# Ricerca Operativa

A.A. 2007/2008

## 17. Esercitazione di laboratorio: Branch and Bound.



.

## Esercizio 1: Problema dell'assegnamento

Un'azienda manufatturiera vuole esternalizzare la produzione di alcune parti affidandole a terzisti. Il costo di produzione della parte $i$ presso il terzista $j$ è $c_{ij}$. Tutte le parti devono essere prodotte e, per rispettare i tempi di consegna del prodotto finito, ad ogni terzista non può essere assegnata più di una parte. L'azienda è interessata a minimizzare il costo complessivo per completare le parti.

- Scrivere il modello matematico per risolvere il problema (carta e penna!).
- Considerare un esempio con 5 parti, 7 terzisti e costi a piacere, e risolverlo con AMPL.
- Cosa succede se si rilassa il vincolo di interezza delle variabili?



## Esercizio 2: B&B per PLI

Calcolare su foglio, applicando il metodo del Branch and Bound per PLI, il seguente problema:

$$\begin{array}{lrrrrrl}
\max & 3\,x_1 + & 6\,x_2 + & 4\,x_3 + & 7\,x_4 + & 11\,x_5 & \\
s.t. & -\,3\,x_1 - & 6\,x_2 + & 6\,x_3 + & 12\,x_4 + & 7\,x_5 & \leq 8 \\
 & 6\,x_1 + & 12\,x_2 - & 3\,x_3 - & 6\,x_4 + & 7\,x_5 & \leq 8 \\
 & \multicolumn{6}{l}{x_i \in \mathbb{Z}_+,\ \forall\, i = 1..5}
\end{array}$$

- Utilizzare AMPL per calcolare il bound tramite rilassamento continuo (comandi `s.t. px: ...`, `drop px`, `restore px` per aggiungere, eliminare e ripristinare i vincoli di branching).
- Si suggerisce di applicare il branching dicotomico sulla variabile con parte frazionaria più prossima a 0.5 e, a parità, sulla variabile con indice minore.
- Si suggerisce una strategia di esplorazione Best Bound First.

## Problema dell'assegnamento: modello

Dati due insiemi $I$ e $J$ e dei costi $c_{ij}$ associati ad ogni coppia $(i,j) : i \in I, j \in J$, determinare come assegnare un elemento di $I$ ad uno (ed un solo) elemento di $J$ con l'obiettivo di minimizzare il costo di assegnamento complessivo.

$x_{i,j}$: variabile binaria che vale 1 se $i \in I$ è associato a $j \in J$, 0 altrimenti.

$$\left.\begin{array}{l} \min \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}x_{ij} \\ \left.\begin{array}{ll} s.t. & \sum_{j\in J} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in I \\ & \sum_{i\in I} x_{ij} \le 1 \quad \forall j \in J \\ & 0 \le x_{ij} \le 1 \quad \forall i \in I, j \in J \end{array}\right\} P \\ \qquad x_{ij} \text{ intera} \quad \forall i \in I, j \in J \end{array}\right\} X$$

* $P$ è una formulazione valida per $X$

* $P$ coincide con i vincoli del rilassamento continuo.



## Problema dell'assegnamento: proprietà

Si può dimostrare che tutti i vertici di $P$ sono interi: $P = conv(X)$.

**La soluzione del rilassamento continuo è sempre intera: il problema, anche se a variabili intere (PLI), può essere risolto (efficientemente) come un problema di programmazione lineare (PL).**

Esistono diversi problemi a variabili intere formulabili come modello di PLI (o PLI mista - PLMI) tale che la **matrice dei vincoli** gode di particolari proprietà: se anche i termini noti sono interi, tutte le soluzioni di base del rilassamento continuo sono intere.

Dati i vincoli $Ax \ge b$ con $b$ intero: $x = \begin{bmatrix} x_B \\ 0 \end{bmatrix}$; $x_B = B^{-1}b$: basta che $B^{-1}$ sia intera!

Ciò si verifica, ad esempio, se **A è totalmente unimodulare**: per ogni sottomatrice quadrata $M$ di $A$, $det(M) = \pm 1$.

Considerazioni sulla complessità:

- PLI $\in \mathcal{NP}-$hard in generale: il B&B, ad esempio, ha complessità esponenziale.
- PL $\in \mathcal{P}$: sebbene il simplesso abbia complessità esponenziale, esistono algoritmi per PL polinomiali (anche se spesso meno efficienti del simplesso nel caso medio).

## Altri esempi di PLI risolvibili come PL

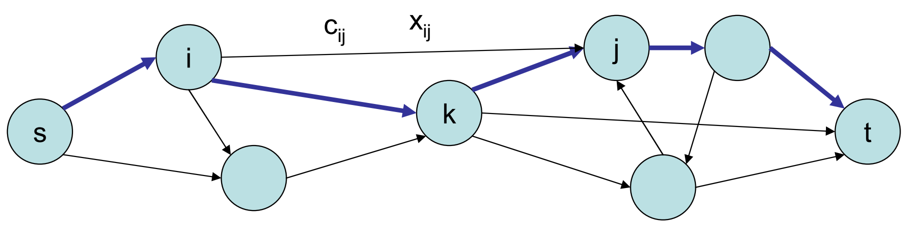
- **Problema dei trasporti** di beni *indivisibili* da origini $S$ a destinazioni $T$ con capacità delle origini $a_i$, richieste delle destinazioni $b_j$ e costi di trasporto unitari $c_{ij}$:

$$\begin{aligned}
\min \ & \sum_{i\in S}\sum_{j\in T} c_{ij}x_{ij} \\
s.t. \ & \sum_{j\in T} x_{ij} \le a_i \quad \forall i\in S \\
& \sum_{i\in S} x_{ij} \ge b_j \quad \forall j\in T \\
& x_{ij}\in \mathbb{Z}_+ \quad \forall i\in S, j\in T \quad \boxed{\equiv x_{ij}\ge 0, \text{ se } a_i \text{ e } b_j \text{ sono interi}}
\end{aligned}$$



## Altri esempi di PLI risolvibili come PL

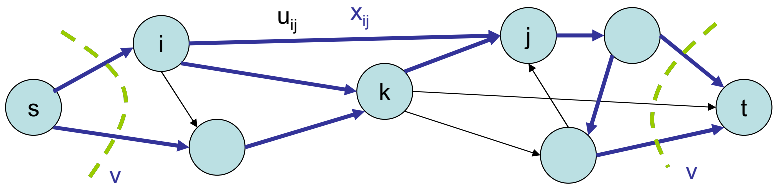
- **Problema del cammino minimo** da una sorgente $s$ a una destinazione $t$ su un grafo $G=(N,A)$ con costi $c_{ij}$ associati agli archi, e senza cicli di costo negativo.




$$\begin{aligned}
\min \ & \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} \\
s.t. \ & \sum_{j:(s,j)\in A} x_{sj} = 1 && \text{(vincoli di...} \\
& \sum_{i:(i,t)\in A} x_{it} = 1 && \text{...bilanciamento del...} \\
& \sum_{i:(i,k)\in A} x_{ik} - \sum_{j:(k,j)\in A} x_{kj} = 0 \quad \forall k\in N\setminus\{s,t\} && \text{...flusso ai nodi)} \\
& x_{ij}\in\{0,1\} \quad \forall (i,j)\in A && \boxed{\equiv 0\le x_{ij}\le 1}
\end{aligned}$$

## Altri esempi di PLI risolvibili come PL

- **Problema del massimo flusso** di beni indivisibili da un nodo sorgente $s$ ad un nodo pozzo $t$ su un grafo $G = (N, A)$ con capacità $u_{ij}$ degli archi:




$$
\begin{array}{llll}
\max & v & & (v \text{ è la variabile 'flusso totale'}) \\
s.t. & \displaystyle\sum_{j:(s,j)\in A} x_{sj} = v & & \text{(vincoli di...} \\
& \displaystyle\sum_{i:(i,t)\in A} x_{it} = v & & \text{...bilanciamento del...} \\
& \displaystyle\sum_{i:(i,k)\in A} x_{ik} - \sum_{j:(k,j)\in A} x_{kj} = 0 & \forall k \in N \setminus \{s,t\} & \text{...flusso ai nodi)} \\
& x_{ij} \leq u_{ij} & \forall (i,j) \in A & \text{(vincoli di capacità degli archi)} \\
& v \geq 0 & & \\
& x_{ij} \in \mathbb{Z}_+ & \forall (i,j) \in A & \boxed{\equiv x_{ij} \geq 0, \text{ se } u_{ij} \text{ sono interi}}
\end{array}
$$



## Altri esempi di PLI risolvibili come PL

- **Molti problemi di ottimizzazione su grafo**: flusso di costo minimo, alberi di copertura etc.
- **etc. etc. etc.**
- **NOTA: per molti di questi problemi esistono algoritmi risolutivi ad-hoc, più efficienti degli algoritmi standard per PL.**