Ricerca Operativa

A.A. 2007/2008

13. Analisi di sensitività

Analisi di Sensitività: motivazioni

- I parametri (A, b e c) di un problema di programmazione lineare sono soggetti a variazioni: cambiamento dei dati, approssimazioni, errori, stime etc.
- Data una soluzione ottima di base, l'analisi di sensitività analizza le conseguenze delle variazioni dei parametri sull'ottimalità (e l'ammissibilità) della base stessa.

$$\begin{array}{rl} \min & c^T x \\ s.t. & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad A = [B|F] \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} x_B \\ x_F \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} c_B \\ c_F \end{bmatrix}$$

condizioni di ottimalità per $\bar{x}$

(1) $x_B = B^{-1}b \geq 0$ ammissibilità primale

(2) $\bar{c}^T = c^T - c_B^T B^{-1} A \geq 0^T$ ammissibilità duale $\equiv$ costi ridotti non negativi

[(3) ortogonalità implicata dalla scelta $u^T = c_B^T B^{-1}$]

- **Sotto quali condizioni sulla variazione di A, b e c la base B rimane ammissibile e ottima?**
- Nota: non considereremo variazioni di A.

Variazioni dei termini noti

- $b \to b + \Delta b$, $(\Delta b \in \mathbb{R}^m)$
- Verifica delle condizioni di ottimalità:

  (1) $B^{-1}(b + \Delta b) \geq 0$ <u>da verificare</u>

  (2) $\bar{c}^T = c^T - c_B^T B^{-1} A \geq 0^T$ invariata
- Verificare il sistema di disequazioni nelle incognite Δb

  $\boxed{(S_b)\ B^{-1}\Delta b \geq -B^{-1} b}$ (poliedro dei vettori Δb che non cambiano la base ottima)
- Con variazioni contenute nei limiti, la base ottima non cambia. Cambiano:
  - il punto ottimo: $\bar{x}_{new} = B^{-1}(b + \Delta b)$
  - il valore ottimo: $z^*_{new} = c_B^T B^{-1} b + c_B^T B^{-1} \Delta b = z^*_{old} + \Delta z$

  All'ottimo (prima della variazione), le variabili duali sono $u^T = c_B^T B^{-1}$:

  $$\Delta z = c_B^T B^{-1} \Delta b = u^T \Delta b = \sum_{i=1}^{m} u_i \Delta b_i \quad \Rightarrow \quad u_i = \frac{\partial z}{\partial b_i}$$

  le variabili duali misurano la sensibilità della funzione obiettivo a (piccole) variazioni dei termini noti e sono dette anche *prezzi marginali*.

  Esempio: con f.o. di minimo e nei limiti dettati da (S_b), converrebbe: aumentare i termini noti cui corrispondono variabili duali negative e diminuire i termini noti con variabili duali positive.

Variazioni dei costi

- $c \to c + \Delta c$, $\left(\Delta c \in \mathbb{R}^n,\ \Delta c^T = [\Delta c_B^T, \Delta c_F^T]\right)$
- Verifica delle condizioni di ottimalità:

  (1) $B^{-1} b \geq 0$ invariata

  (2) $\bar{c}^T = (c^T + \Delta c^T) - (c_B^T + \Delta c_B^T) B^{-1} A \geq 0^T$ <u>da verificare</u>
- Verificare il sistema:

  $$\bar{c}^T = [\bar{c}_B^T, \bar{c}_F^T] = [\mathbf{0}, (c_F^T + \Delta c_F^T) - (c_B^T + \Delta c_B^T) B^{-1} F \geq 0^T] \quad \Leftrightarrow$$

  $$\Leftrightarrow \quad \boxed{(c_F^T + \Delta c_F^T) - (c_B^T + \Delta c_B^T) B^{-1} F \geq 0 \quad (S_c)}$$
- **Variazione dei costi delle variabili fuori base**: $c_F \to c_F + \Delta c_F$

  $$c_F^T - c_B^T B^{-1} F = c_F^T + \Delta c_F^T - c_B^T B^{-1} F \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\Delta c_F \geq -\bar{c}_F \quad (S_B)}$$

  $\Delta c_j \geq -\bar{c}_j$, $\forall\ x_j$ fuori base: il costo ridotto $\bar{c}_j$ è il *massimo decremento* di c_j che lascia invariata la base ottima.
- **Variazione dei costi delle variabili in base**: $c_B \to c_B + \Delta c_B$

  $$c_F^T - c_B^T B^{-1} F = c_F^T - (c_B^T + \Delta c_B^T) B^{-1} F \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\Delta c_B^T B^{-1} F \leq \bar{c}_F^T \quad (S_F)}$$

  Il sistema nelle incognite Δc_B rappresenta il poliedro dei vettori Δc_B per cui la base ottima rimane invariata.

Intervalli di stabilità

- Ammettendo la variazione di **un sono elemento per volta** (termine noto o costo), i sistemi (S_b), (S_B) e (S_F) si riducono a sistemi di disequazioni in una sola variabile (Δb_i o Δc_j).
- La soluzione del sistema definisce un intervallo $[\Delta^{MIN}, \Delta^{MAX}]$: se la variazione è contenuta nell'intervallo, la base rimane ottima.
- L'intervallo $[b_i + \Delta^{MIN}, b_i + \Delta^{MAX}]$ si dice ***intervallo di stabilità* del termine noto** b_i.
- L'intervallo $[c_j + \Delta^{MIN}, c_j + \Delta^{MAX}]$ si dice ***intervallo di stabilità* del costo** c_j.

Esempio

Sia dato il problema

$$\begin{array}{ll} \min & -3x_1 - x_2 - 3x_3 \\ s.t. & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ & 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6 \\ & x_i \geq 0 \end{array}$$

la cui base ottima corrisponde alle variabili x_1, x_3 e x_6.

1. Verificare se la base ottima varia nelle due ipotesi:
   a) si aumentano in termini noti del primo e del terzo vincolo rispettivamente di 1 e 2 unità;
   b) si diminuisce il primo termine noto di 1 unità e si aumenta il secondo termine noto di 2 unità.
2. Calcolare l'intervallo di stabilità del primo termine noto.
3. Verificare l'ottimalità/ammissibilità della base al variare dei coefficienti di costo secondo il seguente vettore: $\Delta c^T = [2 \quad -1 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \quad 1]$.
4. Calcolare l'intervallo di stabilità di c_1 (costo di variabile in base) e di c_4 (costo di variabile fuori base).

Esempio: considerazioni preliminari

- Tableau iniziale (bisogna riportare il problema alla forma standard!):

$$\begin{array}{r|r|rrrrrr|}
 & & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\
\hline
-z & 0 & -3 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
x_4 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
x_5 & 5 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\
x_6 & 6 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
\end{array}$$

- Tableau ottimo:

$$\begin{array}{r|r|rrrrrr|}
 & & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\
\hline
-z & \frac{27}{3} & 0 & \frac{7}{5} & 0 & \frac{6}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\
\hline
x_1 & \frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\
x_3 & \frac{8}{5} & 0 & \frac{3}{5} & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\
x_6 & 4 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
\hline
\end{array}$$

- Nota: considerando le colonne x_4, x_5 e x_6 come un CARRY, otteniamo:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, u^T = \begin{bmatrix} -\frac{6}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \end{bmatrix}$$

Inoltre, dal tableau: $B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1/5 & 8/5 & 4 \end{bmatrix}^T$, $\bar{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 7/5 & 0 & 6/5 & 3/5 & 0 \end{bmatrix}$

Esempio: punto 1

- Bisogna verificare solo l'ammissibilità (l'ottimalità rimane verificata).

$B^{-1}\Delta b \geq -B^{-1}b$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta b_1 \\ \Delta b_2 \\ \Delta b_3 \end{bmatrix} \geq - \begin{bmatrix} 1/5 \\ 8/5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{5}\Delta b_1 - \frac{1}{5}\Delta b_2 \geq -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5}\Delta b_1 + \frac{2}{5}\Delta b_2 \geq -\frac{8}{5} \\ -\Delta b_1 + \Delta b_3 \geq -4 \end{cases}$$

- caso a): $\Delta b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Sostituendo nel sistema, le tre disequazioni risultano verificate e quindi la base rimane ammissibile e ottima.

- caso b): $\Delta b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Sostituendo nel sistema, le tre disequazioni NON risultano verificate e quindi la base NON rimane ammissibile e ottima (è super-ottima).

Esempio: punto 2

- Bisogna considerare $\Delta b = \begin{bmatrix} \Delta b_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Il sistema di disequazioni precedente diventa:

  $$\begin{cases} \frac{3}{5}\Delta b_1 \geq -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5}\Delta b_1 \geq -\frac{8}{5} \\ -\Delta b_1 \geq -4 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \Delta b_1 \geq -\frac{1}{3} \\ \Delta b_1 \leq 8 \\ \Delta b_1 \leq 4 \end{cases}$$

  Quindi:

  $\Delta b_1 \in [-1/3, 4]$, cioé $b_1 \in [2 - 1/3, 2 + 4] = [5/3, 6]$.

- Analogamente, gli intervalli di stabilità di b_2 e di b_3 sono:

  $-4 \leq \Delta b_2 \leq 1 \quad \rightarrow \quad b_2 \in [1, 6]$

  $-4 \leq \Delta b_3 \quad \rightarrow \quad b_3 \in [2, +\infty)$

Esempio: punto 3

- Per il mantenimento dell'ottimalità della base (l'ammissibilità è comunque verificata) consideriamo separatamente le condizioni per le variabili in base e fuori base

  $c_B^T = [\ -3\ \ -3\ \ 0\ ]$, $c_F^T = [\ -1\ \ 0\ \ 0\ ]$

- per le variabili fuori base: $\Delta c_F \geq -\bar{c}_F$, cioé ($\Delta c_F^T = [\ \Delta c_2\ \ \Delta c_4\ \ \Delta c_5\ ]$):

  $\Delta c_2 \geq -7/5$, $\Delta c_4 \geq -6/5$, $\Delta c_4 \geq -3/5 \qquad (1)$

- per le variabili in base: $\Delta c_B^T B^{-1} F \leq \bar{c}_F^T$, cioé ($\Delta c_B^T = \ \Delta c_1\ \ \Delta c_3\ \ \Delta c_6\ $):

  $$[\ \Delta c_1\ \ \Delta c_3\ \ \Delta c_6\ ] \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [\ \Delta c_1\ \ \Delta c_3\ \ \Delta c_6\ ] \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \leq [\ \tfrac{7}{5}\ \ \tfrac{6}{5}\ \ \tfrac{3}{5}\ ]$$

  $$\begin{cases} \frac{1}{5}\Delta c_1 + \frac{1}{5}\Delta c_3 + \Delta c_6 \leq \frac{7}{5} \\ \frac{3}{5}\Delta c_1 - \frac{1}{5}\Delta c_3 - \Delta c_6 \leq \frac{6}{5} \\ -\frac{1}{5}\Delta c_1 + \frac{2}{5}\Delta c_3 \leq \frac{3}{5} \end{cases} \qquad (2)$$

- Per il vettore di perturbazione Δc dato, le 6 disequazioni dei sistemi (1) e (2) risultano verificate e quindi la variazione lascia la base ottima (oltre che ammissibile).

Esempio: punto 4

- Per valutare l'intervallo di stabilità di c_1, bisogna considerare i sistemi (1) e (2) con $\Delta c^T = [\ \Delta c_1 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0\ ]$. In particolare, essendo x_1 in base, il sistema (2) diventa:

  $$\begin{cases} \frac{1}{5}\Delta c_1 \leq \frac{7}{5} \\ \frac{3}{5}\Delta c_1 \leq \frac{6}{5} \\ -\frac{1}{5}\Delta c_1 \leq \frac{3}{5} \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} \Delta c_1 \leq 7 \\ \Delta c_1 \leq 2 \\ \Delta c_1 \geq -3 \end{cases}$$

  Quindi $\Delta c_1 \in [-3, 2]$ $\quad\rightarrow\quad$ intervallo di stabilità $c_1 \in [-6 - 1]$.

  Analogamente, gli intervalli di stabilità per i costi delle altre variabili in base sono:

  $-6 \leq \Delta c_3 \leq 3/2 \quad\rightarrow\quad c_3 \in [-9, -3/2]$;

  $-6/5 \leq \Delta c_6 \leq 7/5 \quad\rightarrow\quad c_6 \in [-6/5, 7/5]$.

- Per le variabili fuori base, gli intervalli di stabilità si ottengono direttamente dal sistema (1):

  $\Delta c_2 \geq -7/5 \quad\rightarrow\quad c_2 \in [-12/5, +\infty)$;

  $\Delta c_4 \geq -6/5 \quad\rightarrow\quad c_4 \in [-6/5, +\infty)$;

  $\Delta c_5 \geq -3/5 \quad\rightarrow\quad c_5 \in [-3/5, +\infty)$.