

Ricerca Operativa

A.A. 2008/2009

2. Modelli di Programmazione Lineare

Modelli di programmazione lineare

- Il metodo grafico è basato su
 - ⇒ **linearità** della funzione obiettivo
 - ⇒ **linearità** dei vincoli
- Sotto queste ipotesi (come vedremo meglio in seguito), una soluzione si trova su un vertice della regione ammissibile: l'ultimo toccato traslando le rette isoprofitto nella direzione del gradiente
- Si parla in questi casi di **modelli di programmazione lineare (PL)**

Formulazione generale di un modello di programmazione lineare

$$\min (\max) z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_jx_j + \dots + c_nx_n (+cost.)$$

subject to (s.t., soggetto a, s.a)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n \geq (=, \leq) b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n \geq (=, \leq) b_2$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n \geq (=, \leq) b_m$$

$x_j \in \mathfrak{R}_{(+)}$ (x_j intere)

z : funzione obiettivo da minimizzare (min) o massimizzare (max)

x_j : variabili decisionali (incognite)
 reali (eventualmente non negative)
 intere (eventualmente non negative)
 binarie ($x_j \in \{0,1\}$)

} Programmazione
lineare intera (PLI)

c_j : coefficienti di costo (min) o profitto (max)

a_{ij} : coefficienti tecnologici

b_i : termini noti

Dieta economica

Un dietologo deve preparare una dieta che garantisca un apporto giornaliero di proteine, ferro e calcio di almeno 20 mg, 30 mg e 10 mg, rispettivamente. Il dietologo è orientato su cibi a base di verdura (5 mg/kg di proteine, 6 mg/Kg di ferro e 5 mg/Kg di calcio, al costo di 4 €/Kg), carne (15 mg/kg di proteine, 10 mg/Kg di ferro e 3 mg/Kg di calcio, al costo di 10 €/Kg) e frutta (4 mg/kg di proteine, 5 mg/Kg di ferro e 12 mg/Kg di calcio, al costo di 7 €/Kg). Determinare la dieta di costo minimo.

Modello PLI

- Siano x_1 , x_2 e x_3 le quantità di cibi a base di verdura, carne e frutta, rispettivamente

$$\min \quad 4x_1 + 10x_2 + 7x_3 \quad (\text{costo giornaliero dieta})$$

s.t.

$$5x_1 + 15x_2 + 4x_3 \geq 20 \quad (\text{proteine})$$

$$6x_1 + 10x_2 + 5x_3 \geq 30 \quad (\text{ferro})$$

$$5x_1 + 3x_2 + 12x_3 \geq 10 \quad (\text{calcio})$$

$$x_i \in \mathcal{R}_+, \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

Luigi De Giovanni - Ricerca Operativa - 2. Modelli di Programmazione Lineare

2.5

Indagine di mercato

Un'azienda pubblicitaria deve svolgere un'indagine di mercato per lanciare un nuovo prodotto. Si deve contattare telefonicamente un campione significativo di persone: almeno 150 donne sposate, almeno 110 donne non sposate, almeno 120 uomini sposati e almeno 100 uomini non sposati. Le telefonate possono essere effettuate al mattino (al costo operativo di 1.1 euro) o alla sera (al costo di 1.6 euro). Le percentuali di persone mediamente raggiunte sono riportate in tabella.

	Mattino	Sera
Donne sposate	30%	30%
Donne non sposate	10%	20%
Uomini sposati	10%	30%
Uomini non sposati	10%	15%
Nessuno	40%	5%

Si noti come le telefonate serali sono più costose, ma permettono di raggiungere un maggior numero di persone: solo il 5% va a vuoto. Si vuole minimizzare il costo complessivo delle telefonate da effettuare (mattina/sera) in modo da raggiungere un campione significativo di persone

Luigi De Giovanni - Ricerca Operativa - 2. Modelli di Programmazione Lineare

2.6

Modello PLI

- Siano x_1 e x_2 il numero di telefonate da fare al mattino e alla sera, rispettivamente

$$\min \quad 1.1 x_1 + 11.6 x_2 \quad (\text{costo totale telefonate})$$

s.t.

$$0.3x_1 + 0.3x_2 \geq 150 \quad (\text{donne sposate})$$

$$0.1x_1 + 0.2x_2 \geq 110 \quad (\text{donne non sposate})$$

$$0.1x_1 + 0.3x_2 \geq 120 \quad (\text{uomini sposati})$$

$$0.1x_1 + 0.15x_2 \geq 100 \quad (\text{uomini non sposati})$$

$$x_i \in \mathbb{Z}_+, \quad \forall i \in \{1, 2\}$$

Trasporto di frigoriferi

Una ditta di produzione di elettrodomestici produce dei frigoriferi in tre stabilimenti e li smista in quattro magazzini intermedi di vendita. La produzione settimanale nei tre stabilimenti A, B e C è rispettivamente di 50, 70 e 20 unità. La quantità richiesta dai 4 magazzini è rispettivamente di 10, 60, 30 e 40 unità. I costi per il trasporto di un frigorifero tra gli stabilimenti e i magazzini 1, 2, 3 e 4 sono i seguenti:

- dallo stabilimento A: 6, 8, 3, 4 euro;
- dallo stabilimento B: 2, 3, 1, 3 euro;
- dallo stabilimento C: 2, 4, 6, 5 euro.

La ditta vuole determinare il piano di trasporti di costo minimo.

Modello PLI

- Sia x_{ij} il numero di frigoriferi prodotti nello stabilimento i e smistati nel magazzino j

$$\begin{aligned} \min \quad & 6x_{A1} + 8x_{A2} + 3x_{A3} + 4x_{A4} + \\ & + 2x_{B1} + 3x_{B2} + 1x_{B3} + 3x_{B4} + \\ & + 2x_{C1} + 4x_{C2} + 6x_{C3} + 5x_{C4} \end{aligned}$$

s.t.

$$\begin{aligned} x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4} &\leq 50 && \text{(capacità produttiva stabilimento A)} \\ x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4} &\leq 70 && \text{(capacità produttiva stabilimento B)} \\ x_{C1} + x_{C2} + x_{C3} + x_{C4} &\leq 20 && \text{(capacità produttiva stabilimento C)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{A1} + x_{B1} + x_{C1} &\geq 10 && \text{(domanda magazzino 1)} \\ x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} &\geq 60 && \text{(domanda magazzino 2)} \\ x_{A3} + x_{B3} + x_{C3} &\geq 30 && \text{(domanda magazzino 3)} \\ x_{A4} + x_{B4} + x_{C4} &\geq 40 && \text{(domanda magazzino 4)} \end{aligned}$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}_+, \quad \forall i \in \{A, B, C\}, j \in \{1, 2, 3, 4\}$$

Luigi De Giovanni - Ricerca Operativa - 2. Modelli di Programmazione Lineare

2.9

Turni in ospedale

Si vogliono organizzare i turni degli infermieri in ospedale. Ogni infermiere lavora 5 giorni consecutivi, indipendentemente da come sono collocati all'interno della settimana, e poi ha diritto a due giorni consecutivi di riposo. Le esigenze di servizio per i vari giorni della settimana richiedono la presenza di 17 infermieri il lunedì, 13 il martedì, 15 il mercoledì, 19 il giovedì, 14 il venerdì, 16 il sabato e 11 la domenica. Organizzare il servizio in modo da minimizzare il numero totale di infermieri da impegnare.

Luigi De Giovanni - Ricerca Operativa - 2. Modelli di Programmazione Lineare

2.10

Modello PLI

- Siano *lun, mar, mer, gio, ven, sab* e *dom* il numero di infermieri in cui turno inizia di lunedì,... domenica

$$\min \quad lun + mar + mer + gio + ven + sab + dom$$

s.t.

$$\begin{aligned} lun &+ gio + ven + sab + dom \geq 17 \text{ (presenze lunedì)} \\ lun + mar &+ ven + sab + dom \geq 13 \text{ (presenze martedì)} \\ lun + mar + mer &+ sab + dom \geq 15 \text{ (presenze mercoledì)} \\ lun + mar + mer + gio &+ dom \geq 19 \text{ (presenze giovedì)} \\ lun + mar + mer + gio + ven &\geq 14 \text{ (presenze venerdì)} \\ mar + mer + gio + ven + sab &\geq 16 \text{ (presenze sabato)} \\ +mer + gio + ven + sab + dom &\geq 11 \text{ (presenze domenica)} \end{aligned}$$

$$lun, mar, mer, gio, ven, sab, dom \in Z_+$$

Localizzazione di servizi

Una città è divisa in sei quartieri, dove si vogliono attivare dei centri unificati di prenotazione (CUP) per servizi sanitari. In ciascun quartiere è stata individuata una possibile località di apertura. Le distanze medie in minuti da ciascun quartiere a ciascuna delle possibili località è indicata in tabella. Si desidera che nessun utente abbia un tempo medio di spostamento superiore a 15 minuti per arrivare al CUP più vicino e si vuole minimizzare il numero di CUP attivati.

	Loc. 1	Loc. 2	Loc 3	Loc. 4	Loc. 5	Loc. 6
Q.re 1	5	10	20	30	30	20
Q.re 2	10	5	25	35	20	10
Q.re 3	20	25	5	15	30	20
Q.re 4	30	35	15	5	15	25
Q.re 5	30	20	30	15	5	14
Q.re 6	20	10	20	25	14	5

Modello PLI

- Sia $x_i=1$, se viene aperto il CUP nel quartiere i , 0 altrimenti

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\ \text{s.t.} & \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \text{ (esigenze q.re 1)} \\ & x_1 + x_2 + x_6 \geq 1 \text{ (esigenze q.re 2)} \\ & x_3 + x_4 \geq 1 \text{ (esigenze q.re 3)} \\ & x_3 + x_4 + x_5 \geq 1 \text{ (esigenze q.re 4)} \\ & x_4 + x_5 + x_6 \geq 1 \text{ (esigenze q.re 5)} \\ & x_2 + x_5 + x_6 \geq 1 \text{ (esigenze q.re 6)} \end{array}$$

$$x_i \in \{0,1\}$$

Luigi De Giovanni - Ricerca Operativa - 2. Modelli di Programmazione Lineare

2.13

Modelli

- Mix ottimo di produzione:
 - Produzione e forza lavoro
 - Produzione e capacità eccedente
 - Produzione di salumi (libro di testo)
- Multiperiodali
 - Piano di investimento
 - Produzione di radio (libro di testo)

Luigi De Giovanni - Ricerca Operativa - 2. Modelli di Programmazione Lineare

2.14

Min-max, max-min e min-abs

$\min \max \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

$\min y$

$y \geq e_1$

$y \geq e_2$

...

$y \geq e_n$

$\max \min \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

$\max y$

$y \leq e_1$

$y \leq e_2$

...

$y \leq e_n$

$\min |e| \equiv \min \max \{e, -e\}$

$\min y$

$y \geq e$

$y \geq -e$

Modelli

- Produzione su più linee
- Schedulazione just-in-time