Ricerca Operativa

A.A. 2007/2008

9. Simplesso: metodo delle due fasi, convergenza e simplesso revisionato

Base ammissibile iniziale

E immediato individuare una base ammissibile iniziale:

- se il tableau è in forma (canonica)

		$x_{\beta[1]} \; \dots \; x_{\beta[m]}$	x_F
$-z$	$-z_B$	0^T	$\bar{c}_F^T$
$x_{\beta[1]}$ $\vdots$ $x_{\beta[m]}$	$\bar{b} \geq 0$	I	$\bar{F}$

$$B = \left[A_{\beta[1]}|A_{\beta[2]}|\dots|A_{\beta[m]}\right],\; x_B^T = \left[x_{\beta[1]} x_{\beta[2]} \dots x_{\beta[m]}\right] = \bar{b},\; x_F = 0$$

- se il problema è $\min c^T x$ s.t. $\boxed{Ax \leq b,}\; x \geq 0$ con $b \geq 0$
  Trasformando in forma standard si ha:

$$\min c^T x, \text{ s.t. } Ax + Is = b,\; x, s \geq 0$$
$$\boxed{B = I,\; x_B = s} = b,\; x_F = x = 0$$

Metodo delle 2 fasi: fase I

- Consideriamo un problema in forma standard

$$\min c^T x \ \text{ s.t. } \ Ax = b, \ \ x \geq 0 \ \ (b \geq 0)$$

- **FASE I**: individua una base ammissibile iniziale risolvendo il PROBLEMA ARTIFICIALE

$$\begin{aligned} w^* = \ \min w = \ & Iy \\ \text{s.t.} \quad & Ax + Iy = b \\ & x, y \geq 0 \end{aligned} \qquad y \in \mathbb{R}^m_+ \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

Variabili artificiali

- Si applica il simplesso con base iniziale

$$B = I, \ x_B = y$$

$\boxed{w}$			
	0	0^T	1^T
	b	A	I

Previe operazioni elementari sulla riga 0 per ottenere 0^T

Individuazione base iniziale

Se $\boldsymbol{w^*} > \mathbf{0}$ ($\boldsymbol{y^*} > \mathbf{0}$): problema NON AMMISSIBILE

- STOP: non è possibile individuare una base iniziale

Se $\boldsymbol{w^*} = \mathbf{0}$ ($\boldsymbol{y^*} = \mathbf{0}$): problema AMMISSIBILE

- Tableau finale della FASE I (caso $\boldsymbol{y}$ fuori base)

		$x_{\beta[1]} \ \cdots \ x_{\beta[m]}$	x_F	y^T
$\boxed{-w}$	$-w^* = 0$	0^T	$\bar{c}_F^T \geq 0$	$\bar{c}_y \geq 0$
$x_{\beta[1]}$ $\vdots$ $x_{\beta[m]}$	$\bar{b}$	I	$\bar{F}$	B^{-1}

- La base iniziale per il problema di partenza è

$$B = \left[A_{\beta[1]} | A_{\beta[2]} | \ldots | A_{\beta[m]}\right], \ x_B^T = \left[x_{\beta[1]} x_{\beta[2]} \ldots x_{\beta[m]}\right] = \bar{b}, \ x_F = 0$$

Fase II ($\boldsymbol{w^* = 0}$, caso y fuori base)

- Torno al problema di partenza: sostituzione della funzione obiettivo

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & & x_{\beta[1]} \;\dots\; x_{\beta[m]} & x_F & \cancel{y^T} \\
\hline
\boxed{-z} & 0 & c_B^T & c_F^T & \\
\hline
\begin{matrix} x_{\beta[1]} \\ \vdots \\ x_{\beta[m]} \end{matrix} & \bar{b} & I & \bar{F} & \\
\hline
\end{array}
$$

- Passo alla forma canonica (operazioni elementari)

$$
\begin{array}{c|c|c|c|}
 & & x_{\beta[1]} \;\dots\; x_{\beta[m]} & x_F \\
\hline
-z & -z_B & \boxed{0^T} & \bar{c}_F^T \\
\hline
\begin{matrix} x_{\beta[1]} \\ \vdots \\ x_{\beta[m]} \end{matrix} & \bar{b} & I & \bar{F} \\
\hline
\end{array}
$$

- Applicazione del simplesso (Fase II) per risolvere il problema dato

Fase II ($\boldsymbol{w^* = 0}$, caso y in base)

- $\boldsymbol{w^* = 0} \Rightarrow$ soluzione degenere:
  $\exists\ h$: $y_h = 0$ in base (sulla riga i del tableau finale della FASE I)

$$
\begin{array}{c|c|c|c|}
 & & x_1 \;\dots\; x_j \;\dots\; x_n & y_1 \;\dots\; y_h \;\dots\; y_m \\
\hline
-w & -w^* = 0 & & 0 \\
\hline
 & & & 0 \\
 & & & 0 \\
y_h & 0 & \bar{a}_{i1} \;\dots\; \bar{a}_{ij} \;\dots\; \bar{a}_{in} & 1 \\
 & & & 0 \\
 & & & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

- Facendo pivot su **un** $\bar{a}_{ij} \neq 0$ **entra in base x_j** al posto di $\boldsymbol{y_h}$
  - Non è necessario $\bar{a}_{ij} > 0$: essendo $\vartheta = 0$ l'ammissibilità è garantita
  - Se $\bar{a}_{ij} = 0,\ \forall\ j = 1 \dots n$, allora la riga i è ridondante nel sistema $Ax=b$ e può essere eliminata
- Ripeto l'operazione per tutte le $y_h = 0$ in base

Convergenza del metodo del simplesso

- Il simplesso esplora $N(n,m) = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ soluzioni di base

- Se $\vartheta > 0$ ad ogni iterazione, la f.o. migliora di $\bar{c}_h \vartheta < \mathbf{0}$ ad ogni iterazione e, quindi, non considero mai la stessa base più di una volta

  $\Rightarrow$ convergenza in AL PIU\` $N(n,m)$ iterazioni

  Nota: “al più” perché

  - si visitano solo soluzioni ammissibili
  - non tutte le combinazioni di m colonne corrispondono ad una base

  La complessità del metodo del simplesso è $O(N(n,m))$.

  Mediamente, il numero di iterazioni è compreso tra m e $3/2\ m$

- Se $\vartheta = 0$ ad una certa iterazione, ci saranno un certo numero di iterazioni senza miglioramento della f.o. e si potrebbe tornare a visitare la stessa soluzione di base: il simplesso **potrebbe non convergere!**

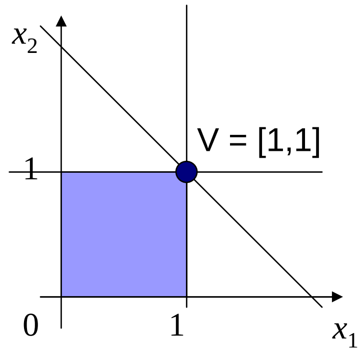
Convergenza e degenerazione

- Se $\vartheta = 0$, allora, necessariamente, siamo in presenza di soluzioni degeneri: $\exists\, \bar{b}_i = 0$ con $\bar{a}_{ih} > 0$ (altrimenti $\vartheta > 0$)
- Il simplesso passa da una soluzione degenere ad un’altra, ma tutte rappresentano lo stesso vertice: si potrebbe tornare sulla stessa soluzione di base (stesso tableau): *degenarazione ciclante*
- Esempio: il simplesso potrebbe ciclare all’infinito su B_1, B_2 e B_3

$$\begin{aligned} \min \quad & \ldots \\ s.t. \quad & x_1 \le 1 \\ & x_2 \le 1 \\ & x_1 + x_2 \le 2 \end{aligned} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix};\quad B2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix};\quad B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_{B_1} = x_{B_2} = x_{B_3} = [1,1,0,0,0] (= V)$$



Regola anticiclo di Bland

Tra tutte le variabili candidate a entrare/uscire dalla base, scegliere quella con indice minimo

- Entra in base x_h, dove $h = \min \{j : \bar{c}_j < 0\}$
- Esce dalla base $x_{\beta[t]}$, dove $\beta[t] = \min \{\beta[i] : \bar{b}_i / \bar{a}_{ih} = \vartheta\}$

Esempio

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
-z	-10	5	-1	0	-10	0	0	0
x_5	8	1	4	0	1	1	0	0
x_3	6	-1	3	1	0	0	0	0
x_6	1	0	-2	0	3	0	1	0
x_7	2	3	1	0	-2	0	0	1

Teorema: Utilizzando la regola di Bland, il simplesso converge SEMPRE in al più N(m,n) iterazioni.

Algoritmo del simplesso
(forma matriciale) - richiamo

1. Siano $\beta[1], ..., \beta[m]$ gli indici delle colonne di una **base iniziale**.
2. Poni $B = [A_{\beta[1]}|...|A_{\beta[m]}]$ e calcola B^{-1} e $u^T = c_B^T B^{-1}$
3. Calcola i **costi ridotti**: $\bar{c}_h = c_h - u^T A_h$ per le variabili x_h fuori base.
4. Se $\bar{c}_h \geq 0$ per ogni x_h fuori base, **STOP**: B è **OTTIMA**.
5. Scegli una qualsiasi x_h fuori base con $\bar{c}_h < 0$.
6. Calcola $\bar{b} = B^{-1}b$ e $\bar{A}_h = B^{-1}A_h$
7. Se $\bar{a}_{ih} \leq 0$, $\forall i = 1...m$, **STOP**: problema **ILLIMITATO**.
8. Calcola $t = \arg\min_{i=1...m} \{\bar{b}_i/\bar{a}_{ih}, \bar{a}_{ih} > 0\}$.
9. Aggiorna la base corrente: $\beta[t] \leftarrow h$.
10. Torna al passo 2.

Simplesso revisionato (*revised simplex*)

- Non tutti gli elementi del tableau sono necessari: basterebbero $\boldsymbol{B}^{-1}$ e $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}$
- Tableau esteso

$$
\begin{array}{c|c|ccc|c|c|}
 & & & & & x_1 \; \ldots \; x_m & x_{m+1} \; \ldots \; x_n \\
\hline
-z & 0 & 0 & \ldots & 0 & c_B^T & c_F^T \\
\hline
x_B & b & & I & & B & F \\
\hline
\end{array}
$$

- Tableau esteso in forma canonica rispetto a una base B

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & & & x_1 \; \ldots \; x_m & x_{m+1} \; \ldots \; x_n \\
\hline
-z & -u^T B & 0 - u^T I = -u^T & c_B^T - u^T B = 0^T & c_F^T - u^T F = \bar{c}_F^T \\
\hline
x_B & B^{-1} b & B^{-1} & I & B^{-1} F = \bar{A} \\
\hline
\end{array}
$$

- **Basta calcolare e memorizzare la matrice CARRY!**

Algoritmo del simplesso (revisionato)

1. Siano $\beta[1], \ldots, \beta[m]$ gli indici delle colonne di una **base iniziale**.
2. Poni $B = \left[A_{\beta[1]}|\ldots|A_{\beta[m]}\right]$ e calcola B^{-1}, $\bar{b} = B^{-1}b$ e $u^T = c_B^T B^{-1}$ con operazioni di pivot sul tableau esteso, **memorizzando solo la matrice CARRY**.
3. Calcola i **costi ridotti**: $\bar{c}_h = c_h - u^T A_h$ per le variabili x_h.
4. Se $\bar{c}_h \geq 0$ per ogni x_h fuori base, **STOP**: B è **OTTIMA**.
5. Scegli x_h fuori base con $\bar{c}_h < 0$ (eventuale regola anticiclo).
6. Calcola $\bar{A}_h = B^{-1} A_h$ e affianca alla matrice CARRY la colonna $\left[\begin{array}{c} \bar{c}_h \\ \hline \bar{A}_h \end{array}\right]$, corrispondente alla variabile x_h (operazione di **orlatura**).
7. Se $\bar{a}_{ih} \leq 0$, $\forall i = 1 \ldots m$, **STOP**: problema **ILLIMITATO**.
8. Calcola $t = \arg\min_{i=1\ldots m} \left\{\bar{b}_i / \bar{a}_{ih}, \bar{a}_{ih} > 0\right\}$ (eventuale regola anticiclo).
9. Aggiorna la base corrente: $\beta[t] \leftarrow h$ e **aggiornare** B^{-1}, $\bar{b}$ e u^T con un'operazione di pivot (elemento $\bar{a}_{th}$) sulla matrice CARRY orlata.
10. Elimina l'orlatura dalla matrice CARRY e torna al **passo 3**.

Aggiornamento della matrice CARRY

- CARRY iniziale $\Longrightarrow$ CARRY corrente orlato

$$
\begin{array}{c|c|c|}
\hline
-z & 0 & 0^T \\
\hline
x_{\beta[1]} & & \\
\vdots & & \\
x_{\beta[t]} & b & I \\
\vdots & & \\
x_{\beta[m]} & & \\
\hline
\end{array}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{array}{|c|c|}
\hline
-u^T B & -u^T \\
\hline
 & \\
 & \\
B^{-1}b & B^{-1} \\
 & \\
 & \\
\hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
x_h \\
\begin{array}{|c|}
\hline
\bar{c}_h \\
\hline
\bar{a}_{1h} \\
\vdots \\
\boxed{\bar{a}_{th}} \\
\vdots \\
\bar{a}_{1h} \\
\hline
\end{array}
\end{array}
$$

- CARRY aggiornato (con un semplice pivoting) per la nuova base $\tilde{B} = B \setminus \{A_{\beta[t]}\} \cup \{A_h\}$

Importante tracciare l'ORDINE con cui le colonne (o le variabili) compaiono nella base

$$
\begin{array}{c|c|c|}
\hline
-z & -\tilde{u}^T B & -\tilde{u}^T \\
\hline
x_{\beta[1]} & & \\
\vdots & & \\
x_h & \tilde{B}^{-1}b & \tilde{B}^{-1} \\
\vdots & & \\
x_{\beta[m]} & & \\
\hline
\end{array}
$$

Osservazioni

- La complessità computazionale del simplesso revisionato rimane $O(N(n,m))$.
- Il simplesso revisionato riduce significativamente i tempi di calcolo:
  - non è necessario aggiornare tutte le colonne (di solito $n >> m$) ma solo la colonna della variabile entrante;
  - l'operazione di orlatura + pivoting rappresenta un metodo efficiente per calcolare l'inversa di una base in modo incrementale, a partire dall'inversa di una base adiacente.
- Nel simplesso in forma di tableau, se si parte da un tableau in forma canonica, le colonne relative alla matrice identità sormontata da "0" nella riga dei costi ridotti hanno le stesse proprietà della matrice di CARRY: riportano, iterazione dopo iterazione, la B^{-1} e $-u^T$