



Ricerca Operativa

A.A. 2007/2008

6. Metodo del simplesso



Metodo del simplesso: ingredienti

1. Generare una soluzione ammissibile di base di partenza
2. Verificare l'ottimalità della soluzione corrente
3. Se la soluzione non è ottima, generare una soluzione di base ("vicina") che migliora la funzione obiettivo
4. Iterare i passi 2 e 3

Costi ridotti

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b - B^{-1}F x_F \\ x_F \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} z = c^T x &= [c_B^T, c_F^T] \begin{bmatrix} x_B \\ x_F \end{bmatrix} = c_B^T B^{-1}b - c_B^T B^{-1}F x_F + c_F^T x_F = \\ &= \underbrace{c_B^T B^{-1}b}_{\text{costante } (z_B)} + (c_F^T - c_B^T B^{-1}F) x_F \end{aligned}$$

Definizione: vettore dei costi ridotti rispetto alla base B :

$$\bar{c}^T = c^T - c_B^T B^{-1}A = [c_B^T - c_B^T B^{-1}B, c_F^T - c_B^T B^{-1}F] = [0^T, \bar{c}_F^T]$$

Scriviamo la funzione obiettivo in funzione del valore z_B e dei costi ridotti:

$$z = z_B + 0^T x_B + \bar{c}_F^T x_F = z_B + \bar{c}^T x$$

Luigi De Giovanni - Ricerca Operativa - 6. Metodo del simplesso

6.3

Test di ottimalità

Osservazioni

- I costi ridotti delle variabili fuori base dicono quanto varia z al variare della corrispondente variabile
- I costi ridotti delle variabili in base sono nulli

Teorema

$$\text{Hp} \left\{ \begin{array}{l} B: \text{base ammissibile} \\ \bar{c}^T = c^T - c_B^T B^{-1}A \geq 0^T \end{array} \right. \implies \text{Th} \left\{ \begin{array}{l} \text{la soluzione di base associata} \\ \text{a } B \text{ è ottima.} \end{array} \right.$$

Dim:

$$z = c^T x = z_B + \bar{c}^T x = z_B + \underbrace{\sum_{i=1}^n \bar{c}_i x_i}_{\geq 0} \geq z_B \quad \forall x \geq 0$$

□

Attenzione! **Non vale** \Leftarrow (contro-esempio: soluzioni di base degeneri).

Luigi De Giovanni - Ricerca Operativa - 6. Metodo del simplesso

6.4

Miglioramento della funzione obiettivo

- Cerchiamo soluzione di base:
 - “vicina”: **scambio** una variabile di base con una fuori base;
 - “migliorante”: faccio entrare una variabile fuori base con **costo ridotto negativo** $x_h : \bar{c}_h < 0$.
- Conviene porre x_h al valore più alto possibile.
- Ma... cosa succede alle altre variabili in base?

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}F x_F = B^{-1}b - B^{-1}A_h x_h + 0$$

Le altre variabili fuori base restano al valore 0

$$\text{ponendo: } \bar{b} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \vdots \\ \bar{b}_i \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{bmatrix}, \bar{A}_h = B^{-1}A_h = \begin{bmatrix} \bar{a}_{1h} \\ \vdots \\ \bar{a}_{ih} \\ \vdots \\ \bar{a}_{mh} \end{bmatrix}, x_B = \begin{bmatrix} x_{\beta[1]} \\ \vdots \\ x_{\beta[i]} \\ \vdots \\ x_{\beta[m]} \end{bmatrix}$$

Vogliamo, per l'ammissibilità:

$$x_B = \bar{b} - \bar{A}_h x_h \geq 0$$

Luigi De Giovanni - Ricerca Operativa - 6. Metodo del simplesso

6.5

Massimo miglioramento

Per esteso:

$$\begin{cases} x_{\beta[1]} = \bar{b}_1 - \bar{a}_{1h}x_h \geq 0 \\ \dots \\ x_{\beta[i]} = \bar{b}_i - \bar{a}_{ih}x_h \geq 0 \\ \dots \\ x_{\beta[m]} = \bar{b}_m - \bar{a}_{mh}x_h \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \bar{a}_{1h}x_h \leq \bar{b}_1 \\ \dots \\ \bar{a}_{ih}x_h \leq \bar{b}_i \\ \dots \\ \bar{a}_{mh}x_h \leq \bar{b}_m \end{cases}$$

- $\bar{a}_{ih} \leq 0 \implies x_h$ può crescere indefinitamente;
- $\bar{a}_{ih} > 0 \implies x_h$ può crescere fino a $\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ih}}$.

Quindi, per l'ammissibilità devo porre:

$$x_h = \vartheta = \min_{\substack{i=1\dots m \\ \bar{a}_{ih} \geq 0}} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ih}} \right\}$$

Luigi De Giovanni - Ricerca Operativa - 6. Metodo del simplesso

6.6

Osservazioni

1. Se $x_h = \vartheta$, la funzione obiettivo migliora di $\bar{c}_h \vartheta \leq 0$.
2. Se $\bar{a}_{ih} \leq 0, \forall i = 1 \dots m$, x_h può crescere indefinitamente rendendo il problema **ILLIMITATO**. Attenzione: basta che ciò si verifichi per una qualsiasi variabile fuori base.
3. Se la soluzione di base x_B è **degenere** e, in corrispondenza di $\bar{b}_i = 0$, si ha $\bar{a}_{ih} > 0$, allora $\vartheta = 0$: non si ottiene miglioramento della funzione obiettivo.

Cambiamento di base

- Se $t = \arg \min_{i=1 \dots m} \bar{a}_{ih} \geq 0 \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ih}} \right\}$, allora

$$x_{\beta[t]} = \bar{b}_t - \bar{a}_{th} \frac{\bar{b}_t}{\bar{a}_{th}} = 0:$$

$x_{\beta[t]}$ esce dalla base e x_h entra in base (al posto di $x_{\beta[t]}$).

$$B = [A_{\beta[1]}, \dots, A_{\beta[t]}, \dots, A_{\beta[m]}] \rightsquigarrow \tilde{B} = [A_{\beta[1]}, \dots, A_h, \dots, A_{\beta[m]}].$$

- \tilde{B} è una base ($\det(\tilde{B}) \neq 0$) adiacente a B .

Possiamo passare da una soluzione di base ad un'altra (in generale migliorando la funzione obiettivo): abbiamo un (buon) metodo per **esplorare lo spazio delle soluzioni di base** alla ricerca della soluzione (di base) ottima.

Algoritmo del simplesso (forma matriciale)

1. Siano $\beta[1], \dots, \beta[m]$ gli indici delle colonne di una **base iniziale**.
2. Poni $B = [A_{\beta[1]} \dots A_{\beta[m]}]$ e calcola B^{-1} e $u^T = c_B^T B^{-1}$
3. Calcola i **costi ridotti**: $\bar{c}_h = c_h - u^T A_h$ per le variabili x_h fuori base.
4. Se $\bar{c}_h \geq 0$ per ogni x_h fuori base, **STOP**: B è **OTTIMA**.
5. Scegli una qualsiasi x_h fuori base con $\bar{c}_h < 0$.
6. Calcola $\bar{b} = B^{-1}b$ e $\bar{A}_h = B^{-1}A_h$
7. Se $\bar{a}_{ih} \leq 0, \forall i = 1 \dots m$, **STOP**: problema **ILLIMITATO**.
8. Calcola $t = \arg \min_{i=1 \dots m} \{\bar{b}_i / \bar{a}_{ih}, \bar{a}_{ih} > 0\}$.
9. Aggiorna la base corrente: $\beta[t] \leftarrow h$.
10. Torna al passo 2.

Luigi De Giovanni - Ricerca Operativa - 6. Metodo del simplesso

6.9

Sistema in forma matriciale: tableau

- Funzione obiettivo come ulteriore equazione nella variabile: z
 $z = c^T x \implies 0 = c^T x - z$
- Sistema complessivo in forma di matrice: **tableau del simplesso**:

| | | x_1 | \dots | x_n | z |
|--------|-----|-------|---------|-------|----------|
| riga 0 | 0 | c^T | | | -1 |
| riga 1 | | A | | | 0 |
| ... | b | | | | \vdots |
| riga m | | | | | 0 |

- Data una base B ($A = [B|F]$)

| | | x_1 | \dots | x_m | x_{m+1} | \dots | x_n | z |
|--------|-----|---------|---------|-------|-----------|---------|-------|----------|
| riga 0 | 0 | c_B^T | | | c_F^T | | | -1 |
| riga 1 | | B | | | F | | | 0 |
| ... | b | | | | | | | \vdots |
| riga m | | | | | | | | 0 |

Luigi De Giovanni - Ricerca Operativa - 6. Metodo del simplesso

6.10

Tableau in forma canonica

- Sistema in forma canonica rispetto alla base B :

$$\begin{cases} z = c_B B^{-1}b + (c_F^T - c_B^T B^{-1}F)x_F = z_B + 0^T x_B + \bar{c}_F x_F \\ x_B = B^{-1}b - B^{-1}F x_F = \bar{b} - \bar{F} x_F \end{cases}$$

- Tableau in forma canonica rispetto alla base B :

| | | $x_{\beta[1]}$ | \dots | $x_{\beta[m]}$ | $x_{\beta[m+1]}$ | \dots | $x_{\beta[n]}$ | z |
|----------------|-----------|----------------|---------|----------------|------------------|---------|----------------|----------|
| $-z$ | $-z_B$ | 0^T | | | \bar{c}_F^T | | | -1 |
| $x_{\beta[1]}$ | \bar{b} | I | | | \bar{F} | | | 0 |
| \vdots | | | | | | | | \vdots |
| $x_{\beta[m]}$ | | | | | | | | 0 |

- Osservazioni:

- Portare in forma canonica equivale a pre-moltiplicare il tableau originario per B^{-1} .
- La colonna z rimane invariata e può essere omessa.
- Il valore in alto a sinistra riporta l'opposto del valore della funzione obiettivo per la base corrente.

Luigi De Giovanni - Ricerca Operativa - 6. Metodo del simplesso

6.11

Operazione di Pivot

- Il tableau in forma canonica contiene tutti gli elementi necessari:

| | | $x_{\beta[1]}$ | \dots | $x_{\beta[m]}$ | $x_{\beta[m+1]}$ | \dots | x_h | \dots | $x_{\beta[n]}$ |
|----------------|-------------|----------------|---------|----------------|---|---------|-------------|---------|----------------------|
| z | $-z_B$ | 0^T | | | $\bar{c}_{\beta[m+1]}$ | \dots | \bar{c}_h | \dots | $\bar{c}_{\beta[n]}$ |
| $x_{\beta[1]}$ | \bar{b}_1 | I | | | $\bar{A}_{\beta[m+1]} \dots \bar{A}_h \dots \bar{A}_{\beta[n]}$ | | | | |
| \vdots | \vdots | | | | | | | | |
| $x_{\beta[m]}$ | \bar{b}_m | | | | | | | | |

- Il tableau in forma canonica è ottenibile con operazioni elementari sul tableau del simplesso (Gauss-Jordan).
- Per passare dalla forma canonica rispetto a una base B alla forma canonica rispetto ad una base adiacente $\tilde{B} = B \setminus A_{\beta[t]} \cup A_h$, le operazioni sono equivalenti all'operazione di pivot sull'elemento \bar{a}_{th} :

$$\begin{aligned} \bar{a}_{tj} &\leftarrow \frac{\bar{a}_{tj}}{\bar{a}_{th}} \\ \bar{a}_{ij} &\leftarrow \bar{a}_{ij} - \frac{\bar{a}_{tj}}{\bar{a}_{th}} \bar{a}_{ih} \end{aligned}$$

Luigi De Giovanni - Ricerca Operativa - 6. Metodo del simplesso

6.12