RICERCA OPERATIVA

Tema d'esame del 04/03/2008 (Simulazione)

COGNOME:
NOME:

MATRICOLA:

1. Una nota azienda automobilistica produce due modelli di auto (un'utilitaria e una berlina), che rivende con un guadagno unitario al netto dei costi di produzione pari a 5000 e 12000 Euro, rispettivamente. Produrre un'utilitaria richiede 40 ore di manodopera, mentre produrre una berlina ne richiede 60. Si vuole pianificare la produzione di utilitarie e berline nei prossimi 3 mesi, in ognuno dei quali si hanno a disposizione 35000 ore di manodopera. La domanda mensile minima è data dalla seguente tabella.

domanda	primo mese	secondo mese	terzo mese
utilitarie	450	500	600
berline	200	150	180

   Si suppone che le auto prodotte in eccesso siano comunque vendute. A partire dal quarto mese, gli impianti saranno destinati a nuove produzioni e, di conseguenza, si vuole costituire, alla fine dei 3 mesi, una scorta di almeno 100 utilitarie e di 50 berline, per fronteggiare la domanda futura.

   Si deve considerare che, nel caso in cui nello stesso mese si producano sia utilitarie sia berline, 5000 delle ore di manodopera devono essere utilizzate per operazioni di setup degli impianti, e non sono disponibili per la produzione di automobili.

   Formulare un modello di programmazione lineare per pianificare il numero di utilitarie e di berline prodotte e immagazzinate in ciascuno dei tre mesi, in modo tale da massimizzare il guadagno dell'azienda.

2. Dato il seguente problema di P.L.

$$
\begin{array}{lll}
\min & 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 & \\
s.t. & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 & = 6 \\
 & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 & \geq 5 \\
 & x_i \geq 0 & \forall i
\end{array}
$$

   trovare la soluzione ottima a partire dalla base $[x_1, x_3]$. Che tipo di variazione converebbe fare ai termini noti per migliorare il valore ottimo della funzione obiettivo senza cambiare base?

3. Risolvere con il Branch and Bound il seguente problema di knapsack $0 - 1$

   $\max z = 8x_1 + 10x_2 + 11x_3 + 13x_4 + 9x_5$

   soggetto a

   $6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 7x_5 \leq 16$
   $x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i$

   Utilizzare una strategia best first (numerare i nodi nell'ordine di valutazione).

4. Si consideri il seguente problema di PL, la cui soluzione ottima è: $x_1 = 8$, $x_2 = 3$, con $z = -38$.

$$
\begin{array}{lll}
\min & z = -4x_1 - 2x_2 & \\
s.t. & 2x_1 & \leq 16 \\
 & x_1 + 3x_2 & \leq 17 \\
 & x_2 & \leq 5 \\
 & x_i \geq 0 & \forall i
\end{array}
$$

Scrivere il problema duale e stabilire se la soluzione duale $y_1 = -5/3, y_2 = -2/3, y_3 = 0$ è ottima.

5. Dimostrare le condizioni di complementarietà primale-duale.

6. Enunciare la regola di Bland per la selezione delle variabili per il cambio di base nel metodo del simplesso primale: a cosa serve tale regola?

SOLUZIONI

1. Introduco le **variabili**:

    - p_{ti}: numero di automobili di tipo $t \in \{u, b\}$ prodotte nel mese $i \in \{1, 2, 3\}$;
    - m_{ti}: numero di automobili di tipo $t \in \{u, b\}$ in magazzino alla fine del mese $i \in \{1, 2, 3\}$;
    - y_{ti}: variabile logica che vale 1 se nel mese $i \in \{1, 2, 3\}$; vengono prodotte automobili di tipo $t \in \{u, b\}$, 0 altrimenti;
    - c_i: variabile logica che vale 1 se nel mese $i \in \{1, 2, 3\}$; vengono prodotte sia utilitarie sia berline, 0 altrimenti;

    e la **costante** $M = +\infty (\geq 1650)$.

    Modello:

    max $\quad z = 5 \sum_i p_{ui} + 12 \sum_i p_{bi}$ [1]
    s.t.
    #(mese 1)
    $p_{u1} \geq 450 + m_{u1}$ #(domanda minima e scorta utilitarie)
    $p_{b1} \geq 200 + m_{b1}$ #(domanda minima e scorta berline)
    $40p_{u1} + 60p_{b1} \leq 35000 - 5000c_1$ #(capacità dell'impianto al netto dell'eventuale setup)
    $p_{u1} \leq My_{u1}$
    $p_{b1} \leq My_{b1}$
    $c_1 \geq y_{u1} + y_{b1} - 1$ (impostazione variabile c_1)

    #(mese 2)
    $m_{u1} + p_{u2} \geq 500 + m_{u2}$
    $m_{b1} + p_{b2} \geq 150 + m_{b2}$
    $40p_{u2} + 60p_{b2} \leq 35000 - 5000c_2$
    $p_{u2} \leq My_{u2}$
    $p_{b2} \leq My_{b2}$
    $c_2 \geq y_{u2} + y_{b2} - 1$

    #(mese 3)
    $m_{u2} + p_{u3} \geq 600 + 100$
    $m_{b2} + p_{b3} \geq 180 + 50$
    $40p_{u3} + 60p_{b3} \leq 35000 - 5000c_3$
    $p_{u3} \leq My_{u3}$
    $p_{b3} \leq My_{b3}$
    $c_3 \geq y_{u3} + y_{b3} - 1$

    $p_{ti}, m_{ti} \in Z_+, \ \forall t \in \{u, b\}, \ i \in \{1, 2, 3\}$
    $y_{ti} \in \{0, 1\} \ \forall t \in \{u, b\}, \ i \in \{1, 2, 3\}$
    $c_i \in \{0, 1\} \ \forall i \in \{1, 2, 3\}$

[1] $\max z = 5[(p_{u1} - m_{u1}) + (p_{u2} + m_{u1} - m_{u2}) + (p_{u3} + m_{u2} - 100)] + 12[(p_{b1} - m_{b1}) + (p_{b2} + m_{b1} - m_{b2}) + (p_{b3} + m_{b2} - 50)] = 5[p_{u1} + p_{u2} + p_{u3} - 100] + 12[p_{b1} + p_{b2} + p_{u3} - 100] \equiv \max z = 5 \sum_i p_{ui} + 12 \sum_i p_{bi}$

2. Avendo una base iniziale, possiamo applicare il simplesso revisionato. Scriviamo il problema in forma standard:

$$\begin{array}{lll} \min & 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 & \\ s.t. & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 & = 6 \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 & = 5 \\ & x_i \geq 0 & \forall i \end{array}$$

<u>Inizializzazione</u>

$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Invertiamo B:

$B = \left[\begin{array}{cc|cc} \boxed{2} & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1/2 & 1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1 \end{array}\right] \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$

$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad z_B = c_B^T x_B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 10$

$u^T = c_B^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 & -1 \end{bmatrix}$

La matrice CARRY iniziale è:

$-z$	-10	$-5/2$	1
x_1	1	1	-1
x_2	2	$-1/2$	1

<u>Iterazione 1</u>

$u^T = \begin{bmatrix} 5/2 & -1 \end{bmatrix}$

$\bar{c}_2 = c_2 - u^T A_2 = 1 - \begin{bmatrix} 5/2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1/2 \geq 0;$

$\bar{c}_4 = 1/2 \geq 0$

$\bar{c}_5 = -1 < 0$: x_5 entra in base.

Calcolo la colonna aggiornata $\bar{A}_5$ per l'operazione di orlatura: $\bar{A}_5 = B^{-1}A_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

CARRY orlato:

$-z$	-10	$-5/2$	1	-1
x_1	1	1	-1	$\boxed{1}$
x_3	2	$-1/2$	1	-1

esce dalla base la variabile x_1 corrispondente al minimo dei rapporti $\bar{b}_i/\bar{A}_{i5}$, $\bar{A}_{i5} > 0$.

$-z$	-9	$-3/2$	0	0	$\bar{R}_0 \leftarrow R_0 + \bar{R}_1$
x_5	1	1	-1	1	$\bar{R}_1 \leftarrow R_1$
x_3	3	$1/2$	0	0	$\bar{R}_2 \leftarrow R_2 + \bar{R}_1$

<u>Iterazione 2</u>

$u^T = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \end{bmatrix}$

$\bar{c}_1 = c_1 - u^T A_1 = 4 - \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \geq 0;$

$\bar{c}_2 = -1/2 < 0$: x_2 entra in base.

Calcolo la colonna aggiornata $\bar{A}_2$ per l'operazione di orlatura: $\bar{A}_2 = B^{-1}A_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

CARRY orlato:

$-z$	-9	$-3/2$	0	$-1/2$
x_5	1	1	-1	-1
x_3	3	$1/2$	0	$\boxed{1/2}$

esce dalla base la variabile x_3 corrispondente al minimo dei rapporti $\bar{b}_i/\bar{A}_{i2}$, $\bar{A}_{i2} > 0$.

$-z$	-6	-2	1	0
x_5	7	2	-1	0
x_2	6	1	0	1

$\bar{R}_0 \leftarrow R_0 + R_2$
$\bar{R}_1 \leftarrow R_1 + \bar{R}_1$
$\bar{R}_2 \leftarrow 2R_2$

Iterazione 3

$u^T = \left[\begin{array}{cc} 2 & -1 \end{array}\right]$

$\bar{c}_1 = c_1 - u^T A_1 = 4 - \left[\begin{array}{cc} 2 & -1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array}\right] = 1 \geq 0;$

$\bar{c}_3 = 1 \geq 0;$

$\bar{c}_4 = 1 \geq 0;$

STOP: una soluzione ottima è: $x^* = [0, 6, 0, 0, 7]$, $z^* = 6$

Considerando che si tratta di un problema di minimo e che le variabili duali associate ai due vincoli valgono, rispettivamente $u_1 = 2$ e $u_2 = -1$ (e ricordando il significato delle variabili duali come prezzi marginali) converrebbe diminuire b_1 ($u_1 > 0$) o aumentare b_2 ($u_2 < 0$)

3. Il problema, con le variabili ordinate per valori decrescenti di $\frac{p_i}{w_i}$ è il seguente:

$\max z = 11x_3 + 10x_2 + 13x_4 + 8x_1 + 9x_5$

soggetto a

$4x_3 + 5x_2 + 8x_4 + 6x_1 + 7x_5 \leq 16$

$x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i$

L'albero di B&B è rappresentato in Figura 1.

$\boxed{P_0}$:

$x_3 = 1 \rightarrow \bar{W} = 12$
$x_2 = 1 \rightarrow \bar{W} = 7$
$x_4 = 7/8$ (variabile critica)
$UB_0 = 11 + 10 + \lfloor 13 \cdot \frac{7}{8} \rfloor = 32$
$SA_0 = LB = 11 + 10 + 8 = 29$
($x_3 = x_2 = x_1 = 1$, $x_4 = x_5 = 0$)

$\boxed{P_1}$: $x_4 = 0$ (no variabili dominate da x_4)

$x_3 = 1 \rightarrow \bar{W} = 12$
$x_2 = 1 \rightarrow \bar{W} = 7$
$x_1 = 1 \rightarrow \bar{W} = 1$
$x_5 = 1/7$ (variabile critica)
$UB_1 = 11 + 10 + 8 + \lfloor 9 * \frac{1}{7} \rfloor = 30$
$SA_1 = LB = 11 + 10 + 8 = 29$
($x_3 = x_2 = x_1 = 1$, $x_4 = x_5 = 0$)

$\boxed{P_2}$: $x_4 = 1$ (no variabili dominanti x_4)

($x_4 = 1 \rightarrow \bar{W} = 8$)
$x_3 = 1 \rightarrow \bar{W} = 4$
$x_2 = 4/5$ (variabile critica)
$UB_2 = 13 + 11 + \lfloor 10 * \frac{4}{5} \rfloor = 32$
$SA_2 = LB = 13 + 11 = 24$
($x_4 = x_3 = 1$, $x_1 = x_2 = x_5 = 0$)

$\boxed{P_3}$: [$x_4 = 1$ (no variabili dominanti x_4)]
$x_2 = 0 \quad \Rightarrow x_1 = x_5 = 0$ (dominate)

Il problema risultante

$\max z = 11x_3 + 13$
s.t. $4x_3 \leq 8$ ($x_3 \in \{0, 1\}$)

ha ottimo ($x_4 =$)$x_3 = 1$: $UB_3 = SA_3 = 24$

$\boxed{P_4}$: [$x_4 = 1$ (no variabili dominanti x_4)]
$x_2 = 1 \quad \Rightarrow x_3 = 1$ (dominante)

Il problema risultante

$\max z = 11 + 10 + 13 + 8x_1 + 9x_5$
s.t. $4 + 5 + 8 + 6x_1 + 7x_5 \leq 16$ ($x_i \in \{0, 1\}$)

non è ammissibile: N.A.

$\boxed{P_5}$: [$x_4 = 0$ (no variabili dominate da x_4)]
$x_5 = 0$ (no variabili dominate da x_5)

$x_3 = 1 \rightarrow \bar{W} = 12$
$x_2 = 1 \rightarrow \bar{W} = 7$
$x_1 = 1 \rightarrow \bar{W} = 1$

$UB_5 = LB_5 = 11 + 10 + 8 = 29$: S.A.
($x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $x_4 = x_5 = 0$)

$\boxed{P_6}$: $[x_4 = 0$ (no variabili dominanti x_4)]
$x_5 = 1 \quad \Rightarrow x_3 = x_2 = 1$ (dominanti)

Il problema risultante $\max z = 11 + 10 + 0 + 8x_1 + 9$
s.t. $4 + 5 + 0 + 6x_1 + 7 \leq 16$ $(x_1 \in \{0, 1\})$

ha ottimo $x_5 = x_3 = x_2 = 1$: $UB_6 = SA_6 = 30$

Tutti i nodi risultano chiusi: la soluzione ottima è $x_5 = x_3 = x_2 = 1$, $x_1 = x_4 = 0$, $z^* = 30$

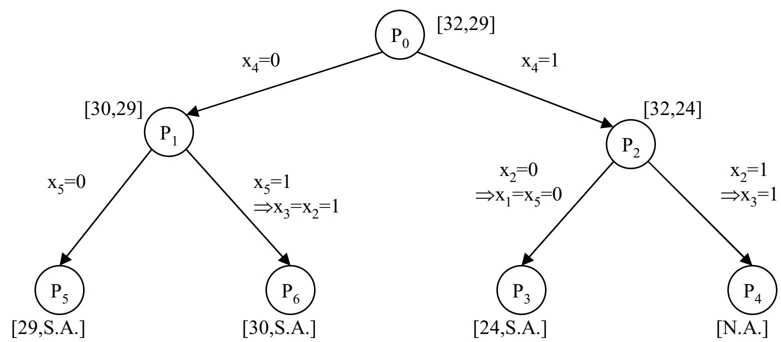

Figure 1: Esercizio 3

4. Introducendo le variabili y_1, y_2 e y_3 associate ai tre vincoli primali, il problema duale è il seguente:

$$\begin{array}{lccc} \min & \omega = 16y_1 + 17y_2 + 5y_3 & & \\ s.t. & 2y_1 + y_2 & \leq -4 \\ & 3y_2 + y_3 & \leq -2 \\ & y_i \leq 0 & \forall i \end{array}$$

Per stabilire se la soluzione data è ottima, sfrutto il teorema della dualità forte. La soluzione duale data:

(a) soddisfa i vincoli di non positività delle variabili: $y_1 \leq 0$, $y_2 \leq 0$ e $y_3 \leq 0$,
(b) soddisfa il primo vincolo duale: $2(-\frac{5}{3}) + (-\frac{2}{3}) = -4 \leq -4$;
(c) soddisfa il secondo vincolo duale: $3(-\frac{2}{3}) + 0 = -2 \leq -2$;
(d) il valore della funzione obiettivo è: $16(-\frac{5}{3}) + 17(-\frac{2}{3}) + 0 = -38$.

Abbiamo quindi una soluzione ammissibile duale con valore della funzione obiettivo pari a quello di una soluzione ammissibile (e ottima) primale. Pertanto, per la dualità forte, la soluzione duale data è ottima.

5. Le condizioni di complementarietà primale-duale (o di ortogonalità) si enunciano come segue: Data la coppia di problemi primale-duale

$$\begin{array}{llcll} \min & c^T x & \qquad\qquad & \max & u^T b \\ \text{s.t.} & Ax \geq b & & \text{s.t.} & u^T A \leq c^T \\ & x \geq 0 & & & u \geq 0 \end{array}$$

e due soluzioni x (primale) e u duale, allora

$$\bar{x} \text{ e } \bar{u} \text{ sono ottime} \quad \textbf{se e solo se} \quad \begin{array}{ll} Ax \geq b \wedge x \geq 0 & \text{(ammissibilità primale)} \\ u^T A \leq c^T \wedge u \geq 0 & \text{(ammissibilità duale)} \\ \left.\begin{array}{l} u^T(Ax - b) = 0 \\ (c^T - u^T A)x = 0 \end{array}\right\} & \text{(ortogonalità)} \end{array}$$

Dimostrazione sufficienza (ammissibilità e ortogonalità $\Rightarrow$ ottimalità):

$$\left.\begin{array}{r} u^T(Ax - b) = 0 \Rightarrow u^T Ax = u^T b \\ (c^T - u^T A)x \Rightarrow c^T x = u^T Ax \end{array}\right\} \Rightarrow c^T x = u^T b$$

x e u sono quindi due soluzioni ammissibili (per ipotesi) in corrispondenza delle quali i valori delle funzioni obiettivo sono uguali e, per il teorema della dualità forte, x e u sono ottime.

Dimostrazione necessità (ottimalità $\Rightarrow$ ammissibilità e ortogonalità):

Se le soluzioni sono ottime, sono anche, per definizione, ammissibili. Ne consegue

$$c^T x \quad \underbrace{\leq}_{\text{amm. duale, } x \geq 0} \quad u^T Ax \quad \underbrace{\leq}_{\text{amm. primale, } u \geq 0} \quad u^T b$$

Inoltre, essendo x e u ottime, $c^T x = u^T b$, per il teorema della dualità forte. Le due disugualianze sono quindi, in effetti, delle uguaglianze:

$u^T Ax = u^T b \Rightarrow u^T(Ax - b) = 0$ e

$c^T x = u^T Ax \Rightarrow (c^T - u^T A)x = 0$

(c.v.d.)

6. La regola di Bland per il simplesso primale impone di selezionare, tra tutte le variabili candidate ad entrare o ad uscire dalla base, quelle con indice minimo, cioé:

   - indicando con $\bar{c}_j, j = 1..n$ i costi ridotti delle variabili, entra in base x_h con $h = \arg\min_j\{\bar{c}_j < 0\}$
   - indicando con $\bar{b}_i, i = 1..m$ i valori delle variabili nella base corrente, $x_{\beta[i]}$ tali variabili, $\bar{a}_{ih}$ i valori della colonna h aggiornata per la base corrente, e $\vartheta = \min_i\{\bar{b}_i/\bar{a}_{ih}\}$, esce dalla base la variabile $x_{\beta[k]}$, $\beta[r] = \min_i\{\beta[i] : \bar{b}_i/\bar{a}_{ih} = \vartheta\}$.

   La regola di Bland serve a evitare che il simplesso cicli, visitando le stesse soluzioni di base, e quindi a garantire delle condizioni di terminazione dell'algoritmo del simplesso.