
Ricerca Operativa

A.A. 2007/2008

14. Esercitazione di laboratorio: analisi di sensitività

Problema di mix della produzione

A partire da materiale legnoso, una piccola azienda produce pannelli per l'industria del mobile di 3 tipi: compensato, truciolato e MDF (Medium Density Fibreboard). L'azienda ha a disposizione 7 operai e 120 kg di legno al giorno. La massima domanda giornaliera dei tre tipi di pannello è, rispettivamente di 9, 23 e 18 mq. La quantità di legno richiesta per ogni mq è di 20, 2 e 5 kg, rispettivamente. Ciascun operaio può essere impiegato nella produzione di tutti i pannelli e, se si occupasse di un solo tipo, produrrebbe 2, 7 e 3 mq al giorno di pannelli in compensato, truciolato o MDF, rispettivamente. L'azienda vuole determinare i livelli di produzione giornaliera dei tre tipi di pannello, sapendo che il prezzo di vendita al mq dei pannelli è di 2,5, 1,1 e 2 euro.

1. Formulare il modello di programmazione lineare del problema (carta e penna!).
Attenzione: per il prosieguo, scrivere la funzione obiettivo in forma di minimo.
2. Implementare il modello in AMPL e risolverlo. Visualizzare i valori ottimi delle variabili e dei prezzi marginali associati ai vincoli (comando `display vincolo[.dual]`).
3. Scrivere il duale, implementare in AMPL e risolvere (verificare che i valori delle funzioni obiettivo all'ottimo coincidono e che i valori delle variabili duali coincidono con i prezzi marginali).

Tornare al problema primale.

4. Per quali pannelli la domanda è soddisfatta? Quali risorse sono sature? (comando `display vincolo.slack`). Verificare la validità delle condizioni di complementarità, in relazione alla soluzione duale calcolata in precedenza e darne un'interpretazione economica.
5. A quale prezzo giornaliero massimo l'azienda sarebbe disposta ad assumere un ulteriore operaio? Suggerimento: utilizzare i prezzi marginali.
6. A quale prezzo massimo l'azienda sarebbe disposta ad aumentare la disponibilità giornaliera di legno?
7. Di quanto dovrebbe aumentare il prezzo al mq del compensato per rendere conveniente iniziare a produrlo? Suggerimento: utilizzare i costi ridotti disponibili con il comando `display variabile.rc`.
8. L'azienda vuole anche valutare la possibilità di produrre un nuovo tipo di pannello OSB (Oriented Strand Board). La produzione di un mq di OSB richiede 15 kg di legno e un operaio, se impegnato sul solo OSB, ne produce 4 mq. Inoltre, i limiti di domanda di OSB sono trascurabili. E' conveniente iniziare la produzione di OSB se il prezzo di vendita è di 1 euro/mq. E se il prezzo è di 3 euro/mq? A partire da quale prezzo conviene iniziare a produrre pannelli OSB?

Problema di mix della produzione: soluzione 1.

- Siano x_1 , x_2 e x_3 le quantità in mq da produrre di pannelli di compensato, truciolato e MDF rispettivamente.

$$\min - 2.5 x_1 - 1.1 x_2 - 2 x_3 \quad (- \text{ricavi})$$

$$\begin{array}{rcll} s.t. & x_1 & \leq & 9 \\ & & x_2 & \leq 23 \\ & & & x_3 \leq 18 \end{array} \quad (\text{domanda massima})$$

$$\begin{array}{rcll} 20 x_1 + 2 x_2 + 5 x_3 & \leq & 120 & (\text{risorse}) \\ \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{7} x_2 + \frac{1}{3} x_3 & \leq & 7 & \end{array}$$

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \geq 0$$

- Attenzione: la funzione obiettivo di minimo rappresenta l'opposto del ricavo. Quindi, se la funzione obiettivo diminuisce (migliora) allora il ricavo aumenta (migliora anch'esso).

Problema di mix della produzione: soluzione 2.

- Vedi file `mix_prod.mod` e `mix_prod.dat`

- Comandi:

```
reset;  
model mix_prod.mod;  
data mix_prod.dat;  
solve;  
display x;  
display domanda_sodd;  
display uso_risorsa;
```

Problema di mix della produzione: soluzione 3.

- Introduciamo le variabili duali u_j , associate ai vincoli di domanda, e v_i , associate ai vincoli sulle risorse. Il duale è:

$$\max \quad 9 \, u_1 + 23 \, u_2 + 18 \, u_3 + 120 \, v_1 + 7 \, v_2$$

$$s.t. \quad u_1 \quad \quad \quad + \quad 20 \, v_1 + \frac{1}{2} \, v_2 \leq -2.5$$

$$\quad \quad \quad u_2 \quad \quad + \quad 2 \, v_1 + \frac{1}{7} \, v_2 \leq -1.1$$

$$\quad \quad \quad u_3 + \quad 5 \, v_1 + \frac{1}{3} \, v_2 \leq -2$$

$$\quad \quad u_1 \quad \quad u_2 \quad \quad u_3 \quad \quad v_1 \quad \quad v_2 \leq 0$$

- Comandi:

```
reset;  
model mix_prod.duale.mod;  
data mix_prod.dat;  
solve;  
display u;  
display v;
```

Problema di mix della produzione: soluzione 4.

- Comandi:
`reset;`
`model mix_prod.mod;`
`data mix_prod.dat;`
`solve;`
`display domanda_sodd.slack, domanda_sodd.dual;`
`display uso_risorsa.slack, uso_risorsa.dual;`
- La domanda è soddisfatta per il truciolato e la risorsa satura sono gli operai (slack corrispondenti nulli).
- Le condizioni di complementarità sono soddisfatte. Ad esempio: il vincolo primale sulla domanda di MDF è lasco e la corrispondente variabile duale è nulla; oppure, la variabile duale relativa al vincolo sul truciolato è negativa e il vincolo del truciolato è saturo; etc.
- Esempi di interpretazione economica. Il prezzo marginale relativo alla domanda di truciolato è pari a -0.24 : conviene aumentare il limite di domanda massima, in modo da migliorare la funzione obiettivo di 0.24 per ogni unità aggiuntiva di domanda (questo vale per variazioni “piccole”, che non cambino la base ottima). Il prezzo marginale per il vincolo sul compensato è pari a 0 e, quindi, “piccole” variazioni della domanda di compensato (sia in aumento sia in diminuzione) non comportano variazioni della funzione obiettivo. In effetti, la domanda di compensato non è totalmente soddisfatta, indice della non convenienza a soddisfare più domanda e dell’ininfluenza di una piccola diminuzione della domanda massima.

Problema di mix della produzione: soluzione 5. e 6.

- Comando: `display uso_risorsa['Operai'];`
Il prezzo marginale è -6 : assumendo un operaio la funzione obiettivo diminuisce di 6 , cioè il guadagno aumenta di 6 . Tale ammontare è quindi a disposizione per pagare l'operaio aggiuntivo, che conviene assumere al costo giornaliero massimo di 6 .
- Comando: `display uso_risorsa['Legno'];`
Il prezzo marginale è 0 : variazioni (sufficientemente piccole) di disponibilità di legno, sia in aumento, sia in diminuzione, non fanno cambiare il valore della funzione obiettivo. Quindi non vi è nessuna convenienza, allo stato attuale, ad aumentare la disponibilità di legno, qualsiasi sia il suo costo (positivo). Ciò è anche visibile dal fatto che il vincolo sulla disponibilità di legno è lasco, indicando l'abbondanza di questa risorsa che, addirittura, potrebbe essere diminuita senza comportare una riduzione del guadagno.

Problema di mix della produzione: soluzione 7.

- Comando: `display x['Compensato'].rc;`

Il costo ridotto è 0.5: all'aumento unitario della quantità di compensato prodotta, corrisponde un aumento della funzione obiettivo (di minimo) di 0.5, cioè una diminuzione del guadagno di 0.5. Tale diminuzione dovrebbe essere compensata dall'aumento del prezzo di vendita unitario del compensato della stessa entità. Pertanto sarebbe conveniente iniziare a produrre compensato se il suo prezzo aumentasse di almeno 0.5 euro/mq.

Problema di mix della produzione: soluzione 8.

- L'alternativa di produrre pannelli OSB si traduce, nel modello primale, nell'aggiunta di una variabile e, quindi, di una colonna nella matrice dei vincoli. Questo corrisponde al nuovo vincolo nel problema duale corrispondente: $0u_1 + 0u_2 + 0u_3 + 15v_1 + \frac{1}{4}v_2 = 15v_1 + \frac{1}{4}v_2 \leq -c_4$ dove c_4 è il prezzo unitario di vendita dei pannelli OSB.
- Considerando i valori delle variabili duali v (`display uso_risorse.dual;`) il vincolo diventa:
$$15 \cdot 0 + \frac{1}{4}(-6) = -\frac{3}{2} \leq -c_4 \quad \Rightarrow \quad c_4 \leq 1.5$$
- Se il prezzo unitario di vendita dell'OSB è 1 euro/mq, il nuovo vincolo duale NON è violato e, di conseguenza, la soluzione ottima del problema duale non cambia. Quindi non cambia neanche la soluzione ottima del problema primale e, quindi, NON conviene iniziare la produzione di OSB: non si otterrebbe nessun miglioramento della funzione obiettivo.
- Se il prezzo unitario di vendita dell'OSB è di 3 euro/mq, il nuovo vincolo duale è violato e, di conseguenza, si ha un peggioramento del valore ottimo della funzione obiettivo duale, cioè la funzione obiettivo duale (di massimo) diminuisce. Il problema primale, all'ottimo, avrà lo stesso valore del duale e, quindi, un valore della funzione obiettivo (di minimo) diminuito, cioè migliorato. Di conseguenza, la possibilità di vendere pannelli OSB a 3 euro/mq migliorerebbe la funzione obiettivo primale, quindi converrebbe iniziare a produrre OSB.
- Il prezzo a partire dal quale conviene produrre OSB è quello che comincia a violare il nuovo vincolo duale, cioè conviene iniziare a produrre OSB se il suo prezzo è maggiore di 1.5 euro/mq.