
Ricerca Operativa

A.A. 2007/2008

11. Condizioni di ottimalità primale-duale

Condizioni di ottimalità

- Dalle osservazioni precedenti si ricava che, dati:

$$\begin{array}{lll} (PP) \min c^T x & (PD) \max u^T b & \text{due vettori} \\ \text{s.t. } Ax \geq b & \text{s.t. } u^T A \leq c^T & \bar{x} \in \mathbb{R}^n \\ x \geq 0 & u \geq 0 & \bar{u} \in \mathbb{R}^m \end{array}$$

si hanno le seguenti condizioni di ottimalità:

$\bar{x}$ e $\bar{u}$ ottime primale e duale (risp.)	$\iff$	$\bar{x}$ è ammissibile primale: $A\bar{x} \geq b \wedge \bar{x} \geq 0$ $\bar{u}$ è ammissibile duale: $\bar{u}^T A \leq c^T \wedge \bar{u} \geq 0$ vale la dualità forte: $c^T \bar{x} = \bar{u}^T b$
---	--------	---

- Nota: le condizioni sono valide anche per soluzioni non di base e possono essere estese a coppie di problemi in qualsiasi forma.

Esercizio

Trovare la soluzione ottima del seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{array}{ll} \max & z = -x_1 - x_3 \\ \text{s.t.} & x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 = 20 \\ & x_1, x_2, x_3 \text{ libere} \end{array}$$

Suggerimento: la presenza di soli vincoli di uguaglianza e di sole variabili libere suggerisce l'applicazione diretta delle condizioni di ottimalità primale duale, impostando un sistema di equazioni lineari contenente i vincoli del primale (di uguaglianza) i vincoli del duale (variabili primali libere $\Rightarrow$ vincoli del duale di uguaglianza) e il vincolo di uguaglianza tra la funzione obiettivo primale e la funzione obiettivo duale.

Risultato: infinite soluzioni ottime del tipo $x_1 = 11 - \frac{1}{3}x_3$, $x_2 = -2 - \frac{1}{3}x_3$.

Condizioni di ortogonalità

Le condizioni di ottimalità possono essere espresse nella seguente forma.

Teorema: condizioni di ortogonalità (o di complementarietà) primale duale. Data la coppia di problemi primale-duale

$$\begin{array}{l} \min\{c^T x : x \geq 0, Ax \geq b\} \text{ e} \\ \max\{u^T b : u \geq 0, u^T A \leq c^T\}: \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x \text{ e } u \text{ ottime} \\ \text{primale e duale (risp.)} \end{array} \iff \left. \begin{array}{ll} Ax \geq b \wedge x \geq 0 & (\text{ammissibilità primale}) \\ u^T A \leq c^T \wedge u \geq 0 & (\text{ammissibilità duale}) \\ u^T(Ax - b) = 0 & \\ (c^T - u^T A)x = 0 & \end{array} \right\} \text{ (ortogonalità)}$$

Dimostrazione

...

Condizioni di ortogonalità: conseguenze

Le condizioni di ortogonalità di due soluzioni ammissibili e ottime x e u possono essere scritte come segue.

$$\begin{aligned}u^T(Ax - b) &= \sum_{i=1}^m u_i(a_i^T x - b_i) = 0 \\(c^T - u^T A)x &= \sum_{j=1}^n (c_j - u^T A_j)x_j = 0\end{aligned}$$

Ricordando che, per l'ammissibilità dei problemi primale e duale TUTTI i fattori sono ≥ 0 , si ha che, all'ottimo:

$$\begin{aligned}u_i(a_i^T x - b_i) &= 0, \quad \forall i = 1 \dots m \\(c_j - u^T A_j)x_j &= 0, \quad \forall j = 1 \dots n\end{aligned}$$

- **Le condizioni di ortogonalità (o complementarietà) sono rispettate per ciascun vincolo $\leftrightarrow$ variabile primale $\leftrightarrow$ duale**

Condizioni di ortogonalità: implicazioni

- Siano u e x soluzioni ammissibili di una coppia di problemi primale-duale $\min\{c^T x : x \geq 0, Ax \geq b\}$ e $\max\{u^T b : x \geq 0, u^T A \leq c^T\}$. x e u sono ottime se e solo se:

1) variabile primale positiva	$x_j > 0 \Rightarrow u^T A_j = c_j$	vincolo duale saturo
2) vincolo duale <i>lasco</i>	$u^T A_j < c_j \Rightarrow x_j = 0$	variabile primale nulla
3) variabile duale positiva	$u_i > 0 \Rightarrow a_i^T x = b_i$	vincolo primale saturo
4) vincolo primale <i>lasco</i>	$a_i^T x > b_i \Rightarrow u_i = 0$	variabile duale nulla

- Nota: le implicazioni sono valide solo nel verso $\Rightarrow$ dato!
- Le implicazioni possono essere estese a coppie primale-duale in qualsiasi forma. Ad esempio, se il primale è in forma standard, le condizioni 3) e 4) non sono da considerarsi, perché già contenute nell'ammissibilità primale.

Esercizio

Verificare se la soluzione $x_1 = 8$, $x_2 = 3$ è ottima per il problema:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 4x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 \leq 16 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 17 \\ & x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Suggerimento: scrivere il duale e le relative condizioni di complementarietà. Utilizzare tali condizioni per ricavare dei valori delle variabili duali, una volta fissate le variabili primali ai valori suggeriti. Se i valori ricavati per le variabili primali sono ammissibili per il problema duale, allora la soluzione primale suggerita è ottima: siamo infatti in presenza di soluzioni primale e duale ammissibili (per verifica) e in scarti complementari (per costruzione), quindi ottime.

Risultato: la soluzione proposta è ottima.

Esempio

Per soddisfare la richiesta di acciai speciali, un'azienda di produzione ha bisogno di 11 quintali di cromo, 2 di molibdeno e 1 di manganese. Il mercato offre confezioni di due tipi. la prima contiene 3 chilogrammi di cromo e 1 di manganese e costa 200 euro, la seconda contiene 1 chilogrammo di cromo e 1 di molibdeno e costa 300 euro. Attualmente, l'azienda acquista 300 confezioni di tipo 1 e 200 confezioni di tipo 2. Si vuole:

1. verificare che l'azienda implementi una politica di approvvigionamento ottima;
2. valutare se la politica deve essere cambiata in seguito alla disponibilità sul mercato di un terzo e di un quarto tipo di confezioni. Il terzo contiene 2 chilogrammi di cromo e 1 di manganese e costa 2 euro. Il quarto contiene 2 chilogrammo di cromo e 1 di molibdeno e costa 4 euro.

Nota: all'azienda interessa conoscere come si compone la politica ottima di approvvigionamento solo in modo approssimativo ed espresso in centinaia di confezioni. Per questo motivo il modello può essere espresso tramite variabili continue e può essere applicata la teoria della dualità in programmazione lineare.

Esempio: traccia di soluzione

- Scriviamo innanzitutto il modello del problema. Le variabili sono x_i : numero di centinaia di confezioni di tipo $i = 1..2$ da acquistare. Visto che interessa una soluzione approssimata, possiamo considerare continue tali variabili, invece che intere, come suggerisce la loro natura.

$$\begin{array}{ll} \min & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} & 3x_1 + x_2 \geq 11(u_1) \\ & x_2 \geq 2(u_2) \\ & x_1 \leq 1(u_3) \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

- Risolvere il punto 1. significa semplicemente verificare l'ottimalità della soluzione $x_1 = 3, x_2 = 2$. Il risultato è positivo: la politica è ottima.
- Per risolvere il punto 2 si consideri che le nuove opportunità si traducono, dal punto di vista primale, in due nuove variabili. Dal punto di vista duale, si hanno due nuovi vincoli ($2u_1 + u_3 \leq 2$ e $2u_1 + u_2 \leq 4$). Si possono verificare due casi:
 - a) i vincoli sono verificati dalle variabili duali ottime ottenute al punto 1. Allora la soluzione ottima duale non cambia e, per la dualità forte, neanche la soluzione ottima del primale, cioè l'aggiunta di due nuove alternative non inficia l'ottimalità della politica attualmente adottata dall'azienda.

-
- b) i vincoli non sono verificati dalle variabili duali ottime ottenute al punto 1. Quindi la soluzione ottima del duale cambia e, in particolare, avendo aggiunto ulteriori vincoli, peggiora, cioè diminuisce (funzione obiettivo duale di max). Sempre per la dualità forte, il valore della funzione obiettivo del primale corrispondente (quello con due nuove variabili) sarà uguale al nuovo valore ottimo del duale, quindi più basso di prima. Ne risulta che la politica attuale potrebbe essere migliorata sfruttando le nuove confezioni offerte dal mercato.
- Risultato: caso a).

Esercizio

Dato il problema

$$\begin{array}{ll} \max & z = x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} & x_2 \leq 1 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ & -x_1 - 3x_2 \leq 10 \\ & -x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \text{ libera} \end{array}$$

Verificare se le soluzioni $x^a = [2, -4]$ o $x^b = [5, -5]$ sono ottime.

Attenzione: il secondo vincolo duale sarà di uguaglianza (x_2 libera). Non potrà quindi essere sfruttato per scrivere una condizione di ortogonalità, ma può essere direttamente sfruttato come equazione nel sistema che cerca delle variabili duali ammissibili e in scarti complementari.

Risultato: x^a non è ottima. x^b è ottima.