Ricerca Operativa

A.A. 2007/2008

12. Algoritmo del simplesso duale

Condizioni di ottimimalità e algoritmo del simplesso

- Le condizioni di ottimalità per un problema in forma standard sono:

(1)	$Ax = b, x \geq 0$	(ammissibilità primale)
(2)	$u^T A \leq c^T$	(ammissibilità duale)
(3)	$(c^T - u^T A)x = 0$	(ortogonalità)

- L'algoritmo del simplesso, **ad ogni iterazione**, considera una partizione $A = [B, F]$ e:
  - calcola una soluzione ammissibile $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ **la (1) è soddisfatta**;
  - calcola i moltiplicatori $u^T = c_B^T B^{-1}$: risulta $(c^T - u^T A)x = (c_B^T - u^T B)x_B + (c_F^T - u^T F)x_F = 0^T x_B + \bar{c}_F^T 0 = 0$ $\Rightarrow$ **la (3) è soddisfatta**;
  - calcola i costi ridotti $\bar{c}^T = c^T - u^T A$ ed esegue un **test per** verificare che siano positivi: $\bar{c}^T \geq 0 \quad \equiv \quad$ **ammissibilità duale (2)**.
- L'algoritmo del simplesso parte da una soluzione ammissibile primale e considera, ad ogni iterazione, una diversa coppia di soluzioni primale x e duale u che sono
  - ammissibili primali (sempre),
  - in scarti complementari (sempre),
  - non ammissibili duali (solo alla fine u è soluzione ammissibile duale, e quindi la coppia x, u è ottima).

Approccio alternativo

- Un approccio alternativo parte da una soluzione ammissibile duale e considera, ad ogni iterazione, una diversa coppia di soluzioni primale x e duale u che sono
  - ammissibili duali (sempre) $\Rightarrow$ **la (2) è soddisfatta**;
  - in scarti complementari (sempre) $\Rightarrow$ **la (3) è soddisfatta**;
  - non ammissibili primali (**solo alla fine** x è soluzione ammissibile primale, cioè anche **la (1) è soddisfatta** e la coppia x, u è ottima).
- La condizione di ammissibilità duale è equivalente ad avere tutti i costi ridotti non negativi (ottimalità primale).
- Si considerano delle soluzioni di base ottime ma non ammissibili (*super-ottime*) e si cerca di convergere verso una soluzione di base ottima e ammissibile. Geometricamente si parte da intersezioni di vincoli esterne al poliedro ammissibile ma con valore della funzione obiettivo più che ottima e si cerca di arrivare su un vertice del poliedro (ammissibile) ottimo.
- L'approccio alternativo mantiene una soluzione duale ammissibile ed è detto **algoritmo del simplesso duale**. L'approccio "usuale" è detto algoritmo del simplesso *primale*.
- Attenzione: entrambi gli algoritmi servono per risolvere il problema primale!

Algoritmo del simplesso duale: osservazioni

- Consideriamo un tableau in forma canonica, relativo a una base (super)ottima $B = [A_1...A_m]$ ($\bar{c}_j \geq 0$, $\forall\, j = m+1...n$).

		x_1	...	x_t	...	x_m	x_{m+1}	...	x_h	...	x_n
$-z$	$-z_B$	0	...	0	...	0	$\bar{c}_{m+1}$	...	$\bar{c}_h$	...	$\bar{c}_n$
x_1	$\bar{b}_1$	1	...	0	...	0	$\bar{a}_{1,m+1}$	...	$\bar{a}_{1h}$	...	$\bar{a}_{1n}$
...	...	0		0		0	...	...		...	...
x_t	$\bar{b}_t$	0	...	1	...	0	$\bar{a}_{t,m+1}$	...	$\bar{a}_{th}$	...	$\bar{a}_{tn}$
...	...	0		0		0	...	...		...	...
x_m	$\bar{b}_m$	0	...	0	...	1	$\bar{a}_{m,m+1}$	...	$\bar{a}_{mh}$	...	$\bar{a}_{mn}$

- L'algoritmo si ferma quando si raggiunge l'ammissibilità primale, cioé quando $\bar{b}_i \geq 0$, $\forall\, i = 1...m$.
- Sia t una delle righe "non ammissibili", cioé tali che $b_t < 0$.
  - Se $\bar{a}_{tj} \geq 0$, allora $\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{tj} x_j \geq 0$, $\forall\, x \geq 0$: il problema primale è inammissibile (e il duale illimitato, visto che i moltiplicatori u associati al tableau rappresentano una soluzione ammissibile duale).
  - Altrimenti si può effettuare un'operazione di pivot su un opportuno $\bar{a}_{th} < 0$ per cambiare la base corrente facendo uscire la variabile $x_{\beta[t]}$ e facendo entare la variabile x_h con un valore positivo pari a $\bar{b}_t / \bar{a}_{th}$.

Algoritmo del simplesso duale: cambio base

- La variabile che esce dalla base è determinata dalla ricerca dell'ammissibilità: una qualsiasi $x_{\beta[t]} : \bar{b}_t < 0$.
- La scelta della variabile che entra in base è invece guidata dal mantenimento delle condizioni di ottimalità: costi ridotti non negativi.
- I nuovi costi ridotti $\tilde{c}_j$ si ottengono aggiornando con operazioni di pivot la prima riga del tableau. Assumendo che x_h sia la variabile che entra in base, si ottiene:

$$\tilde{c}_j = \bar{c}_j - \frac{\bar{c}_h}{\bar{a}_{th}}\bar{a}_{tj}, \ \forall\, j = 1...n$$

- Dobbiamo imporre $\tilde{c}_j \geq 0 \Rightarrow \bar{c}_j \geq \dfrac{\bar{c}_h}{\bar{a}_{th}}\bar{a}_{tj}, \ \forall\, j = 1...n$
- Se $\bar{a}_{tj} \geq 0$, la corrispondente disequazione risulta verificata ($\bar{a}_{th} \leq 0$ per garantire l'ammissibilità della variabile che entra in base);
- Se $\bar{a}_{tj} < 0$ (e considerando che $\bar{a}_{tj} = -|\bar{a}_{tj}|$ e $\bar{a}_{th} = -|\bar{a}_{th}|$)

$$\bar{c}_j \geq \frac{\bar{c}_h}{\bar{a}_{th}}\bar{a}_{tj} = \frac{\bar{c}_h}{-|\bar{a}_{th}|}(-|\bar{a}_{tj}|) \Rightarrow \frac{\bar{c}_j}{|\bar{a}_{tj}|} \geq \frac{\bar{c}_h}{|\bar{a}_{th}|}, \ \forall\, j : \bar{a}_{tj} < 0$$

- In definitiva, fissata la riga pivot t (esce dalla base $x_{\beta[t]}$), per mantenere l'ottimalità della nuova soluzione di base, **dobbiamo** far entrare una variabile x_h con

$$h = \arg \min_{j=1..n} \left\{ \frac{\bar{c}_j}{|\bar{a}_{tj}|} : \bar{a}_{tj} < 0 \right\}$$

Algoritmo del simplesso duale

1. Consideriamo un tableau iniziale in forma canonica, relativo a una base (super)ottima $B = [A_1...A_m]$ ($\bar{c}_j \geq 0, \ \forall\, j = m+1...n$).

		x_B^T	x_F^T
$-z$	$-z_B$	0^T	$\bar{c}_F^T \geq 0^T$
x_B	$\bar{b} = B^{-1}b$	I	$B^{-1}F = \{\bar{a}_{ij}\}$

2. Se $\bar{b}_i \geq 0, \ \forall\, i$, STOP: soluzione ottima.
3. Scegli un qualsiasi $t : \bar{b}_t < 0$.
4. Se $\bar{a}_{tj} \geq 0, \ \forall\, j$: STOP: problema primale impossibile.
5. Poni $h = \arg \min_{j=1...n} \left\{ \dfrac{\bar{c}_j}{|\bar{a}_{tj}|} : \bar{a}_{tj} < 0 \right\}$
6. Esegui l'operazione di pivot sull'elemento $\bar{a}_{th}$ e torna al passo 2.

Convergenza del simplesso duale

- Ad ogni iterazione il valore della funzione obiettivo aumenta (ci avviciniamo a una soluzione ammissibile primale e a una soluzione ottima duale).

  Infatti, passando dalla base B alla nuova base $\tilde{B}$: $-z_{\tilde{B}} = -z_B - \dfrac{\bar{c}_h}{\bar{a}_{th}} \bar{b}_t \leq -z_B \quad \Rightarrow \quad z_{\tilde{B}} \geq z_B$.

- A meno di degenerazione duale ($\bar{c}_h = 0$), la disuguaglianza è stretta e il simplesso duale converge in al più $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$ iterazioni.

- In caso di degenerazione, la convergenza non è garantita: si può utilizzare una regola anticiclo, ad esempio:

  Regola anticiclo di Bland (duale): In caso di alternative lecite, scegliere la variabile x_j uscente/entrante con indice j minimo.