Ricerca Operativa

Note su Programmazione Lineare e Metodo del Simplesso (parte I)

Luigi De Giovanni

AVVERTENZA: le note presentate di seguito non hanno alcuna pretesa di completezza, né hanno lo scopo di sostituirsi alle spiegazioni del docente. Il loro scopo è quello di fissare alcuni concetti presentati in classe. Le note contengono un numero limitato di esempi ed esercizi svolti. Questi rappresentano una parte fondamentale nella comprensione della materia e sono presentati in classe.

Contents

1 Problemi di programmazione lineare

Un problema di ottimizzazione vincolata è definito dalla massimizzazione di una funzione obiettivo sotto un certo numero di vincoli: si vuole trovare la soluzione che massimizza o minimizza la funzione obiettivo f tra tutte le soluzioni x che soddisfano un dato insieme di m vincoli definiti come funzioni g_i. In termini matematici possiamo scrivere:

$$
\begin{array}{rll}
\min(\max) & f(x) & \\
\text{s.t.} & g_i(x) = b_i & (i = 1 \ldots k) \\
& g_i(x) \leq b_i & (i = k+1 \ldots k') \\
& g_i(x) \geq b_i & (i = k'+1 \ldots m) \\
& x \in \mathbb{R}^n &
\end{array}
$$

dove

- $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ è un vettore di n variabili reali (ciascun vettore rappresenta una potenziale soluzione del problema);
- f e g_i sono funzioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- $b_i \in \mathbb{R}$

Un **problema di Programmazione Lineare (PL)** è un problema di ottimizzazione in cui la funzione obiettivo f e tutti i vincoli g_i sono funzioni lineari delle variabili x_j:

$$
\begin{array}{llll}
\min(\max) & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & & \\
\text{s.t.} & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n & = b_i & (i = 1 \ldots k) \\
& a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n & \leq b_i & (i = k+1 \ldots k') \\
& a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n & \geq b_i & (i = k'+1 \ldots m) \\
& x_i \in \mathbb{R} & & (i = 1 \ldots n)
\end{array}
$$

1.1 Notazione

Ricorrendo alle operazioni tra vettori, un problema di PL può essere scritto in forma più compatta. Si noti come la funzione obiettivo è ottenuta dal prodotto scalare dei due vettori $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ e $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. Lo stesso prodotto può essere scritto come prodotto righe per colonne del vettore riga c^T e del vettore colonna x, cioè:

$$c^T x = \left[\begin{array}{cccc} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right] = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

Analogamente, il termine a sinistra di ciascun vincolo i può essere scritto come:

$$a_i^T x = \left[\begin{array}{cccc} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right] = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n$$

In forma più compatta, un problema PL diventa:

$$\begin{array}{llll} \min(\max) & c^T x & & \\ \text{s.t.} & a_i^T x & = b_i & (i = 1 \ldots k) \\ & a_i^T x & \leq b_i & (i = k+1 \ldots k') \\ & a_i^T x & \geq b_i & (i = k'+1 \ldots m) \\ & x \in \mathbb{R}^n & & \end{array}$$

1.2 Soluzione di un problema PL

Una *soluzione ammissibile* di un problema di PL è un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ che soddisfa tutti i vincoli.

L'insieme di tutte le soluzioni ammissibili si dice *regione ammissibile* o *insieme ammissibile*.

Una *soluzione ottima* x^* è una soluzione ammissibile che ottimizza (miminizza o massimizza) il valore della funzione obiettivo tra tutte le soluzioni ammissibili:
$c^T x^* \leq (\geq) c^T x, \forall x \in \mathbb{R}^n, x$ ammissibile.

Non sempre un problema di PL ammette una soluzione ottima. Infatti, è possibile dimostrare che ogni problema di PL soddisfa sempre e solo uno dei 3 casi seguenti:

1. il problema è *inammissibile*: l'insieme ammissibile è vuoto;

2. il problema è *illimitato*: è possibile trovare delle soluzioni ammissibili che fanno diminuire (o aumentare per problemi di massimo) il valore della funzione obiettivo a piacere.

3. il problema *ammette soluzione ottima*: esiste almeno una soluzione ammissibile che ottimizza la funzione obiettivo (e il valore ottimo della funzione obiettivo è limitato).

Risolvere un problema di PL significa riconoscere uno dei tre casi citati e dare, nel caso 3, una soluzione ottima e il corrispondete valore della funzione obiettivo.

2 Geometria della Programmazione Lineare

Per la messa a punto di metodi di soluzione di problemi di PL, è utile analizzare la geometria dell'insieme ammissibile.

2.1 La regione ammissibile

Ciascuna equazione o disequazione nel sistema dei vincoli di un problema PL individua una regione nello spazio $\mathbb{R}^n$: ogni equazione individua un iperpiano e ogni disequazione un semispazio chiuso. L'insieme ammissibile deriva dall'intersezione di questi iperpiani e semispazi chiusi.

Definizione 1 (Poliedro). *Un insieme $P \subseteq \mathbb{R}^n$ è un poliedro se è ottenuto dall'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi e iperpiani in $\mathbb{R}^n$.*

Da un punto di vista geometrico, quindi, una soluzione ammissibile è un punto nello spazio n-dimensionale e la regione ammissibile è un poliedro nello stesso spazio. Un esempio è dato dalla figura 1.

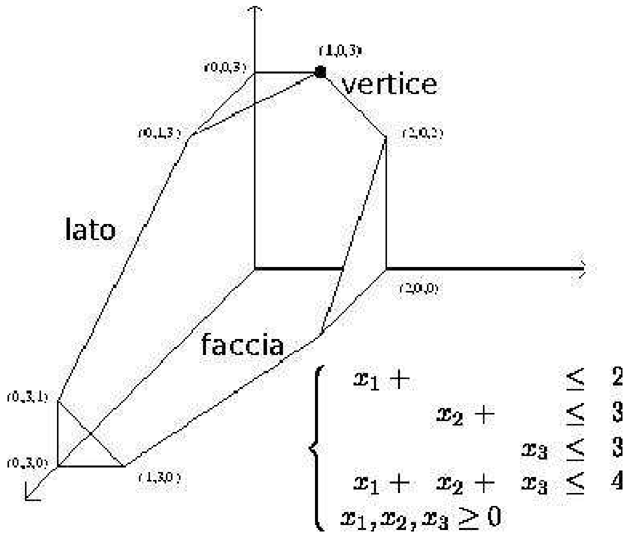

Figure 1: Un poliedro in $\mathbb{R}^3$

Possiamo quindi scrivere un problema di PL nella seguente forma:

$$\begin{array}{ll} \min(\max) & c^T x \\ \text{s.t.} & x \in P \end{array}$$

oppure

$$\min(\max)\{c^T x : x \in P\}$$

dove P è un poliedro in $\mathbb{R}^n$.

2.2 Vertici di un poliedro

Se pensiamo alla soluzione di un problema di PL con il metodo grafico, intuiamo la particolare rilevanza dei punti del poliedro corrispondenti ai *vertici*, dove si trova una soluzione ottima. Introduciamo dei concetti che ci aiutino a generalizzare questo risultato.

Definizione 2 (Combinazione convessa di due punti) *Dati due punti $x, y \in \mathbb{R}^n$, il punto $z \in \mathbb{R}^n$ è combinazione convessa di x e y se esiste uno scalare $\lambda \in [0,1]$ tale che $z = \lambda x + (1-\lambda)y$.*

Per avere un'idea del significato geometrico della combinazione convessa, consideriamo x e y nel piano, cioé $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ e $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$. Le combinazioni convesse dei due punti x e y rappresentano, al variare di λ tra 0 e 1, tutti e soli i punti del segmento $x - y$, estremi inclusi (vedi figura 2).

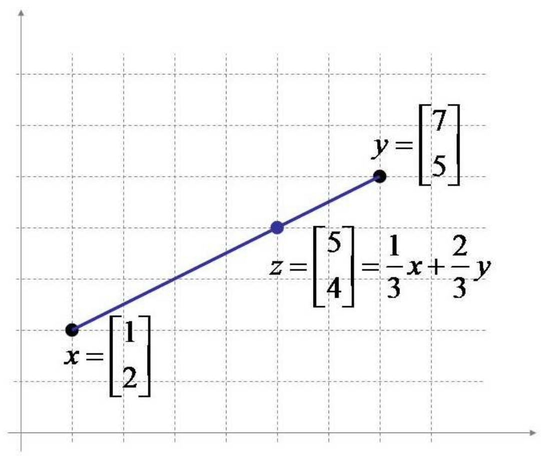

Figure 2: Combinazione convessa in $\mathbb{R}^2$

Definizione 3 (Combinazione convessa stretta di due punti) *Dati due punti $x, y \in \mathbb{R}^n$, il punto $z \in \mathbb{R}^n$ è combinazione convessa* stretta *di x e y se esiste uno scalare $\lambda \in (0,1)$ tale che $z = \lambda x + (1-\lambda)y$.*

In pratica, la combinazione convessa stretta non include i due punti x e y.

Definizione 4 (Vertice di un poliedro) *Dato un poliedro P e un punto del poliedro $v \in P$, v è vertice di P se non può essere espresso come combinazione convessa* stretta *di due punti distinti dello stesso poliedro: $\nexists x, y \in P, \lambda \in (0,1) : x \neq y, v = \lambda x + (1-\lambda)y$.*

Il concetto di combinazione convessa può essere generalizzato alla combinazione di più punti, come segue.

Definizione 5 (Combinazione convessa) *Dati k punti $x^1, x^2 \dots x^k \in \mathbb{R}^n$, il punto $z \in \mathbb{R}^n$ è combinazione convessa di $x^1, x^2 \dots x^k$ se esistono k scalari non negativi $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_k \geq 0$ tali che $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ e $z = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i$.*

Per l'interpretazione geometrica, possiamo considerare la figura 3: al variare dei coefficienti λ_i, si possono rappresentare tutti i punti nel quadrilatero evidenziato (corrispondente all'inviluppo convesso dei suoi 4 vertici).

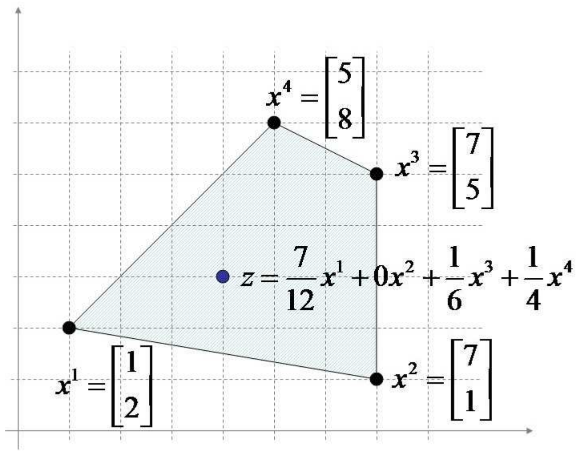

Figure 3: Combinazione convessa in $\mathbb{R}^2$

Usando questa definizione, è facilmente intuibile il seguente risultato, del quale non diamo dimostrazione formale:

Teorema 1 (Rappresentazione dei poliedri [Minkowski-Weyl] - caso limitato)*: Dato un poliedro* limitato *$P \subseteq \mathbb{R}^n$, e indicando con $v^1, v^2, ..., v^k$ ($v^i \in \mathbb{R}^n$) i vertici di P, si ha $x \in P \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v^i$ con $\lambda_i \geq 0, \forall i = 1..k$ e $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$. In altri termini,* **ogni punto di P si può ottenere come combinazione convessa dei suoi vertici**.

Abbiamo ora gli elementi per generalizzare il risultato che fa corrispondere l'ottimo di un problema PL con uno dei suoi vertici.

Teorema 2 (Vertice ottimo) *Dato un problema PL* $\min(\max)\{c^T x : x \in P\}$*, se P è non vuoto e limitato, allora il problema ammette soluzione ottima e esiste almeno un vertice ottimo.*

Dimostrazione: consideriamo il caso di problemi di minimizzazione (per problemi di massimizzazione la dimostrazione e analoga). L'esistenza di una soluzione ottima deriva dall'escludere la possibilità di problema inammissibile (P è non vuoto) e la possibilità di problema illimitato (P è limitato). Sia $V = \{v^1, v^2 \dots v^k\}$ l'insieme dei vertici di

P. Consideriamo il minimo valore assunto dalla funzione obiettivo sui vertici e sia v^* il vertice (o uno dei vertici) in cui la funzione obiettivo assume questo valore minimo: $v^* = \arg\min c^T v : v \in V$. Per un generico punto del poliedro $x \in P$, possiamo scrivere:

$$c^T x \;=\; \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v^i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c^T v^i \geq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c^T v^* \;=\; c^T v^* \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \;=\; c^T v^*$$

In sintesi, $\forall x \in P, c^T v^* \leq c^T x$, cioè v^* è una soluzione ottima corrispondente ad un vertice del poliedro. ■

Il risultato appena dimostrato è molto importante perché permette di restringere la ricerca dell'ottimo di un problema di PL ai soli vertici di un poliedro (che, come vedremo, sono in numero limitato), potendo trascurare i restanti (infiniti) punti della regione ammissibile.

Consideriamo il seguente esempio.

Esempio 1 *Una piccola ditta di profumi realizza due nuove fragranze a partire da 3 essenze:* rosa, mughetto *e* viola. *Per realizzare un litro di fragranza 1 sono richiesti 3 centilitri di rosa, 1 centilitro di mughetto e 3 centilitri di viola. Per realizzare un litro di fragranza 2 sono richiesti 4 centilitri di rosa, 4 centilitri di mughetto e 2 centilitri di viola. La disponibilità in magazzino per le tre essenze è di 24, 20 e 18 centilitri per rosa, mughetto e viola rispettivamente. Sapendo che l'azienda realizza un profitto di 13 e 10 euro per ogni litro venduto di fragranza 1 e 2 rispettivamente, determinare le quantità ottimali delle due fragranze da produrre.*

Introducendo le variabili:
- x_1: quantità in litri di fragranza 1 e
- x_2: quantità in litri di fragranza 2,

un modello di programmazione lineare in grado di risolvere il problema è il seguente:

$$\begin{array}{rrcrcrl}
\max & 13x_1 & + & 10x_2 & & & \\
s.t. & 3x_1 & + & 4x_2 & \leq & 24 & \text{(e1)} \\
 & x_1 & + & 4x_2 & \leq & 20 & \text{(e2)} \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 & \text{(e3)} \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}$$

In figura 4 è rappresentata la regione ammissibile.

La ricerca dell'ottimo può avvenire sui soli vertici e ciascun vertice è ottenibile dall'intersezione di due delle rette che definiscono i semipiani corrispondenti ai vincoli (sulle disponibilità di essenze o di non negatività delle variabili). Ad esempio, il vertice $B = (2, 9/2)$ è ottenuto dall'intersezione della retta $x_1 + 4x_2 = 20$ con la retta $3x_1 + 4x_2 = 24$; il vertice $E = (6, 0)$ è ottenuto dall'intersezione delle rette $x_2 = 0$ e $3x_1 + 2x_2 = 18$ etc. Calcolando il valore della funzione obiettivo in ciascun vertice e scegliendo il valore minimo, si ottiene l'ottimo in corrispondenza del vertice C: $x_1 = 4$, $x_2 = 3$ con valore della funzione obiettivo pari a -82 (profitto massimo pari a 82).

Ovviamente, la rappresentazione grafica dei vertici non è sempre possibile e, per poter procedere alla ricerca dell'ottimo sui vertici, è necessario poterli determinare per via algebrica.

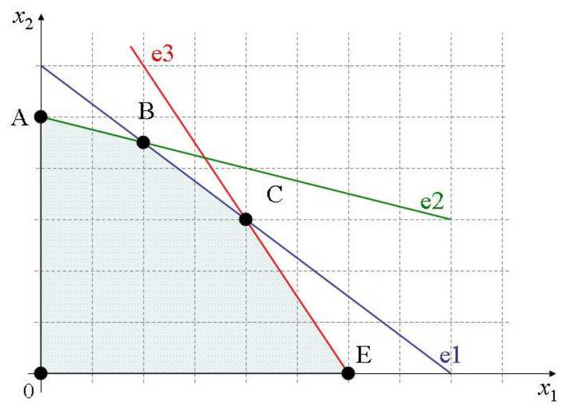

Figure 4: Regione ammissibile del problema dei profumi

3 Caratterizzazione algebrica dei vertici

3.1 Motivazioni

Tralasciando per il momento i vincoli di non negatività delle variabili, i restanti vincoli del problema, possono essere scritti sotto forma di equazioni come segue:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 3x_1 & + & 4x_2 & + & s_1 & & & & & = & 24 \\ x_1 & + & 4x_2 & & & + & s_2 & & & = & 20 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & & & & & + & s_3 & = & 18 \end{array}$$

dove s_1, s_2 e s_3 sono variabili ausiliarie che indicano la possibilità di soddisfare i rispettivi vincoli originari all'uguaglianza (se assumono valore 0) o in modo stretto (se assumono valori > 0).

Si tratta di un sistema di 3 equazioni (non ridondanti né contraddittorie) in 5 incognite che, come noto, può essere risolto sfruttando 2 gradi di libertà per fissare a piacere il valore di 2 incognite e ricavare il valore delle altre 3. Decidiamo allora di fissare al valore 0 le incognite s_1 e s_2. Si ottiene il sistema

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 4x_2 & & & = & 27 \\ x_1 & + & 4x_2 & & & = & 20 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & s_3 & = & 18 \end{array}$$

che porta alla soluzione $x_1 = 2$, $x_2 = 9/2$, $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 3$. Si noti come tale soluzione corrisponda al vertice B. In effetti, porre $s_1 = s_2 = 0$ significa, da un punto di vista geometrico, saturare i vincoli (e1) ed (e2): la soluzione si troverà quindi all'intersezione delle corrispondenti rette. Un'altra soluzione particolare può essere ottenuta fissando a 0 le variabili x_1 e s_2, che porta alla soluzione $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $s_1 = 4$, $s_2 = 0$, $s_3 = 8$, corrispondente al vertice A.

Intuiamo quindi che, tra le infinite (∞^{5-3}) soluzioni del sistema di equazioni equivalente ai vincoli del problema, ne esistono alcune particolari: queste soluzioni sono ottenute fissando a 0 un numero opportuno di variabili e corrispondono a vertici della regione ammissibile.

Si noti che le le variabili da porre a 0 devono essere opportunamente scelte. Ad esempio, ponendo $x_1 = s_1 = 0$, si ottiene la soluzione $x_1 = 0$, $x_2 = 6$, $s_1 = 0$, $s_2 = -4$, $s_3 = 6$ che non corrisponde ad un vertice del poliedro: la soluzione ottenuta non è infatti ammissibile, dato che $s_2 < 0$ indica che il vincolo (e2) è violato.

Cerchiamo di generalizzare queste osservazioni. Il primo passo è scrivere i vincoli di un problema PL in modo conveniente sotto forma di sistema di equazioni lineari. Il secondo passo è la manipolazione del sistema di equazioni per derivare delle soluzioni che corrispondano a vertici del poliedro ammissibile. Introduciamo quindi la *forma standard* per un problema di PL e richiamiamo alcune notazioni e proprietà dell'algebra lineare.

3.2 Forma standard di problemi di programmazione lineare

Un qualsiasi problema di PL può essere messo nella seguente forma, detta *forma standard*:

$$\begin{array}{lll} \min & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & \\ \text{s.t.} & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \ = b_i & (i = 1 \ldots m) \\ & x_i \in \mathbb{R}_+ & (i = 1 \ldots n) \end{array}$$

dove

- la funzione obiettivo è di minimo e senza costanti additive o moltiplicative (si moltiplicano per -1 le funzioni di massimizzazione; le costanti additive e moltiplicative possono essere trascurate);
- tutte le variabili sono positive o nulle (si effettuano sostituzioni di variabili per le variabili libere o negative);
- tutti i vincoli sono delle equazioni (si aggiunge una variabile positiva di slack per i vincoli di $\leq$ e si sottrae una variabile positiva di surplus per i vincoli di $\geq$);
- i termini noti b_i sono tutti positivi o nulli (si moltiplicano per -1 i vincoli con termine noto negativo).

Ciò permette, senza perdere in generalità, di risolvere un qualsiasi problema di PL tramite sistemi di equazioni lineari.

Esercizio 1 *Mettere in forma standard il seguente problema di PL:*

$$\begin{array}{ll} \max & 5(-3x_1 + 5x_2 - 7x_3) + 34 \\ s.t. & -2x_1 + 7x_2 + 6x_3 - x_1 \leq 5 \\ & -3x_1 + x_3 + 12 \geq 13 \\ & x_1 \leq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{array}$$

3.3 Richiami di algebra lineare

3.3.1 Vettori e matrici

- Un vettore $v \in \mathbb{R}^n$ è una n-upla di numeri reali $(v_1, v_2 \dots v_n)$.
- Una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ è una tabella $m \times n$ di numeri reali ordinati secondo righe e colonne: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$
- Un vettore $v \in \mathbb{R}^n$ può essere visto come una matrice particolare con una sola colonna o riga:

  - vettore colonna $v \in \mathbb{R}^{n \times 1}$: $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$
  - vettore riga $v^T \in \mathbb{R}^{1 \times n}$: $v^T = [v_1, v_2, ..., v_n]$

- Dati due vettori $v, w \in \mathbb{R}^n$, il prodotto scalare $v \cdot w$ può essere scritto come caso particolare del prodotto tra matrici righe $\times$ colonne:
  $v \cdot w = v^T w = v w^T = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$
- Una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ può essere scritta come giustapposizione delle sue righe o colonne: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^T \\ \hline a_2^T \\ \hline \vdots \\ \hline a_m^T \end{bmatrix} = \left[\; A_1 \mid A_2 \mid \dots \mid A_n \;\right]$
- Il *Rango di una matrice* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ è indicato con $\rho(A)$ ed è il massimo numero di righe linearmente indipendenti (coincide con il massimo numero di colonne linearmente indipendenti).
- *Matrici quadrate* $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$:

  - *matrice inversa*: $B^{-1} \in \mathbb{R}^{m \times m} : B^{-1}B = BB^{-1} = I$ (matrice identità $m \times m$);
  - B è *invertibile* $\iff det(B) \neq 0$ (matrice non singolare);
  - $det(B) \neq 0 \iff \rho(B) = m$.

3.3.2 Sistemi di equazioni lineari

- *Sistemi di equazioni in forma matriciale*: un sistema di m equazioni in n incognite può essere messo in forma matriciale:
  $Ax = b$, con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

- *Teorema di Rouché-Capelli*:
  $Ax = b$ ammette soluzioni $\iff \rho(A) = \rho(A|b) = r$ (∞^{n-r} soluzioni).

- *Operazioni elementari su matrici*:

  – scambiare la riga i con la riga j;

  – moltiplicare la riga i per uno scalare non nullo;

  – sostituire alla riga i, la riga i più α volte la riga j ($\alpha \in \mathbb{R}$).

  Le operazioni elementari sulla matrice aumentata $[A|b]$ non alterano l'insieme delle soluzioni ammissibili del sistema $Ax = b$.

- *Metodo di Gauss-Jordan* per la soluzione di sistemi $Ax = b$: eseguire delle operazioni elementari sulla matrice aumentata in modo da ottenere in A una sottomatrice identità di dimensioni pari a $\rho(A) = \rho(A|b)$.

3.4 Soluzioni di base

Un metodo per risolvere un sistema di equazioni lineari si ottiene ricorrendo al concetto di *base di una matrice*. Sia data una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

> D'ora in poi assumeremo che $n > m$ (in modo da avere infinite soluzioni ammissibili tra le quali scegliere la soluzione ottima) e che la matrice abbia rango massimo ($\rho(A) = m$).

Definizione 6 (Base) *Una* base *di A è una sottomatrice quadrata di A di rango massimo o, in altri termimi, una matrice $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ottenuta scegliendo m colonne linearmente indipendenti della matrice A.*

Dato un sistema $Ax = b$ si scelga una base B della matrice A. Le colonne della matrice A e le variabili del vettore x possono essere riordinati opportunamente in modo da poter scrivere:

$$A = [B|F] \quad B \in \mathbb{R}^{m \times m}, det(B) \neq 0 \qquad x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_F \end{bmatrix}, x_B \in \mathbb{R}^m, x_F \in \mathbb{R}^{n-m}$$

dove

- B è l'insieme delle colonne di A che formano la base;
- F l'insieme delle restanti colonne;
- x_B il vettore delle variabili corrispondenti alle colonne in base (*variabili di base*);

- x_F il vettore delle variabili corrispondenti alle colonne fuori base (*variabili non di base* o *fuori base*).

Di conseguenza, il sistema $Ax = b$ si può scrivere in forma a blocchi:
$Ax = b \Longrightarrow [B|F] \begin{bmatrix} x_B \\ x_F \end{bmatrix} = Bx_B + Fx_F = b$

Osservando che la matrice di base B è invertibile (ha rango massimo), una soluzione al sistema $Ax = b$ si può ottenere ponendo a 0 tutte le variabili fuori base ($x_F = 0$) e scrivendo
$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$

Esercizio 2 *Con riferimento all'esempio precedente, si consideri la base formata dalle colonne di x_1, x_2 e s_3 e si determinino B, F, x_B e x_F.*

Scegliendo una matrice di base B' diversa da B, cioè scegliendo un diverso insieme di m colonne di A linearmente indipendenti, si ottiene una nuova soluzione del sistema
$x = \begin{bmatrix} x_{B'} \\ x_{F'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B'^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$.

Definizione 7 Soluzioni di base *Dato un sistema di equazioni $Ax = b$, le soluzioni ottenute scegliendo una base B della matrice e ponendo $x_B = B^{-1}b$ e $x_F = 0$ si dicono* soluzioni di base.

Caratteristica delle soluzioni di base è di avere (al più) m variabili diverse da 0 (le variabili di base) e (almeno) $m - n$ variabili pari a 0 (variabili non di base). Infatti, potrebbe verificarsi il caso corrispondente alla seguente definizione:

Definizione 8 Soluzioni di base degeneri *Dato un sistema di equazioni $Ax = b$ e una base B di A, la soluzione di base corrispondente (e, per estensione, la stessa base) si dice degenere se il vettore $x_B = B^{-1}b$ ha almeno una componente nulla.*

Qualora il sistema di equazioni $Ax = b$ sia riferito ad un problema di PL in forma standard, si introducono le seguenti definizioni:

Definizione 9 Soluzioni di base ammissibili *Dato un sistema di equazioni $Ax = b$ e una base B di A, la soluzione di base corrispondente (e, per estensione, la stessa base) si dice ammissibile (resp. non ammissibile) se viene soddisfatta (resp. non soddisfatta) la condizione di non negatività $x_B = B^{-1}b \geq 0$.*

3.5 Vertici e soluzioni di base

Consideriamo un problema di PL in forma standard

$$\begin{array}{lllll} \min & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & & \\ \text{s.t.} & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n & = b_i & (i = 1 \ldots m) \\ & x_i \in \mathbb{R}_+ & & (i = 1 \ldots n) \end{array}$$

o, equivalentemente, in forme più compatte:

$$\begin{array}{rrl} \min & c^T x & \\ \text{s.t.} & Ax & = b \\ & x & \geq 0 \end{array}$$

oppure

$$\min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$$

Le soluzioni ammissibili di base associate al problema di PL si ottengono risolvendo un sistema di equazioni univocamente determinato e che corrisponde, secondo l'interpretazione geometrica sopra riportata, all'intersezione di un numero opportuno di iperpiani in $\mathbb{R}$. Si ha infatti la seguente importante proprietà, nota come *caratterizzazione algebrica dei vertici di un politopo*:

Teorema 3 (Corrispondenza tra vertici e soluzioni di base). *Dato un problema di PL* $\min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$ *e il corrispondente poliedro della regione ammissibile* $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$, *$x$ è soluzione ammissibile di base del sistema $Ax = b \iff x$ è vertice di P.*

Dimostrazione: Vedi libro di testo. ■

Immediata e importante conseguenza è il seguente risultato

Teorema 4 Soluzione ammissibile di base ottima. *Dato un problema di PL* $\min\{c^T x : x \in P\}$, *dove $P = \{x \geq 0 : Ax = b\}$ è un poliedro limitato e non vuoto,* ***esiste almeno una soluzione ottima coincidente con una soluzione ammissibile di base.***

Dimostrazione: Per il teorema 2 esiste un vertice ottimo che corrisponde, per il teorema 3, a una soluzione ammissibile di base.■

3.6 Verso un metodo per la soluzione di problemi di PL

I risultati teorici sopra riportati possono essere immediatamente sfruttati per derivare un metodo generale per la soluzione di un problema di PL $\min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$.

Per il teorema 4, la soluzione ottima, se esiste, può essere ricercata tra tutte le soluzioni di base del sistema di equazioni $Ax = b$. In particolare, siamo interessati alle *soluzioni*

ammissibili *di base*, cioè le soluzioni di base in cui le variabili di base assumano valori positivi o nulli: $B^{-1}b \geq 0$.

Mentre il numero di soluzioni ammissibili è, almeno per i casi di interesse, illimitato ($\infty^{(n-m)}$ secondo il teorema di Rouché-Capelli), il numero di soluzioni ammissibili di base (e, per il teorema 3, il numero di vertici del poliedro ammissibile) è limitato superiormente dal numero delle possibili combinazioni di m colonne scelte tra le n colonne di A:

$$\left(\begin{array}{c} n \\ m \end{array} \right) = \frac{n!}{m!(n-m)!} \qquad \begin{array}{c} \text{(numero massimo di soluzioni ammissibili di base} \\ \text{e di vertici del poliedro ammissibile)} \end{array}$$

Pertanto, si potrebbe derivare un algoritmo che ricerca esaustivamente tutte le possibili basi di A. Ovviamente, anche se non tutte le combinazioni di m colonne tra le n della matrice A corrispondono a soluzioni di base (le colonne potrebbero non essere linearmente indipendenti o la corrispondente soluzione di base potrebbe non essere ammissibile), il numero di soluzioni ammissibili di base è comunque molto elevato e la ricerca esaustiva non è un metodo efficiente.

Il **metodo del simplesso** è un metodo iterativo che permette di esplorare in modo efficiente l'insieme delle soluzioni ammissibili di base, a partire da una soluzione ammissibile di base data. L'efficienza consiste nel garantire di generare, ad ogni iterazione:

- soluzioni ammissibili
- soluzioni che migliorino (o comunque non peggiorino) la soluzione all'iterazione precedente, in termini di valore della funzione obiettivo.