RICERCA OPERATIVA

Tema d'esame del 24/07/2008

COGNOME:
NOME:

MATRICOLA:

1. La costruzione di una barca da diporto comporta il completamento delle operazioni indicate nella tabella che segue, che ne riporta anche la durata in giorni.

Operazione	**Durata**	**Precedenze**
A	2	nessuna
B	4	A
C	2	A
D	5	A
E	3	B,C
F	3	E
G	2	E
H	7	D,E,G
I	4	F,G

Si consideri che alcune operazioni sono in alternativa. In particolare, bisogna eseguire solo una tra le operazioni B e C, e solo una tra le operazioni F e G. Inoltre, se si eseguono sia C che G, la durata dell'operazione I si allunga di 2 giorni. La tabella indica anche, per ogni operazione, l'insieme delle precedenze (operazioni che devono essere completate prima di poter eseguire l'operazione stessa). Ad esempio, l'operazione H può iniziare solo dopo la fine delle operazioni E, D e G (se G viene eseguita). Scrivere un modello di programmazione lineare per decidere quali operazioni in alternativa eseguire, con l'obiettivo di minimizzare la durata complessiva delle operazioni di costruzione.

2. Dato il seguente problema di P.L.

$$
\begin{array}{rll}
\max & 4x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 & \\
s.t. & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 & = 6 \\
 & x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 & \geq 5 \\
 & x_i \geq 0 & \forall i
\end{array}
$$

trovare la soluzione ottima a partire dalla base $[x_1, x_2]$ (si applichi la regola anticiclo di Bland).

Che tipo di variazione converrebbe fare al termine noto del secondo vincolo per migliorare il valore ottimo della funzione obiettivo senza cambiare la base ottima ottenuta?

...ALTRE DOMANDE SUL RETRO...

3. Si consideri il seguente problema di PL, la cui soluzione ottima è: $x_1 = 10$, $x_2 = 4$.

$$\begin{array}{lcl}
\min & z = -2x_1 + 3x_2 & \\
s.t. & 3x_1 & \geq 15 \\
 & x_1 - x_2 & \leq 6 \\
 & x_2 & \geq 4 \\
 & x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}$$

Scrivere il problema duale e determinare i valori ottimi delle variabili duali. Verificare la correttezza del risultato applicando il teorema della dualità forte.

4. Sia la figura 1 l'albero di sviluppo del Branch and Bound per un problema di ottimizzazione combinatoria con funzione obiettivo di massimo. Per ogni nodo sono riportati upper bound (UB) e lower bound (LB).

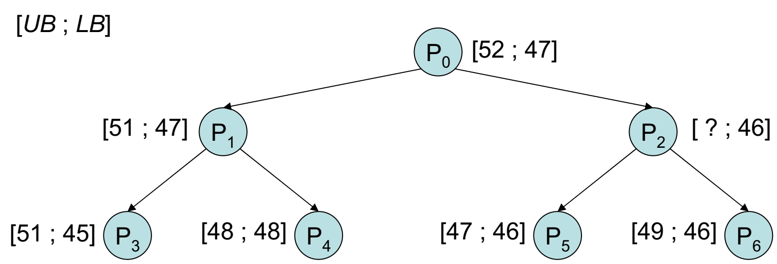

Figure 1: Albero B&B

- In quale intervallo deve essere compreso il valore dell'upper bound al nodo $P2$?
- In quale intervallo è compreso il valore ottimo della funzione obiettivo?
- Quali nodi possono essere chiusi? Perché?
- Quale nodo sarà sviluppato per primo da una strategia best bound first?

5. Sia dato un problema dei trasporti da m origini $1, 2...m$ a n destinazioni $1, 2...n$. Si indichi con A_i la capacità di ogni origine $i = 1..m$, con B_j la richiesta di ogni destinazione $j = 1..n$ e con C_{ij} il costo unitario di trasporto dall'origine i alla destinazione j. Si scriva il modello di programmazione lineare che minimizzi i costi complessivi di trasporto per soddisfare le richieste delle destinazioni nel rispetto delle capacità delle origini. Si supponga che le merci da trasportare non siano divisibili e si traduca il modello nella sintassi di AMPL.

6. Discutere la verità della seguente affermazione: il metodo del simplesso può ciclare solo in presenza di soluzioni di base degeneri.

TRACCIA DELLE SOLUZIONI

1. Un possibile modello:

   - variabili:

     t_i tempo di completamento al più presto dell'operazione $i \in \{A, B, C, D, E, F, G, H, I\}$;

     y_i binaria, vale 1 se si esegue l'operazione $i \in \{B, C, F, G\}$, 0 altrimenti;

     y_{CG} binaria, vale 1 se si eseguono sia l'operazione C sia l'operazione G, 0 altrimenti;

     z tempo di fine dell'ultima operazione.

   - modello, indicando con d_i la durata da tabella dell'operazione i e con M una costante sufficientemente grande:

$$
\begin{array}{ll}
\min & z \\
s.t. & z \geq t_i \qquad \forall i \in A...I \\
 & t_A \geq d_A \\
 & t_B \geq t_A + d_B - M(1 - y_B) \\
 & t_C \geq t_A + d_C - M(1 - y_C) \\
 & t_D \geq t_A + d_D \\
 & t_E \geq t_B + d_E \\
 & t_E \geq t_C + d_E \\
 & t_F \geq t_E + d_F - M(1 - y_F) \\
 & t_G \geq t_A + d_G - M(1 - y_G) \\
 & t_H \geq t_D + d_H \\
 & t_H \geq t_E + d_H \\
 & t_H \geq t_G + d_H \\
 & t_I \geq t_F + d_I + 2y_{CG} \\
 & t_I \geq t_G + d_I + 2y_{CG} \\
 & y_B + y_C = 1 \\
 & y_F + y_G = 1 \\
 & y_C + y_G <= 1 + y_{CG} \\
 & z, t_i \geq 0 \qquad \forall i \in \{A...I\} \\
 & y. \in \{0, 1\}
\end{array}
$$

2. Visto che si dà una base, conviene applicare il simplesso revisionato (lo hanno visto con la matrice di CARRY), ma sono liberi di fare in qualsiasi altro modo (corretto). Dopo aver messo in forma standard (di minimo, con una quinta variabile di surplus) e partendo dalla base (x_1, x_2), si esplorano le seguenti soluzioni:

   . $x_1 = 1$, $x_2 = 4$; $z = 0$; costi ridotti: 0, 0, -5, -8, 6. Entra x_3, esce x_2.

   . $x_1 = 1$, $x_3 = 2$; $z = -10$; costi ridotti: 0, 2.5, 0, -0.5, 1. Entra x_4, esce x_3.

   . $x_1 = 7/3$, $x_4 = 4/3$; $z = -32/3$; costi ridotti: 0, 8/3, 1/3, 0, 2/3. Ottimo. (Il valore della variabile duale associata al secondo vincolo è 2/3: conviene diminuire il secondo termine noto.)

3. Applicando le condizioni di ortogonalità si ottiene $u_1 = 0$, $u_2 = -2$ e $u_3 = 1$ (con funzione obiettivo pari a -8).

4. Vedi teoria...

5. Vedi teoria...

6. Vedi teoria...