RICERCA OPERATIVA

Tema d'esame del 13/12/2005

COGNOME:
NOME:

MATRICOLA:

1. Un'associazione umanitaria ha raccolto 150.000 euro per inviare dei pacchetti regalo natalizi ai bambini di Haiti. Per l'acquisto dei giocattoli, l'associazione decide di sfruttare le offerte particolarmente vantaggiose sintetizzate nella seguente tabella:

Fornitore	Peluche	Bambole	Camion	Marionette	Prezzo (euro)
A	2	1	2	3	35
B	1	2	1	4	40
C	0	3	2	3	50
D	1	0	2	3	25

   Si decide di preparare due tipi di pacchetti: il primo tipo (per bambini) contiene 1 peluche, 2 camion e 3 marionette; il secondo tipo (per bambine) contiene due bambole, 1 peluche e 4 marionette. I fornitori A e D sono troppo distanti tra loro e solo uno dei due può essere utilizzato. Si vuole inoltre che il numero dei pacchetti per bambini sia almeno i 2/3 ma non più dei 5/4 dei pacchetti per bambine. Si vuole massimizzare il numero complessivo dei pacchetti spediti, tenendo conto che si dovranno pagare tre euro per ogni spedizione.

2. Dato il seguente problema di P.L.

$$\begin{array}{lll} \max & (1+k)x_1 - (1-2k)x_2 & \\ s.t. & x_1 + x_2 & \geq 1 \\ & x_1 & \leq 2+k \\ & x_i \geq 0 & \forall i \end{array}$$

   applicare il metodo del simplesso primale per determinare la soluzione ottima con $k = 0$. Discutere l'ammissibilità e l'ottimalità della base trovata al variare del parametro k.

3. Si consideri il seguente problema di PL, la cui soluzione ottima è: $x_1 = 8$, $x_2 = 3$, con $z = -38$.

$$\begin{array}{lll} \min & z = -4x_1 - 2x_2 & \\ s.t. & 2x_1 & \leq 16 \\ & x_1 + 3x_2 & \leq 17 \\ & x_2 & \leq 5 \\ & x_i \geq 0 & \forall i \end{array}$$

   Scrivere il problema duale e determinare i valori ottimi delle variabili duali.

4. Sia la figura 1 l'albero di sviluppo del Branch and Bound per un problema di ottimizzazione combinatoria la cui funzione obiettivo ha coefficienti interi.

   - Si tratta di un problema di minimo o di massimo? Perché?
   - Quali sono i possibili valori per la funzione obiettivo?
   - Quale nodo sarà sviluppato per primo da una strategia best first?

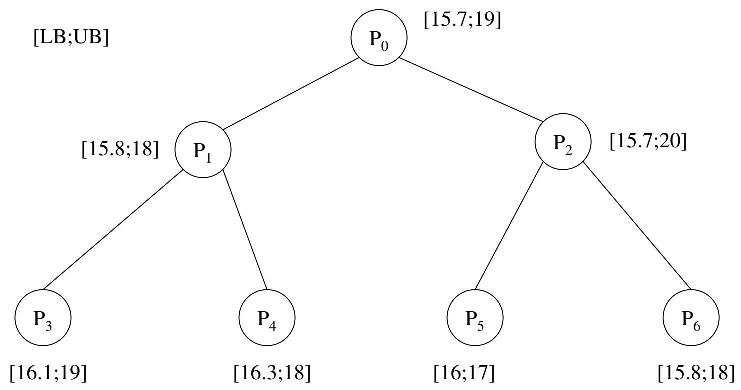

Figure 1: Albero B&B

- Si supponga che il primo dei nodi ottenuti dallo sviluppo di cui al punto precedente porti ad un insieme di soluzioni vuoto: quali valori di upper e lower bound relativi al secondo nodo consentono di riconoscere subito la soluzione ottima del problema?

5. Come si riconoscono le condizioni di inammissibilità per un problema di P.L. risolto con il metodo del simplesso duale? Giustificare la risposta.

6. Fornire un'interpretazione economica dei valori all'ottimo delle variabili duali come prezzi marginali.

SOLUZIONI

1. Introduciamo le variabili:

   - x_i: numero di pacchetti preparati per bambini ($i = 1$) e per bambine ($i = 2$);
   - y_j: numero di offerte acquistate presso il fornitore $j \in \{A, B, C, D\}$;
   - z_j: binaria pari a 1 se si utilizza il fornitore j, 0 altrimenti.

   e una costante M sufficientemente grande.

   Un possibile modello diventa:

$\max x_1 + x_2$	(numero totale di pacchetti)
s.t.	
$2y_A + y_B + y_D \geq x_1 + x_2$	(peluche sufficienti)
$y_A + 2y_B + 3y_C \geq 2x_2$	(bambole sufficienti)
$2y_A + y_B + 2y_C + 2y_D \geq 2x_1$	(camion sufficienti)
$3y_A + 4y_B + 3y_C + 3y_D \geq 3x_1 + 4x_2$	(marionette sufficienti)
$35y_A + 40y_B + 50y_C + 25y_D \leq 150000 - 3(x_1 + x_2)$	(budget)
$x_1 \geq 2/3x_2$	(minimo pacchetti per bambini)
$x_1 \leq 5/4x_2$	(massimo pacchetti per bambini)
$y_A \leq Mz_A$	(attivazione z_A)
$y_D \leq Mz_D$	(attivazione z_D)
$z_A + z_D \leq 1$	(vincolo logico fornitori A-D)
$x_1, x_2, y_A, y_B, y_C, y_D \in \mathbb{Z}_+$	
$z_A, z_D \in \{0, 1\}$	

2. Ponendo $k = 0$ si ottiene il problema:

$$\begin{array}{rll} \max & x_1 - x_2 & \\ s.t. & x_1 + x_2 & \geq 1 \\ & x_1 & \leq 2 \\ & x_i \geq 0 & \forall i \end{array}$$

   Si passa alla forma standard

$$\begin{array}{rll} \min & -x_1 + x_2 & \\ s.t. & x_1 + x_2 - x_3 = 1 & \\ & x_1 + x_4 & = 2 \\ & x_i \geq 0 & \forall i \end{array}$$

   Non essendo evidente una base ammissibile, passo alla FASE I del simplesso, risolvendo il problema artificiale:

$$\begin{array}{rll} \min & y & \\ s.t. & x_1 + x_2 - x_3 + y & = 1 \\ & x_1 + x_4 & = 2 \\ & x_i \geq 0 & \forall i \end{array}$$

   Applichiamo il simplesso in forma tableau (regola di Bland):

$$\begin{array}{c|c|ccccc|}
\hline
-z_{art} & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
y & 1 & \boxed{1} & 1 & -1 & 0 & 1 \\
x_4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c|ccccc|}
\hline
-z_{art} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
x_1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\
x_4 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
\hline
\end{array}$$

Il valore ottimo del problema artificiale è 0, quindi $[x_1, x_4]$ è una base ammissibile del problema dato. Passiamo alla fase II, (sempre con il simplesso in forma tableau, regola di Bland):

$$\begin{array}{c|c|cccc|}
\hline
-z_{\min} & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\
\hline
x_1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\
x_4 & 1 & 0 & -1 & \boxed{1} & 1 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c|cccc|}
\hline
-z_{\min} & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
x_1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
x_3 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\
\hline
\end{array}$$

La soluzione ottima è $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$; $z_{\max} = -z_{\min} = -(-2) = 2$.

Le variabili nella base ottima sono $[x_1, x_3]$. Bisogna quindi studiare le condizioni sotto cui la base $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ rimane ammissibile e ottima.

NOTA: per poter studiare le condizioni di ammissibilità e ottimalità (come studiate in teoria) dobbiamo considerare il problema in forma standard! (funzione obiettivo di minimo, vincoli di uguaglianza etc.)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad c_B^T = \begin{bmatrix} -(1+k) & 0 \end{bmatrix}$$

Ammissibilità: $B^{-1}b \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2 + k \geq 0 \\ -1 + 2 + k \geq 0 \end{cases} \Rightarrow k \geq -1$

Ottimalità:

1. $\bar{c}_2 \geq 0 \quad \Rightarrow c_2 - c_B^T B^{-1} A_2 = 1 - 2k \geq 0 \quad \Rightarrow \quad k \leq 1/2$
2. $\bar{c}_4 \geq 0 \quad \Rightarrow c_4 - c_B^T B^{-1} A_4 = 1 + k \geq 0 \quad \Rightarrow \quad k \geq -1$

In totale, la base $[A_1, A_3]$ rimane ottima e ammissibile per $k \in [-1, 1/2]$.

3. Introducendo le variabili u_1, u_2 e u_3 associate ai tre vincoli primali, il problema duale è il seguente:

$$\begin{array}{lccc}
\min & \omega = 16u_1 + 17u_2 + 5u_3 & & \\
s.t. & 2u_1 + u_2 & \leq -4 \\
 & 3u_2 + u_3 & \leq -2 \\
 & u_i \leq 0 & \forall i
\end{array}$$

Per ricavare i valori all'ottimo delle variabili duali, partiamo dalla soluzione ottima primale data e applichiamo le condizioni di ortogonalità.

$2x_1 = 16$ (vincolo primale saturo) $\Rightarrow$ nessuna informazione utile su u_1;

$x_1 + 3x_2 = 17$ (vincolo primale saturo) $\Rightarrow$ nessuna informazione utile su u_2;

$x_2 = 3 < 5$ (vincolo primale lasco) $\Rightarrow u_3 = 0$;

$x_1 > 0 \Rightarrow 2u_1 + u_2 = -4$ (vincolo duale saturo)

$x_2 > 0 \Rightarrow 3u_2 + u_3 = -2$ (vincolo duale saturo)

Abbiamo un sistema di 3 equazioni in 3 incognite:

$$\begin{cases} u_3 = 0 \\ 2u_1 + u_2 = -4 \\ 3u_2 + u_3 = -2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u_1 = -5/3 \\ u_2 = -2/3 \\ u_3 = 0 \end{cases}$$

Per verifica, possiamo constatare che il valore della funzione obiettivo all'ottimo è proprio -38, verificando il teorema della dualità forte.

4. Il problema è di minimo, in quanto il LB dei nodi figli risulta sempre non migliore ($\geq$) dei rispettivi padri (come deve essere, essendo i problemi figli più vincolati). Se fosse un problema di massimo, la valutazione ottimistica corrisponderebbe all'upper bound, che invece, in alcuni casi, migliora di padre in figlio (ad es. nodi P_1 e P_3): non si tratterebbe quindi di una valutazione ottimistica.

   Osservando che i coefficienti della funzione obiettivo sono interi, e assumendo che tutte le variabili in funzione obiettivo siano intere, possiamo sostituire il lower bound indicato in figura con l'approssimazione al rispettivo intero superiore. L'ottimo sarà quindi compreso tra il miglior lower bound dei nodi ancora aperti (16) e la migliore soluzione ammissibile a disposizione (17).

   In caso di strategia Best Bound First, il prossimo nodo da sviluppare sarebbe il nodo P_5 (o P_6) cui corrisponde il miglior valore (più basso) di lower bound.

   Una possibile coppia di valori potrebbe essere $[16, 16]$: in questo modo tutti i nodi rimasti aperti sarebbero non miglioranti e potrebbero essere chiusi.

5. Le condizioni di inammissibilità nel metodo del simplesso duale si riconoscono dalla presenza di una riga i del tableau con valore della corrispondente variabile in base negativo ($x_{\beta[i]} < 0$) e restanti elementi ($\bar{a}_{ij}$) tutti non negativi. In questo caso il tableau riporterebbe una condizione del tipo $\sum_j \bar{a}_{ij} x_j = \bar{b}_i < 0$ che non è ottenibile con x_j tutte non negative (e quindi ammissibili).

6. Consideriamo un problema di programmazione lineare in forma standard $\min c^T x : Ax = b, x \geq 0$ e sia x_B una soluzione ottima di base. Se si considera una piccola variazione dei termini noti ($b \to b + \Delta b$), tale da lasciare la base B ammissibile, il valore della funzione obiettivo diventa $z_B \to z_B^{new} = c_B^T B^{-1}(b + \Delta b) = z_B^{old} + c_B^T B^{-1} \Delta b$. Dal teorema della dualità forte, sappiamo che $c_B^T B^{-1}$ corrisponde proprio al valore ottimo delle variabili duali u^T. Quindi $z_B^{new} = z_B^{old} + \sum_i u_i \Delta b_i$: il valore ottimo di una variabile duale u_i indica di quanto aumenta il valore della funzione obiettivo per un aumento unitario del corrispondente termine noto. In altri termini, u_i dice quanto pago (prezzo) delle variazioni (marginale) in aumento di un termine noto.