Ricerca Operativa

Note su Programmazione Lineare e Metodo del Simplesso (parte III)

L. De Giovanni

AVVERTENZA: le note presentate di seguito non hanno alcuna pretesa di completezza, né hanno lo scopo di sostituirsi alle spiegazioni del docente. Il loro scopo è quello di fissare alcuni concetti presentati in classe. Le note contengono un numero limitato di esempi ed esercizi svolti. Questi rappresentano una parte fondamentale nella comprensione della materia e sono presentati in classe.

Contents

1 Esempi notevoli del metodo del simplesso

Oltre ai casi di esistenza di una soluzione ottima e di problemi illimitati, visti nei precedenti esercizi, consideriamo degli esempi relativi a casi particolari del metodo del simplesso.

Il primo esempio si riferisce al passaggio da soluzioni degeneri. Si ricorda che una soluzione di base degenere è una soluzione di base in cui non solo le variabili fuori base valgono 0, ma anche una (o più) variabili in base.

Esempio 1 (*Passaggio da soluzione di base degenere) Risolvere con il metodo del simplesso il seguente problema PL:*

$$\begin{array}{rrcrcr}
\max & 2x_1 & + & x_2 & & \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 4 \\
 & 3x_1 & - & x_2 & \leq & 12 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 12 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Passando alla forma standard si ottiene:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcr}
\min & -2x_1 & - & x_2 & & & & & & & & \\
 & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & & & \leq & 4 \\
 & 3x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & & & \leq & 12 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & \leq & 12 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

e, il tableau

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
$-z$	-2	-1	0	0	0	0
x_3	1	-1	1	0	0	4
x_4	3	-1	0	1	0	12
x_5	1	1	0	0	1	12

Al momento, la situazione è quindi la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} A_3 & A_4 & A_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione (le variabili in base sono riquadrate):

$$x = \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & \boxed{x_3} & \boxed{x_4} & \boxed{x_5} \end{array} = \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & \boxed{4} & \boxed{12} & \boxed{12} \end{array}$$

Se facciamo entrare in base x_2, la regola de quoziente minimo individua due righe in corrispondenza del minimo rapporto pari a 4: la riga 1 e la riga 2. Ricordiamo che questo significa che, se x_2 passa dal valore 0 (attualmente x_2 è fuori base) al valore limite 4, sia x_3 che x_4 assumeranno valore 0 (mentre x_5 rimarrà strettamente positiva). Tra queste due variabili, quindi, possiamo decidere arbitrariamente quale esce dalla base (ne esce sempre e solo una ad ogni iterazione, per ottenere la nuova matrice di base scambiano UNA colonna in base con UNA colonna fuori base). L'altra variabile resta in base, anche se assumerà il valore 0 (avremo una soluzione di base ammissibile degenere). Decidiamo di far uscire x_3. Con le operazioni di pivot sull'elemento in riga 1, colonna 1, otteniamo:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
$-z$	0	-3	2	0	0	8
x_1	1	-1	1	0	0	4
x_4	0	2	-3	1	0	0
x_5	0	2	-1	0	1	8

La situazione è quindi la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \qquad x_F = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} A_1 & A_4 & A_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione (le variabili in base sono riquadrate):

$$x = \begin{array}{ccccc} \boxed{x_1} & x_2 & x_3 & \boxed{x_4} & \boxed{x_5} \end{array} = \begin{array}{ccccc} \boxed{4} & 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{8} \end{array}$$

Si noti come esista una valore 0 non riquadrato, in corrispondenza della variabile x_3 che è uscita dalla base, e un valore 0 riquadrato, in corrispondenza della variabile x_4 che, pur corrispondendo al minimo rapporto (e quindi assumendo il valore 0 con il cambio base), è rimasta in base.

A questo punto scegliamo x_2 come variabile entrante e, di conseguenza, la riga 2 (variabile x_4) come variabile uscente: corrisponde al minimo rapporto che è 0 (si ricorda che non si devono considerare i rapporti con denominatore minore o uguale a 0). Ciò vuol dire che x_2 entrerà in base al valore 0. Infatti:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
$-z$	0	0	$-5/2$	$3/2$	0	8
x_1	1	0	$-1/2$	$1/2$	0	4
x_2	0	1	$-3/2$	$1/2$	0	0
x_5	0	0	2	-1	1	8

La situazione è quindi la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione (le variabili in base sono riquadrate):

$$x = \boxed{x_1}\boxed{x_2}\; x_3 \quad x_4 \; \boxed{x_5} = \boxed{4}\boxed{0}\; 0 \quad 0 \; \boxed{8}$$

Come si vede, la soluzione x è rimasta invariata. È cambiata però la base ammissibile corrente. Tale cambio ci permette di poter passare ad una nuova soluzione di base non degenere. Infatti, facendo entrare x_3 in base, la variabile uscente è x_5: il rapporto relativo alla variabile di base $x_2 = 0$ ha denominatore $-3/4 \leq 0$ e quindi non viene considerato nella scelta del quoziente minimo. Otteniamo:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
$-z$	0	0	0	$1/4$	$5/4$	18
x_1	1	0	0	$1/4$	$1/4$	6
x_2	0	1	0	$-1/4$	$3/4$	6
x_3	0	0	1	$-1/2$	$1/2$	4

che corrisponde alla soluzione ottima:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad x_F = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

con soluzione (le variabili in base sono riquadrate):

$$x = \boxed{x_1}\boxed{x_2}\boxed{x_3}\; x_4 \quad x_5 \;=\boxed{6}\boxed{6}\boxed{4}\; 0 \quad 0$$

Il passaggio per soluzioni di base degeneri ha un'interessante interpretazione grafica. Si consideri la figura 1. La prima base corrisponde al vertice $(x_1, x_2) = (0, 0)$.

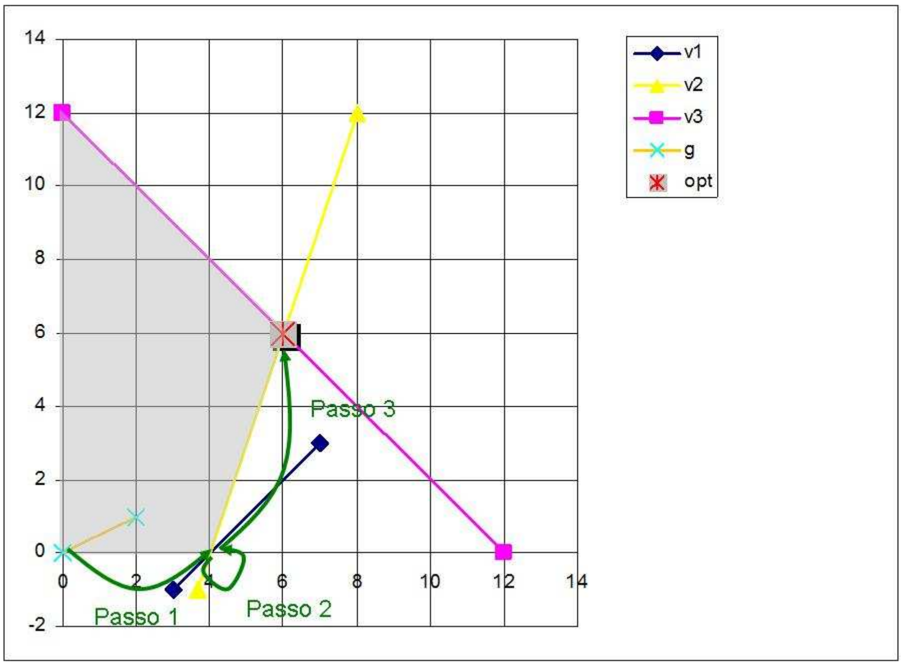

Figure 1: Esempio di passaggio per soluzioni di base degeneri.

Il primo passo del simplesso passa ad una base adiacente (e quindi a un vertice adiacente) che rappresenta il vertice $(4, 0)$. Il secondo passo cambia base, ma il vertice corrispondente alla nuova base è sempre $(4, 0)$. In effetti il vertice $(4, 0)$, in questo problema, è ottenibile sia come intersezione della retta relativa al vincolo $x_2 \geq 0$ con la retta del primo vincolo (il passo 1 porta $x_2 = x_3 = 0$ fuori base e ottiene $x_4 = 0$ in base), sia come intersezione della retta $x_2 \geq 0$ con la retta del secondo vincolo (il passo 2 porta $x_2 = x_4 = 0$ fuori base e ottiene $x_3 = 0$ in base). Quindi, al passo 2, cambia la base ma non il vertice corrispondente. Si noti anche che non cambia il valore della funzione obiettivo.

Il secondo esempio di riferisce alla possibilità di avere più soluzioni ottime.

Esempio 2 (*Infinite soluzioni ottime) Risolvere con il metodo del simplesso il seguente problema PL:*

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & 3x_1 & + & 2x_2 & & \\ & & & x_2 & \leq & 7 \\ & 2x_1 & + & 1/2x_2 & \leq & 10 \\ & 3/2x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Passando alla forma standard (funzione obiettivo di minimo e introduzione delle variabili di slack x_4, x_5 ex_6 per il primo, il secondo e il terzo vincolo rispettivamente) e facendo entrare in base prima x_1 (esce x_4) e poi x_2 (esce x_5) si ottiene il seguente tableau

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
$-z$	0	0	0	0	2	20
x_3	0	0	1	6/5	$-8/5$	3
x_1	1	0	0	4/5	$-2/5$	4
x_2	0	1	0	$-6/5$	8/5	4

che corrisponde alla soluzione ottima (costi ridotti ≤ 0)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad z_{MIN} = -20 \quad (z_{MAX} = 20)$$

La particolarità della soluzione deriva dall'avere il costo ridotto di una variabile in base pari a $\bar{c}_{x_4} = 0$. Ciò vuol dire che se facessi entrare in base la variabile x_4 la funzione obiettivo rimarrebbe invariata. Anche se l'algoritmo del simplesso avrebbe terminato l'esecuzione (è raggiunta una condizione di terminazione) proviamo a effettuare un'operazione di pivot per far entrare in base x_4. La regola del quoziente minimo indica come variabile uscente la variabile x_3 e le operazioni di pivot portano al tableau

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
$-z$	0	0	0	0	2	20
x_3	0	0	$5/6$	1	$-4/3$	$5/2$
x_1	1	0	$-2/3$	0	$-2/3$	2
x_2	0	1	0	0	0	7

che corrisponde alla soluzione ottima (costi ridotti ≤ 0).

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \\ 5/2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad z_{MIN} = -20 \quad (z_{MAX} = 20)$$

Abbiamo quindi una seconda soluzione ottima. Osserviamo il grafico della regione ammissibile del problema originario in figura 2

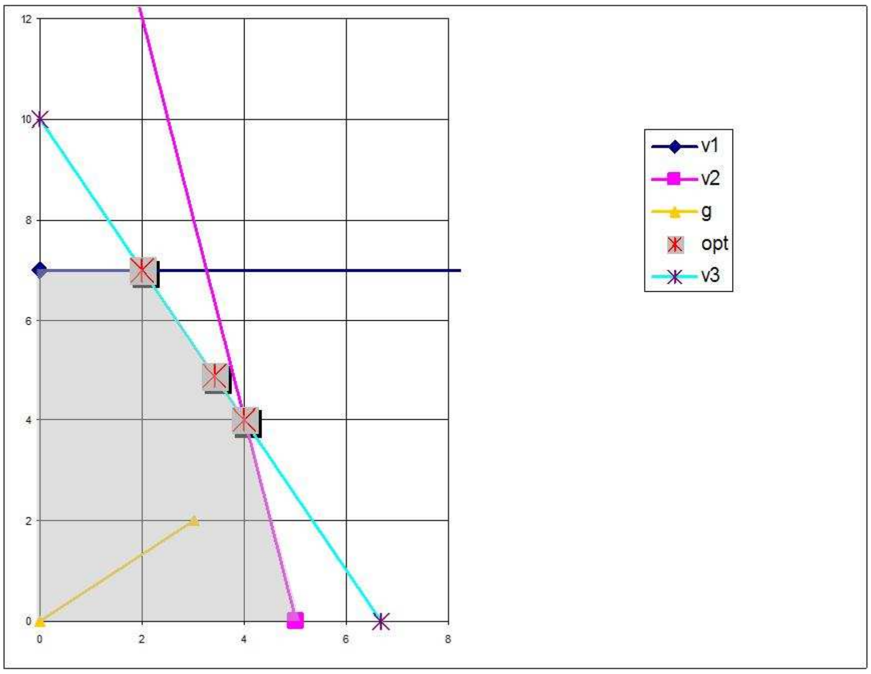

Figure 2: Esempio di soluzioni ottime multiple (infinite)

Si vede come esistano due vertici ottimi distinti, corrispondenti alle due soluzioni ottime DI

BASE trovate. Se consideriamo la direzione del gradiente, possiamo facilmente osservare che tutti i punti del segmento che congiunge i due vertici ottimi sono soluzioni ammissibili e ottime. Abbiamo quindi infinite soluzioni ottime, anche se NON DI BASE (perché non sono vertici).

Esercizio 1 *Dato un problema di programmazione lineare ammissibile e limitato, è possibile che esistano esattamente due soluzioni ottime? Giustificare la risposta.*

2 Ricerca di una soluzione di base ammissibile

L'applicazione del metodo del simplesso richiede la disponibilità (al passo 0) di una soluzione ammissibile di base. Se il problema è dato nella forma:

$$\begin{aligned} \min z = \ & c^T x & \\ \text{s.t.} \ & Ax & \leq b \\ & x & \geq 0 \end{aligned}$$

con $b \geq 0$, allora l'introduzione delle variabili di slack s rende subito evidente l'esistenza di una base ammissibile iniziale in corrispondenza delle variabili di slack stesse: il sistema, portato alla forma standard, è già in forma canonica rispetto alle variabili di slack (ciascuna compare in un solo vincolo) e la funzione obiettivo è espressa come funzione delle sole variabili x fuori base (in altri termini, il tableau è già in forma canonica rispetto alle variabili s).

In generale, consideriamo il problema in forma standard

$$\begin{aligned} \min z = \ & c^T x & \\ \text{s.t.} \ & Ax & = b \\ & x & \geq 0 \end{aligned}$$

Un possibile metodo per trovare una soluzione ammissibile iniziale potrebbe essere quello di costruire una base B scegliendo un insieme di m colonne linearmente indipendenti (esistono metodi efficienti per farlo) e calcolare

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$$

Avremmo una soluzione di base ma non è garantita l'ammissibilità: qualcuno degli elementi di $B^{-1}b$ potrebbe essere strettamente negativo. In altri termini, alcuni $\bar{b}_i$ della forma canonica rispetto a B potrebbero essere negativi. Intuiamo quindi che il problema di trovare una soluzione di base ammissibile di partenza per il metodo del simplesso non è banale. Tra i possibili metodi che permettono di ricavare una soluzione ammissibile di base o determinare che il problema è inammissibile presentiamo il **metodo delle due fasi**.

2.1 Fase I: soluzione del problema artificiale

Nella Fase I si introduce il *problema artificiale*

$$\begin{array}{lll} w^* = & \min w = & 1^T y = y_1 + y_2 + \cdots + y_m \\ & s.t. & Ax + Iy = b \\ & & x, y \geq 0 \end{array} \qquad y \in \mathbb{R}^m_+ \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

dove y è il vettore delle *variabili artificiali.*

È subito evidente una base del problema artificiale in corrispondenza della variabili artificiali. Se pensiamo al tableau, si ha:

$-w$	0^T	1^T	0
	A	I	b

Per passare alla forma canonica sono necessarie delle operazioni sulla prima riga, per trasformare gli 1 in 0 e ottenere, al posto degli 0, i costi ridotti delle variabili fuori base x rispetto alla base y (con il simplesso in forma matriciale, i costi ridotti sarebbero semplicemente calcolati). Sottolineiamo che si tratta dei costi ridotti $\bar{\gamma}$ riferiti alla nuova funzione obiettivo del problema artificiale.

$-w$	$\bar{\gamma}_A^T$	0^T	$-w_I$
	A	I	b

Si può quindi partire con i passi del simplesso sopra descritti per risolvere il problema artificiale, fino al raggiungimento di una soluzione ottima del problema artificiale. Si fa notare che il problema artificiale è sempre ammissibile (abbiamo almeno una soluzione ammissibile $x = 0, y = b \geq 0$) e non può essere illimitato ($w \geq 0, \forall y \geq 0$).

Al termine, il valore ottimo della funzione obiettivo del problema artificiale può essere (dovendosi escludere il caso $w^* < 0$):

- $w^* = 0$: in questo caso, tutte le variabili artificiali sono necessariamente nulle. Possono essere quindi eliminate dal sistema dei vincoli e lo stesso sistema sarà soddisfatto con le sole variabili x. In altri termini, il problema è ammissibile.

- $w^* > 0$: si conclude che il problema originario non è ammissibile.

Nel caso $w^* = 0$, si procede per individuare la base iniziale. Si distinguono due sottocasi (ricordiamo che tutte la variabili artificiali y sono a 0):

- se le variabili y sono tutte fuori base al termine del simplesso per la soluzione del problema artificiale, allora la base ottima finale della fase I corrisponde direttamente le variabili x in una base ammissibile;

- se qualche variabile y è in base, allora lo sarà al valore 0. Siamo pertanto in presenza di una soluzione di base degenere. Effettuiamo quindi delle operazioni di cambio base per passare da una soluzione degenere ad un'altra, sostituendo una y in base (al valore 0) con una x fuori base. Si noti che, essendo la y che lascia la base pari a 0, la variabile x entrerà in base assumendo il valore 0 (di fatto la soluzione non cambia, ma cambia la base che la rappresenta). Scegliendo opportunamente le variabili x fuori base da sostituire alle variabili y in base (in modo da avere colonne corrispondenti linearmente indipendenti), si ottiene una soluzione ottima (di base degenere) alternativa, con sole variabili x in base, riconducendosi al primo sotto-caso.

Analizziamo il secondo sotto-caso per mostrare come sia sempre possibile effettuare delle operazioni di cambio base per eliminare tutte le $y = 0$ dalla base finale per arrivare ad una base ottima con sole x. Ci aiutiamo con il tableau del simplesso: consideriamo il tableau finale el problema artificiale. L'esistenza di (almeno) una variabile $y_h = 0$ corrisponde al tableau:

	x_1	...	x_j	...	x_n	y_1	...	y_h	...	y_m	
$-w$			≥ 0					0			$-w^* = 0$
								0			
								0			
y_h	$\bar{a}_{i1}$	...	$\boxed{\bar{a}_{ij}}$	...	$\bar{a}_{in}$			1			0
								0			
								0			

Quindi, la riga i del tableau è relativa ad una variabile artificiale in base (al valore 0). A questo punto, basta effettuare un'operazione di pivot sulla riga i in corrispondenza di una qualsiasi colonna j tale che $\bar{a}_{ij} \neq 0$: y_h lascia la base e il suo posto è preso da x_j. Si noti che:

- si può effettuare l'operazione di pivot anche su un elemento $\bar{a}_{ij} < 0$: comunque i valori delle variabili non cambiano visto che x_j entra al valore 0 e pertanto la soluzione rimane ammissibile (abbiamo visto che passiamo da una soluzione degenere ad un'altra che rappresenta lo stesso punto nello spazio, la stessa soluzione);

- se non dovesse esistere nessun $\bar{a}_{ij} \neq 0$ in corrispondenza della riga i e delle colonne delle variabili x allora questo vuol dire che la riga i della matrice A e il relativo termine noto sono stati trasformati, con operazioni elementari tra righe, in una riga di 0. Ciò equivale a dire che il vincolo i-esimo del sistema $Ax = b$ è ridondante e può pertanto essere eliminato. Quindi, nel caso $\bar{a}_{ij} = 0 \ \forall \ j = 1 \dots n$, possiamo eliminare la riga i (avremo una variabile di base in meno e quindi togliamo y_h dalla base senza sostituirla con una x).

Effettuando un'operazione di pivot come quella descritta sopra per ogni riga relativa ad una variabile y in base, è possibile sempre passare ad una soluzione ammissibile di base per il sistema $Ax = b$ (in termini di sole x). Pertanto, se $w^* = 0$, è sempre possibile ricavare una base ammissibile di partenza per il problema originario.

2.2 Fase II: soluzione del problema di partenza

Se la Fase I termina con $w^* > 0$, la fase II non ha ovviamente luogo, visto che abbiamo già stabilito che il problema non è ammissibile. Se invece $w^* = 0$, la base ottenuta al termine della Fase I può essere utilizzata per inizializzare il metodo del simplesso. Basterà portare alla forma canonica rispetto alla base ottenuta (passo 1) e continuare. In termini di tableau del simplesso, al termine della Fase I si avrà:

	x_{B_1} ... x_{B_m}	x_F	y^T	
$-w$	0^T	$\bar{\gamma}_F^T \geq 0$	$\bar{\gamma}_y \geq 0$	$-w^* = 0$
x_{B_1} $\vdots$ x_{B_m}	I	$\bar{F}$	B^{-1}	$\bar{b}$

Per riportare il tableau finale della fase I in termini di tableau iniziale del problema originario si procede come segue. Si eliminano le colonne delle variabili artificiali e si riportano nella prima riga i costi della funzione obiettivo originaria e il valore 0 per la funzione obiettivo (semplicemente si rimette il vincolo relativo alla funzione obiettivo originaria $c_B^T x_B + c_F^T x_F - z = 0$):

	x_{B_1} ... x_{B_m}	x_F	y^T	
$-z$	c_B^T	c_F^T	//	0
x_{B_1} $\vdots$ x_{B_m}	I	$\bar{F}$	//	$\bar{b}$

Si passa quindi alla forma tableau canonica con operazioni sulla prima riga per riportare a 0 i costi ridotti delle variabili in base (con il simplesso in forma matriciale basterebbe calcolare i costi ridotti rispetto ai costi della funzione obiettivo originaria e alla base di partenza ottenuta dalla fase I).

	x_{B_1} ... x_{B_m}	x_F	
$-z$	0^T	$\bar{c}_F^T$	$-\bar{z}_B$
x_{B_1} $\vdots$ x_{B_m}	I	$\bar{F}$	$\bar{b}$

A questo punto il tableau (e il sistema di equazioni che esso sottintende) è riportato alla forma usuale per l'applicazione del passo 1 del simplesso.

3 Convergenza del metodo del simplesso

Il metodo del simplesso è un metodo che consente di risolvere un problema di programmazione lineare attraverso un'esplorazione (efficiente) dello spazio delle soluzioni di base ammissibili. Per valutare la convergenza e la complessità del metodo del simplesso, consideriamo il valore di θ ottenuto dalla regola del quoziente minimo ad ogni iterazione e distinguiamo due casi:

1. il valore θ è *sempre* strettamente positivo, ad ogni iterazione del simplesso;
2. il valore θ assume il valore 0 ad una certa iterazione.

Si fa osservare che il caso $\theta < 0$ è escluso dal metodo del simplesso. Ricordiamo che, ad ogni iterazione, il valore della funzione obiettivo migliora di $\bar{c}_h\theta$, dove $\bar{c}_h < 0$ è il costo ridotto della variabile che entra in base rispetto alla base corrente. Il primo caso corrisponde quindi alla possibilità di migliorare sempre, ad ogni iterazione il valore della funzione obiettivo. Il secondo caso, invece, ammette la possibilità di non migliorare il valore della funzione obiettivo in alcune iterazioni e, come abbiamo visto, corrisponde a casi di degenerazione della soluzione di base corrente.

Caso 1: miglioramento garantito della funzione obiettivo
Se $\theta > 0$ ad ogni iterazione, la funzione obiettivo migliora ad ogni iterazione. Di conseguenza, è esclusa la possibilità di tornare a considerare una soluzione di base già visitata. Il metodo del simplesso visiterà, nel caso peggiore, tutte le soluzioni di base ammissibili prima di trovare la base ottima. Se ne deduce che:

- il metodo del simplesso è sicuramente finito, visto che è finito il numero di possibili soluzioni di base;
- il numero massimo di iterazioni è pari al numero di soluzioni di base ammissibili.

Le basi ammissibili B si ottengono in corrispondenza di un qualsiasi insieme di m colonne linearmente indipendenti scelte tra le n colonne della matrice dei vincoli con la proprietà aggiuntiva $B^{-1}b \geq 0$. Per ottenere un limite superiore al numero di basi, bisogna quindi considerare il numero di combinazioni di m colonne scelte tra n: tale numero è pari a

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

In sintesi, se $\theta > 0$ ad ogni iterazione, il metodo del simplesso converge in *al più* $\binom{n}{m}$ iterazioni.

Al più perché non tutte le combinazioni di colonne sono linearmente indipendenti (cioè corrispondono ad una base) e perché non tutte le soluzioni di base sono ammissibili.

Caso 2: passaggio per soluzioni degeneri
Se invece ammettiamo che possano esserci iterazioni in cui $\theta = 0$, il simplesso, come presentato, non garantisce di non tornare a visitare una soluzione di base già considerata. Abbiamo visto come condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché $\theta = 0$ è che la soluzione di base corrente sia degenere. In questo caso il cambio base porterà ad una nuova base che però rappresenta lo stesso punto nello spazio (vertice), cioè la stessa soluzione. È possibile che, dopo alcune iterazioni "degeneri" si torni a rappresentare il vertice sul quale siamo bloccati con una delle basi già visitate e, quindi, si corre il rischio di ripetere ciclicamente, all'infinito, la stessa sequenza di basi degeneri legate allo stesso vertice.

> Pertanto, la finitezza del metodo del simplesso e la sua convergenza verso una soluzione ottima *non è garantita* in presenza di soluzioni di base degenere.

La questione qui sollevata non è meramente teorica: il rischio di ciclare è concreto ed è necessario accompagnare il metodo del simplesso con accorgimenti che permettano di evitare di ripetere la stessa sequenza di basi degeneri. Ad esempio, si potrebbe considerare una politica di *cycle detection*: qualora si incontrasse una base già visitata, si applicano delle regole alternative per la scelta delle variabili per il cambio base, *sperando* di non tornare sulle stesse basi. Una possibile regola anti-ciclo *sistematica*, che citiamo per la sua semplicità, è la seguente:

> **Regola anti-ciclo di Bland:** tra tutte le variabili candidate al cambio base, scegliere sempre quella con indice minimo.

Pertanto:

- in caso di più variabili attualmente fuori base con costo ridotto negativo, entra in base la variabile x_h con indice h minimo:

$$x_h : h = \min\{j : \bar{c}_j < 0\}$$

- in caso di più variabili attualmente in base che corrispondono al mimino quoziente θ, si sceglie la variabile x_t con indice minimo:

$$x_t : t = \min\{B_i : \bar{b}_i/\bar{a}_{ih} = \theta\}$$

È possibile dimostrare il seguente teorema:

Teorema 1 (Convergenza del simplesso con la regola anti-ciclo di Bland). *Utilizzando la regola di Bland per la scelta delle variabili per il cambio base, il metodo del simplesso converge* sempre *in* al più $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$ *iterazioni.*

Ad esempio, consideriamo il seguente tableau:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\bar{b}$
$-z$	5	-1	0	-10	0	0	0	0	-10
x_5	1	$\boxed{4}$	0	1	1	0	0	0	8
x_3	-1	$\boxed{\mathbf{3}}$	1	0	0	0	0	0	6
x_6	0	-2	0	$\boxed{3}$	0	1	0	0	1
x_8	3	2	0	4	0	0	0	1	5
x_7	3	$\boxed{1}$	0	-2	0	0	1	0	2

Gli elementi candidati per l'operazione di pivot sono quelli inquadrati (e non altri...). Applicando la regola di bland, si sceglie x_2 come variabile entrante ($2 < 4$) e quindi x_3 come variabile uscente ($3 < 5 < 7$).