
Ricerca Operativa

A.A. 2007/2008

10. Dualità in Programmazione Lineare

Soluzione di un problema di PL: “punti di vista”

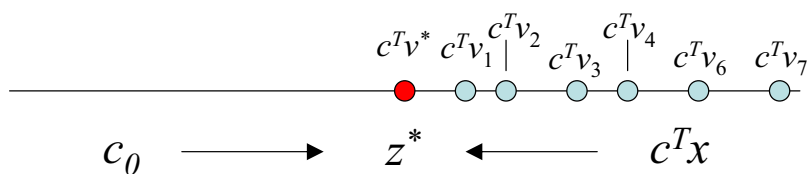
Problema di PL: Trovare il valore ottimo della funzione $c^T x$ su un poliedro $P = \{x \geq 0 : Ax = b\}$.

Punto di vista usuale (*primale*):

1. considero tutti gli $x \in P$ (o i soli vertici di P)
 2. calcolo $c^T x$
 3. scelgo il valore minimo
- $$\Rightarrow \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Punto di vista alternativo (*duale*):

1. ipotizzo un valore c_0 per la funzione obiettivo
 2. verifico $c_0 \leq c^T x, \forall x \in P$ (o vertici)
 3. scelgo il valore di c_0 massimo
- $$\Rightarrow \begin{array}{ll} \max & c_0 \\ & c_0 \leq c^T x, \forall x \in P \end{array}$$



Disuguaglianze valide

- Consideriamo il problema:

$$\begin{array}{ll} \max & c_0 \\ \text{s.t.} & c^T x \geq c_0, \forall x \in P \text{ (o soli vertici di } P) \end{array}$$

Trovare il massimo c_0 che sia termine noto di una disuguaglianza del tipo $c^T x \geq c_0$, soddisfatta da tutti i punti di P (disuguaglianza *valida* per P).

- Si tratterebbe di risolvere un problema con **1 variabile** (c_0) e tanti vincoli quanti sono i punti $x \in P$ (o, per il teorema fondamentale della programmazione lineare, i vertici di P).

In questo modello, x agisce da parametro e non da variabile: al variare di x in P (o nei vertici di P) si generano dei vincoli diversi. Ad esempio, fissando $x = \bar{x}$, si ottiene il vincolo $c_0 \leq \bar{z}$, dove $\bar{z}$ è uno scalare $\bar{z} = c^T \bar{x}$.

- Comunque **troppi vincoli!** [infiniti o $\binom{n}{m}$]

Serve una caratterizzazione algebrica delle disuguaglianze del tipo
 $c^T x \geq c_0$, valida per P

Disuguaglianze valide: condizioni sufficienti

Cerchiamo condizioni (necessarie e sufficienti) perché $c^T x \geq c_0$ sia valida per P .

- $x \in P \Rightarrow Ax = b \Rightarrow u^T Ax = u^T b, \forall u \in \mathbb{R}^m$

--> Scegliamo opportuni u (moltiplicatori delle combinazioni lineari dei vincoli).

- Sotto la condizione $u^T A \leq c^T$ (ed essendo $x \geq 0$) si ha:

$$c^T x \geq u^T Ax = u^T b \quad \rightarrow \quad \boxed{c^T x \geq u^T b, \forall x \in P}$$

- Con l'ulteriore condizione $u^T b \geq c_0$ si ha:

$$c^T x \geq u^T b \geq c_0 \quad \rightarrow \quad \boxed{c^T x \geq c_0, \forall x \in P}$$

In sintesi $\begin{cases} u^T A \leq c^T \\ u^T b \geq c_0 \end{cases}$ è condizione sufficiente perché $c^T x \geq c_0$ sia valida per P .
Cioé

$$\exists u \in \mathbb{R}^m : u^T A \leq c^T \wedge u^T b \geq c_0 \quad \Rightarrow \quad c^T x \geq c_0, \forall x \in P$$

Disuguaglianze valide: condizioni necessarie

Le condizioni sono anche necessarie (Se $P \neq \emptyset$):

$$c^T x \geq c_0 \text{ valida per } P \Rightarrow \exists u \in R^m : u^T A \leq c^T \wedge u^T b \geq c_0$$

Dimostrazione

◇ validità $\Rightarrow c_0 \leq z^* = \min\{c^T x : x \in P\} \Rightarrow z^*$ limitato $\Rightarrow$ il semplice converge alla soluzione ottima di base $[x_B^*, x_F^*]$.

◇ Scegliamo $u^T = c_B^T B^{-1}$:

$$a) \bar{c}^T = c^T - c_B^T B^{-1} A = c^T - u^T A$$

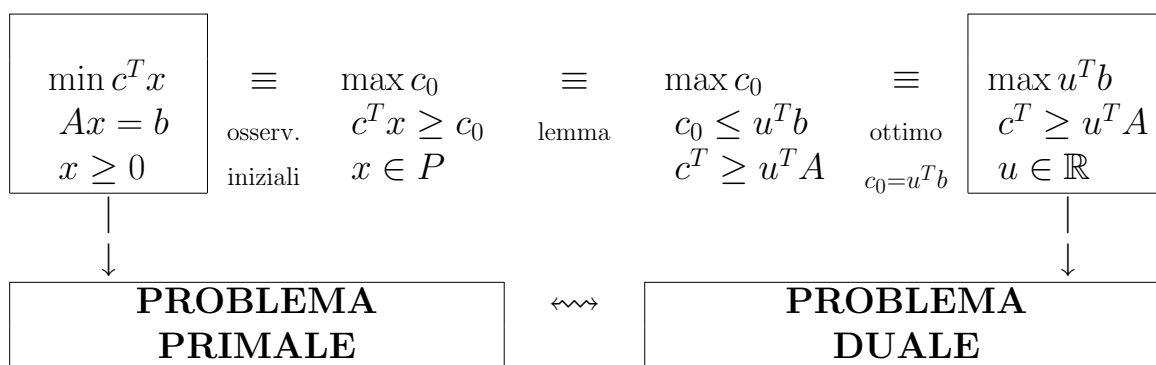
$$\bar{c}^T \geq 0 \text{ (} x^* \text{ è ottimo)} \Rightarrow \boxed{c^T \geq u^T A}$$

$$b) c_0 \leq z^* = c^T x^* = c_B^T x_B^* + \underbrace{c_F^T x_F^*}_{=0} = c_B^T B^{-1} b = u^T b \Rightarrow \boxed{c_0 \leq u^T b} \blacksquare.$$

Lemma (caratterizzazione algebrica delle disuguaglianze valide): Dato $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$, $P \neq \emptyset$:

$$c^T x \geq c_0, \forall x \in P \iff \exists u \in R^m : u^T A \leq c^T \wedge u^T b \geq c_0$$

Coppia di problemi primale-duale (forma asimmetrica)



variabile $x_j \in \mathbb{R}_+$

$\longleftrightarrow$ vincolo $c_j \geq u^T A_j$

vincolo $a_i^T x = b_i$

$\longleftrightarrow$ variabile $u_i \in \mathbb{R}$

costi c^T

$\longleftrightarrow$ termini noti c^T

termini noti b_i

$\longleftrightarrow$ costi b_i

Duale di un problema in forma simmetrica

Nella forma asimmetrica siamo partiti da un PL in forma standard

$$\min c^T x : Ax = b, x \geq 0$$

con l'obiettivo di minorare $c^T x$ con c_0 :

$$c^T x \geq^{(1)} u^T Ax =^{(2)} u^T b \geq c_0$$

(1) variabile primale $x \geq 0 \Rightarrow$ vincolo duale di disuguaglianza $c^T \geq u^T A$.

(2) vincolo primale di uguaglianza $\Rightarrow$ variabile duale u non vincolata in segno.

Consideriamo il problema primale nella forma (canonica)

$$\min c^T x : Ax \geq b, x \geq 0$$

$$c^T x \geq u^T Ax \geq u^T b \geq c_0$$

$\downarrow$

$\downarrow$

$$u^T A \leq c^T$$

se $u \geq 0$ (vincolo di $\geq \Rightarrow$ variabile duale ≥ 0)

$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array}$	$\equiv$	$\begin{array}{ll} \max & u^T b \\ \text{s.t.} & u^T A \leq c^T \\ & u \geq 0 \end{array}$
---	----------	--

Trasformazioni primale-duale

In generale, bisogna considerare **singularmente** ciascuna variabile e ciascun vincolo.

Primale (min)	Duale (max)
$a_i^T x \geq b_i$	$u_i \geq 0$
$a_i^T x \leq b_i$	$u_i \leq 0$
$a_i^T x = b_i$	u_i libera
$x_j \geq 0$	$u^T A_j \leq c_j$
$x_j \leq 0$	$u^T A_j \geq c_j$
x_j libera	$u^T A_j = c_j$

Esempio

$$\begin{array}{llll}
 \min & 10x_1 & +20x_2 & \\
 \text{s.t.} & 2x_1 & -x_2 & \geq 1 \\
 & & x_2 & +x_3 \leq 2 \\
 & x_1 & & -2x_3 = 3 \\
 & & 3x_2 & -x_3 \geq 4 \\
 & x_1 & & \geq 0 \\
 & & x_2 & \leq 0 \\
 & & & x_3 \text{ libera}
 \end{array}
 \implies
 \begin{array}{llll}
 \max & u_1 & +2u_2 & +3u_3 +4u_4 \\
 \text{s.t.} & u_1 & & \geq 0 \\
 & & u_2 & \leq 0 \\
 & & & u_3 \text{ libera} \\
 & & & u_4 \geq 0 \\
 & 2u_1 & & +u_3 \leq 10 \\
 & -u_1 & +u_2 & +3u_4 \geq 20 \\
 & & u_2 & -2u_3 -u_4 = 10
 \end{array}$$

Teoremi della dualità

• Il duale del duale coincide con il primale

Dimostrazione (ricordando che $(XY)^T = Y^T X^T$):

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{array}{l} \min c^T x \\ \text{s.t. } Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{array} \right. &\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \max u^T b \\ \text{s.t. } u^T A \leq c^T \\ u \geq 0 \end{array} \right. \equiv \left\{ \begin{array}{l} -\min -u^T b \\ \text{s.t. } -u^T A \geq -c^T \\ u \geq 0 \end{array} \right. \equiv \left\{ \begin{array}{l} -\min (-b^T)u \\ \text{s.t. } (-A^T)u \geq -c^T \\ u \geq 0 \end{array} \right. \rightarrow \\
 \left\{ \begin{array}{l} -\max y^T(-c) \\ \text{s.t. } y^T(-A^T) \leq -b^T \\ y \geq 0 \end{array} \right. &\equiv \left\{ \begin{array}{l} \min y^T c \\ \text{s.t. } y^T A^T \geq b^T \\ y \geq 0 \end{array} \right. \equiv \left\{ \begin{array}{l} \min c^T y \\ \text{s.t. } Ay \geq b \\ y \geq 0 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Sostituendo x a y si ha l'asserto ■

- **Teorema della dualità forte**: i valori ottimi (se esistono finiti) delle funzioni obiettivo del primale e del duale coincidono.

$$\left\{ \begin{array}{l} P = \{x \geq 0 : Ax \geq b\} \\ P \neq \emptyset \\ z^* = \min\{c^T x : x \in P\}, z^* \text{ finito} \end{array} \right. \implies \begin{array}{l} z^* = \omega^* = \\ = \max\{u^T b : u^T A \leq c^T, u \geq 0\} \end{array}$$

Dim. Deriva dalle precedenti osservazioni ■

Teoremi della dualità

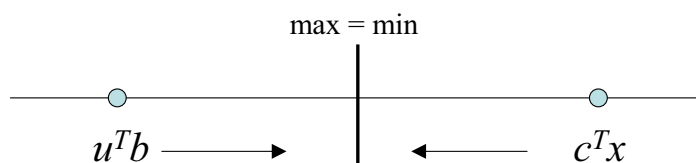
- **Nota:** il teorema della dualità forte NON vale se il problema primale è illimitato o impossibile.

- **Teorema della dualità debole:**

$$\begin{cases} P = \{x \geq 0 : Ax \geq b\}, P \neq \emptyset \\ D = \{u \geq 0 : u^T A \leq c^T\}, D \neq \emptyset \\ \bar{x} \in P, \bar{u} \in D \end{cases} \Rightarrow \bar{u}^T b \leq c^T \bar{x}$$

Dimostrazione:

$$\begin{array}{ccccc} \bar{u}^T b & \leq & \bar{u}^T A \bar{x} & \leq & c^T \bar{x} \\ u^T \geq 0 & & x \geq 0 & & \blacksquare \\ b \leq Ax & & u^T A \leq c^T & & \end{array}$$



Teoremi della dualità

- **Corollario: casi possibili.**

$$(PP) : z^* = \min\{c^T x : Ax \geq 0, x \geq 0\}$$

$$(PD) : \omega^* = \max\{u^T b : u^T A \leq c^T, u \geq 0\}$$

		(PD)		
		Finito	Illimitato	Impossibile
(PP)	Finito	1 ($z^* = \omega^*$)	NO	NO
	Illimitato	NO	NO	2
	Impossibile	NO	3	4

Dimostrazione.

Caso 1. Da dualità forte.

Casi 2 e 3. Da dualità debole.

Caso 4. Dalla seguente coppia primale/duale (entrambi i problemi sono impossibili)

$$\begin{array}{ll} \min x_1 & \max u_1 + u_2 \\ s.t. & x_1 + x_2 \geq 1 \quad s.t. \quad u_1 - u_2 = 1 \\ & -x_1 - x_2 \geq 1 \quad u_1 - u_2 = 0 \\ & x_1, x_2 \text{ libere} \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Gli altri casi sono esclusi dalla dualità debole/forte ■

Interpretazione economica: problema della dieta

c_j : costo unitario alimento j ($j = 1..n$);

a_{ij} : tasso di presenza della sostanza i ($i = 1..m$) nell'alimento j ;

b_i : fabbisogno minimo sostanza i (in grammi).

Punto di vista di un allevatore

variabile decisionale x_j : quantità (in grammi) della sostanza j da acquistare.

$$\begin{aligned} z^* = \min \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j && \text{(minimizzare i costi)} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad \forall i = 1..m && \text{(soddisfazione fabbisogni)} \\ & x_j \geq 0, \quad \forall j = 1..n \end{aligned}$$

Interpretazione economica: problema della dieta

Duale

$$\begin{aligned} \omega^* = \max \quad & \sum_{i=1}^m b_i u_i && (1) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m a_{ij} u_i \leq c_j, \quad \forall j = 1..n && (2) \\ & u_i \geq 0, \quad \forall i = 1..m \end{aligned}$$

Interpretazione: punto di vista di un produttore di mescole sintetiche

- variabile decisionale u_i : prezzo unitario di vendita della mescola di sostanza i .
- obiettivo (1): massimizzare i ricavi di vendita (l'allevatore acquista la quantità di sostanze di cui necessita, cioè b_i al prezzo u_i)
- vincolo (2): competitività dei prezzi di vendita, altrimenti l'allevatore preferirà acquistare gli alimenti attualmente sul mercato.
- dualità debole: $\omega \leq z$. Il guadagno del produttore di mescole e la spesa dell'allevatore si limitano a vicenda.
- Dualità forte: $\omega^* = z^*$. Il mercato tende all'equilibrio: se i mercati diminuiscono i c_j , il produttore dovrà diminuire gli u_i . Se aumentano i c_j , anche il produttore può aumentare gli u_i . Il mercato offrirà all'allevatore alternative economicamente equivalenti.

Interpretazione economica: problema dei trasporti

c_{ij} : costo unitario di trasporto dal magazzino $i = 1..I$ al centro $j = 1..J$;

a_i : disponibilità nel magazzino i ;

b_j : richiesta del cliente j .

Punto di vista di un'azienda di produzione

variabile decisionale: x_{ij} : quantità trasportata da i a j .

$$\begin{aligned} z^* = \min \quad & \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J c_{ij} x_{ij} && \text{(minimizzare i costi)} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^J x_{ij} \leq a_i, \quad \forall i = 1..I && \text{(disponibilità magazzini)} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^I x_{ij} \geq b_j, \quad \forall j = 1..J && \text{(richiesta clienti)} \\ & x_{ij} \geq 0, \quad \forall i = 1..I, j = 1..J \end{aligned}$$

Interpretazione economica: problema dei trasporti

Duale

$$\begin{aligned} \omega^* = \max \quad & \sum_{i=1}^I a_i u_i + \sum_{j=1}^J b_j v_j && (1) \\ \text{s.t.} \quad & u_i + v_j \leq c_{ij}, \quad \forall i = 1..I, j = 1..J && (2) \\ & u_i \leq 0, \quad \forall i = 1..I \\ & v_j \geq 0, \quad \forall j = 1..J \end{aligned}$$

Interpretazione: punto di vista di una ditta di trasporti che acquista i prodotti nei magazzini, cura il trasporto e poi li vende ai clienti.

- variabili decisionali

$u_i \leq 0$: prezzo unitario di acquisto dei prodotti nel magazzino i (in valore assoluto);

$v_j \geq 0$: prezzo di vendita al cliente j .

- Domande: sotto quali condizioni la ditta di trasporti riuscirà ad avere in appalto il servizio di trasporto (da vincoli duali)? Quanto potrà guadagnare al massimo (da dualità debole/forte)?