Ogni punto di un politopo $P \subseteq \mathbb{R}^n$ si può ottenere come combinazione convessa dei suoi vertici.

Indicando con x^1, x^2, \dots, x^k ($x^i \in \mathbb{R}^n$) i vertici di P , si ha
 $x \in P \Rightarrow x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x^i$ con $\lambda_i \geq 0, \forall i = 1..k$ e $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$

- **PROPRIETÀ**: Se il poliedro P delle soluzioni ammissibili di un problema di PL è limitato (politopo), allora esiste almeno un **vertice di P ottimo**

Luigi De Giovanni - Ricerca Operativa - 5. Geometria della Programmazione Lineare

5.6

Esempio

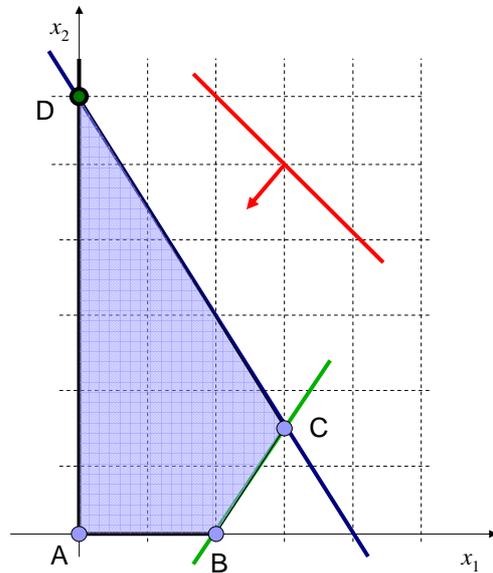
$$\min z = -x_1 - x_2$$

s.t.

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$3x_1 - 2x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Luigi De Giovanni - Ricerca Operativa - 5. Geometria della Programmazione Lineare

5.7

Generalizziamo...

- Scrivere in modo conveniente un problema di PL
- Richiamare concetti di Algebra Lineare

PL in forma STANDARD

$$\min z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_jx_j + \dots + c_nx_n$$

$$\text{s.t. } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_j \geq 0, j = 1 \dots n$$

Luigi De Giovanni - Ricerca Operativa - 5. Geometria della Programmazione Lineare

5.8

Notazione

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{bmatrix} = [A_1 | A_2 | \dots | A_n] \text{ (matrice } m \times n)$$

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \text{ (vettore colonna)} \quad c^T = [c_1, c_2, \dots, c_n] \text{ (vettore riga)}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad c^T x = \sum_{i=1}^n c_i x_i \text{ (prodotto scalare come prodotto righe } \times \text{ colonne)}$$

Problema PL: forme compatte

funzione obiettivo: $\min c^T x$

vincoli:

$$\begin{aligned} a_1^T x &= b_1 \\ a_2^T x &= b_2 \\ &\dots \\ a_m^T x &= b_m \end{aligned}$$

oppure

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n = b \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

oppure

$$Ax = b$$

Richiami di algebra lineare (I)

- **Combinazione lineare di vettori** $x^i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1 \dots k$
 $\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_k x^k$ ($\alpha_i \in \mathbb{R}$)
- **Vettori linearmente indipendenti**: non esiste una loro combinazione lineare pari al vettore nullo con coefficienti non tutti nulli:
 $\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_k x^k = \underline{0} \Leftrightarrow \alpha_i = 0, \forall i = 1 \dots k$
- **Rango di una matrice** $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$: indicato con $\rho(A)$, è il massimo numero di righe linearmente indipendenti (coincide con il massimo numero di colonne linearmente indipendenti).
- **Matrici quadrate** $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$:
 - **matrice inversa**: $B^{-1} \in \mathbb{R}^{m \times m}$: $B^{-1}B = BB^{-1} = I$ (matrice identità $m \times m$);
 - B è **invertibile** $\Leftrightarrow \det(B) \neq 0$ (matrice non singolare);
 - $\det(B) \neq 0 \Leftrightarrow \rho(B) = m$.

Luigi De Giovanni - Ricerca Operativa - 5. Geometria della Programmazione Lineare

5.11

Richiami di algebra lineare (II)

- **Sistemi di equazioni in forma matriciale**: un sistema di m equazioni in n incognite può essere messo in forma matriciale:
 $Ax = b$, con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $x \in \mathbb{R}^n$.
- **Teorema di Rouché-Capelli**:
 $Ax = b$ ammette soluzioni $\Leftrightarrow \rho(A) = \rho(A|b) = r$ (∞^{n-r} soluzioni).
- **Operazioni elementari su matrici**:
 - scambiare la riga i con la riga j ;
 - moltiplicare la riga i per uno scalare non nullo;
 - sostituire alla riga i , la riga i più α volte la riga j ($\alpha \in \mathbb{R}$).Le operazioni elementari sulla matrice aumentata $[A|b]$ non alterano l'insieme delle soluzioni ammissibili del sistema $Ax = b$.
- **Metodo di Gauss-Jordan** per la soluzione di sistemi $Ax = b$: eseguire delle operazioni elementari sulla matrice aumentata in modo da ottenere in A una sottomatrice identità di dimensioni pari a $\rho(A) = \rho(A|b)$.

Luigi De Giovanni - Ricerca Operativa - 5. Geometria della Programmazione Lineare

5.12

Soluzioni di base

$$Ax = b$$

$$A = [B|F] \quad B \in \mathbb{R}^{m \times m}, \det(B) \neq 0 \quad x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_F \end{bmatrix}, x_B \in \mathbb{R}^m, x_F \in \mathbb{R}^{n-m}$$

$$Ax = b \implies [B|F] \begin{bmatrix} x_B \\ x_F \end{bmatrix} = Bx_B + Fx_F = b$$

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b - B^{-1}Fx_F \\ x_F \end{bmatrix}$$

Ponendo $x_F = 0$, si ottiene una **soluzione di base** rispetto alla base B (soluzione con almeno $n - m$ componenti nulle):

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Soluzione **ammissibile** di base, se $B^{-1}b \geq 0$
- Soluzione di base **degenere**, se $B^{-1}b (\in \mathbb{R}^m)$ ha almeno una componente nulla (più di $n - m$ componenti nulle nella soluzione di base)

Luigi De Giovanni - Ricerca Operativa - 5. Geometria della Programmazione Lineare

5.13

Caratterizzazione algebrica dei vertici e teorema fondamentale della PL

- **Teorema: corrispondenza tra vertici e soluzioni ammissibili di base.** Dato un poliedro non vuoto $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$:

$$x \text{ è vertice di } P \iff x \text{ è soluzione ammissibile di base del sistema} \\ Ax = b$$

Dimostrazione!

- **Teorema: fondamentale della programmazione lineare.** Dato un problema di PL $\min_{x \in P} c^T x$, dove $P \subseteq \mathbb{R}^n$ è un *politopo* non vuoto $P = \{x \geq 0 : Ax = b\}$

esiste almeno una soluzione ottima coincidente con una soluzione ammissibile di base.

Dimostrazione: esiste un vertice ottimo, corrispondente a una (o più) soluzioni ammissibili di base ■

Luigi De Giovanni - Ricerca Operativa - 5. Geometria della Programmazione Lineare

5.14

Ipotesi di algoritmo risolutivo per problemi di PL

- Algoritmo **enumerativo**:
 1. Genero tutte le soluzioni di base (ponendo a 0 $n-m$ variabili e risolvendo un sistema di equazioni lineari)
 2. Scelgo la migliore soluzione ammissibile di base
- **MA...** numero "elevato" di possibili soluzioni di base (al più tutte le possibili **combinazioni** di m tra n colonne)
- Suggerimento:
 - non genero tutte le soluzioni di base
 - a partire da una soluzione ammissibile di base, cerco di migliorarla "localmente" finché non sono più possibili miglioramenti \Rightarrow ottimo locale \Rightarrow ottimo globale
- **...ALGORITMO del SIMPLESSO...**

Metodo del simplesso: ingredienti

1. **Generare una soluzione ammissibile di base di partenza**
2. **Verificare l'ottimalità della soluzione corrente**
3. **Se la soluzione non è ottima, generare una soluzione di base ("vicina") che migliora la funzione obiettivo**
4. **Iterare i passi 2 e 3**