Ricerca Operativa

A.A. 2007/2008

18. Branch and Bound per il problema dello zaino 0/1.

Il problema dello zaino binario (Knapsack KP-0/1)

- Sono dati n oggetti e uno zaino di capienza massima W. Ogni oggetto i ha un peso w_i e un'utilità p_i. Determinare gli oggetti da mettere nello zaino senza superare la capacità e massimizzando l'utilità complessiva.

$$\max \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$
$$s.t. \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq W$$
$$x_i \in \{0,1\} \quad \forall\, i = 1..n$$

Assunzioni:

1. $p_i,\, w_i,\, W \geq 0$
2. $w_i \leq W \quad \forall\, i = 1..n$
3. $\sum_{i=1}^{n} w_i > W$

- Metodo B&B: bisogna definire le seguenti componenti principali:

(1) Calcolo del bound (upper bound, UB).

(2) Regole di Branching.

(3) Regole di Fathoming.

(4) Regole di esplorazione dell'albero di ricerca.

(5) Valutazione di soluzioni ammissibili.

(6) Criteri di arresto.

B&B per KP-0/1: (1) calcolo del bound

(1) Calcolo del bound: **rilassamento continuo**. Si dimostra che una soluzione ottima del rilassamento si ottiene con la seguente procedura $O(n \log n)$:

1. ordinare le variabili per $\frac{p_i}{w_i}$ **decrescenti**;
2. caricare gli oggetti nell'ordine fino a determinare la **variabile critica** x_s

   $$s = \min_j \{ j : \sum_{i=1}^{j} w_i > W \}$$

   (s è il primo oggetto, <u>nell'ordine</u>, che supera la capienza dello zaino)
3. determinare la soluzione del rilassamento: $x_i = \begin{cases} 1 & i < s \\ \frac{\bar{W}}{w_i} & i = s \\ 0 & i > s \end{cases}$

   dove $\bar{W} = W - \sum_{i=1}^{s-1} w_i$ è la capienza residua dello zaino.

B&B per KP-0/1: scelte implementative

(2) Regole di Branching: branching binario sulla variabile critica x_s.

(3) Regole di Fathoming: standard.

(4) Regole di esplorazione: tra le possibili, *Best Bound First*.

(5) Valutazione di soluzioni ammissibili: è sempre possibile ottenere una soluzione ammissibile con una semplice euristica (porre a 1 tutte le variabili nell'ordine specificato, senza eccedere W):

```
W̄ = W; forall i: x_i := 0
for ( i = 1 ; i ≤ n ; i++ ) {
    if w_i ≤ W̄ and w_i not fixed to 0 {
        x_i := 1
        W̄ := W̄ − w_i
    }
}
```

(6) Criterio di arresto: standard.

Esempi

$$
\begin{array}{rl}
\max & 36\ x_1 + 15\ x_2 + 3\ x_3 + 5\ x_4 + 11\ x_5 + 30\ x_6 \\
s.t. & 12\ x_1 + \ \ 6\ x_2 + 2\ x_3 + 3\ x_4 + \ \ 5\ x_5 + \ \ 9\ x_6 \leq 17 \\
 & x_i \in \{0,1\},\ \forall\, i = 1..6
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\max & 15\ x_1 + 20\ x_2 + 25\ x_3 + 30\ x_4 + 35\ x_5 + 40\ x_6 \\
s.t. & 5\ x_1 + 10\ x_2 + 15\ x_3 + 20\ x_4 + 25\ x_5 + 30\ x_6 \leq 67 \\
 & x_i \in \{0,1\},\ \forall\, i = 1..6
\end{array}
$$

Fathoming con criteri di dominanza

- **Proprietà**. Sia $p_i < p_j$ e $w_i \geq w_j$; allora le soluzioni in cui $x_i = 1$ e $x_j = 0$ non sono ottime.

  Dim. Una soluzione $x_i = 1$ e $x_j = 0$ è sempre migliorabile ponendo $x_i = 0$ e $x_j = 1$.

- Si dice che le soluzioni con $x_i = 1$ e $x_j = 0$ sono *dominate* da soluzioni con $x_i = 0$ e $x_j = 1$. Inoltre x_j domina x_i.

- La proprietà può essere sfruttata nel B&B, tenendo conto che è **inutile enumerare** esplicitamente nodi relativi a **soluzioni dominate**. Tali soluzioni sono enumerate implicitamente adottando le seguenti *ulteriori* regole di fathoming. Se x_j domina x_i, allora:

  1. $x_i = 1 \Rightarrow x_j = 1$: ogni volta che una variabile dominata è fissata a 1, **tutte** le variabili dominanti sono fissate a 1. La soluzione che si otterrebbe non fissando a 1 le variabili dominanti sarebbe comunque migliorabile!
  2. $x_j = 0 \Rightarrow x_i = 0$: ogni volta che una variabile dominante è fissata a 0, **tutte** le variabili dominate sono fissate a 0. La soluzione che si otterrebbe non fissando a 0 le variabili dominate sarebbe comunque migliorabile!

- In altre parole: posso mettere a 1 (risp. 0) una variabile dominata (risp. dominante) solo dopo aver messo a 1 (risp. 0) tutte le variabili dominanti (risp. dominate).

Esempi

$$\begin{array}{rl} \max & 22\ x_1 + 30\ x_2 + 40\ x_3 + 20\ x_4 + 32\ x_5 + 30\ x_6 + 10\ x_7 \\ s.t. & 10\ x_1 + 15\ x_2 + 20\ x_3 + 15\ x_4 + 25\ x_5 + 26\ x_6 + 15\ x_7 \leq 59 \\ & x_i \in \{0,1\},\ \forall\ i = 1..7 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \max & 9\ x_1 + 8\ x_2 + 7\ x_3 + 6\ x_4 + 3\ x_5 \\ s.t. & 2\ x_1 + 3\ x_2 + 5\ x_3 + 4\ x_4 + 9\ x_5 \leq 12 \\ & x_i \in \{0,1\},\ \forall\ i = 1..5 \end{array}$$