RICERCA OPERATIVA

Tema d'esame del 04/12/2008 (Simulazione 1)

COGNOME:
NOME:

MATRICOLA:

1. Un'azienda meccanica deve pianificare il lavoro delle sue tre macchine per un dato giorno. I lotti che è possibile assegnare sono otto, e i requisiti sono descritti in tabella:

lotto	a	b	c	d	e	f	g	h
tempo (h)	5	3.5	1	6.5	2	4	3	2.5
profitto (keuro)	1	1.2	0.8	1.5	1.1	0.9	1.3	0.7

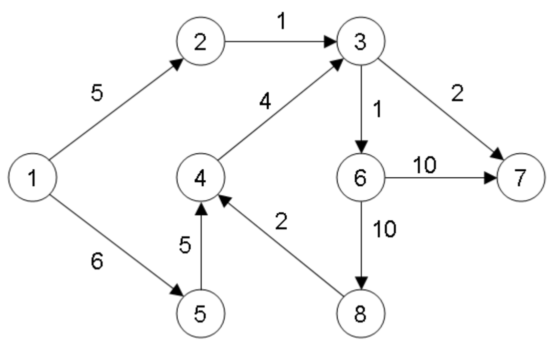
   Ogni macchina può lavorare 8 ore. I lotti c e d sono relativi alla stessa commessa: se si decide di assegnare uno deve essere assegnato anche l'altro. Inoltre è possibile aggiungere al massimo 3 ore per macchina al costo aggiuntivo di 300 euro/ora. Scrivere il modello di programmazione lineare per massimizzare il profitto netto.

2. Dato il seguente problema di P.L.

$$\begin{array}{rl} \max & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ s.t. & x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6 \\ & x_1 - x_2 - x_3 \leq 5 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

   trovare la soluzione ottima con il metodo del simplesso (si applichi la regola anti-ciclo di Bland).

3. Si calcolino i cammini minimi dal nodo 1 verso tutti gli altri nodi per il grafo seguente.



...ALTRE DOMANDE SUL RETRO...

4. Enunciare e dimostrare le condizioni di complementarietà primale-duale. Scrivere il problema duale e le corrispondenti condizioni di complementarietà primale-duale per il seguente problema di PL:

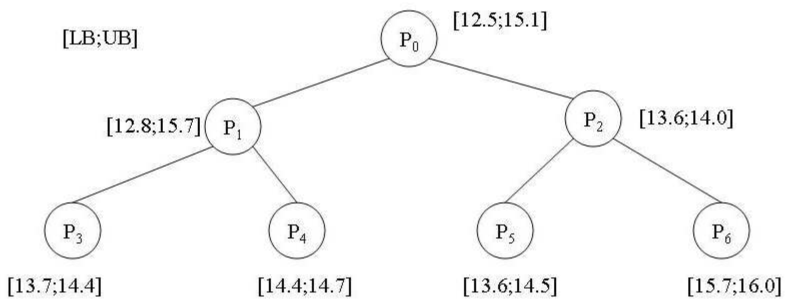
$$
\begin{array}{lcl}
\min & z = 4x_1 - 5x_2 + 3x_3 & \\
s.t. & 3x_1 + x_3 & \leq -6 \\
 & x_1 - 2x_2 & \geq 3 \\
 & x_1 + x_2 - 2x_3 & \geq 7 \\
 & x_1, x_2 & \geq 0 \\
 & x_3 & \leq 0
\end{array}
$$

5. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false, giustificando la risposta:

   (a) non è possible che un problema di programmazione lineare abbia esattamente due soluzioni ottime distinte;

   (b) tutte le soluzioni ottime di un problema di programmazione lineare sono soluzioni ammissibili di base.

6. Si consideri il seguente albero di sviluppo del Branch and Bound per un problema di ottimizzazione combinatoria con funzione obiettivo di minimo:



- Come si può capire che si tratta di un problema di minimo?
- È possibile chiudere dei nodi? Se sì, quali?
- In quale intervallo è sicuramente compreso il valore della funzione obiettivo?
- Quale nodo sarà sviluppato per primo da una strategia best first?
- Si supponga che lo sviluppo di cui al punto precedente porti a due nodi figli, di cui uno è relativo ad un insieme di soluzioni vuoto. Si dia un esempio di valori di lower e upper bound relativi al secondo nodo che consentano di riconoscere subito la soluzione ottima del problema.

SOLUZIONI

1.
- Definisco gli **insiemi**:
  - $I = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, insieme dei lotti;
  - $J = \{1, 2, 3\}$, insieme delle macchine.
- Introduco le **variabili**:
  - y_{ij}: variabile binaria che vale 1 se il lotto $i \in I$ è assegnato alla macchina $j \in J$, 0 altrimenti;
  - x_j: numero di ore aggiuntive sulla macchina $j \in J$.
- **Modello**:

$\max \quad z = 1(y_{a1} + y_{a2} + y_{a3}) + 1.2(y_{b1} + y_{b2} + y_{b3}) + 0.8(y_{c1} + y_{c2} + y_{c3}) + 1.5(y_{d1} + y_{d2} + y_{d3}) + 1.1(y_{e1} + y_{e2} + y_{e3}) + 0.9(y_{f1} + y_{f2} + y_{f3}) + 1.3(y_{g1} + y_{g2} + y_{g3}) + 0.7(y_{h1} + y_{h2} + y_{g3}) - 0.3(x_1 + x_2 + x_3)$

s.t.

$y_{a1} + y_{a2} + y_{a3} \leq 1$ #(assegno lotto a ad una macchina al massimo)
$y_{b1} + y_{b2} + y_{b3} \leq 1$ #(assegno lotto b ad una macchina al massimo)
$y_{c1} + y_{c2} + y_{c3} \leq 1$ #(assegno lotto c ad una macchina al massimo)
$y_{d1} + y_{d2} + y_{d3} \leq 1$ #(assegno lotto d ad una macchina al massimo)
$y_{e1} + y_{e2} + y_{e3} \leq 1$ #(assegno lotto e ad una macchina al massimo)
$y_{f1} + y_{f2} + y_{f3} \leq 1$ #(assegno lotto f ad una macchina al massimo)
$y_{g1} + y_{g2} + y_{g3} \leq 1$ #(assegno lotto g ad una macchina al massimo)
$y_{h1} + y_{h2} + y_{h3} \leq 1$ #(assegno lotto h ad una macchina al massimo)

$5y_{a1} + 3.5y_{b1} + 1y_{c1} + 6.5y_{d1} + 2y_{e1} + 4y_{f1} + 3y_{g1} + 2.5y_{h1} \leq 8 + x_1$ #(capacità macch. 1)
$5y_{a2} + 3.5y_{b2} + 1y_{c2} + 6.5y_{d2} + 2y_{e2} + 4y_{f2} + 3y_{g2} + 2.5y_{h2} \leq 8 + x_2$ #(capacità macch. 2)
$5y_{a3} + 3.5y_{b3} + 1y_{c3} + 6.5y_{d3} + 2y_{e3} + 4y_{f3} + 3y_{g3} + 2.5y_{h3} \leq 8 + x_3$ #(capacità macch. 3)

$x_1 \leq 3 \quad x_2 \leq 3 \quad x_3 \leq 3$ #(limite ore aggiuntive)

$(y_{c1} + y_{c2} + y_{c3}) = (y_{d1} + y_{d2} + y_{d3})$ #(se faccio c faccio d e viceversa)[1]

$y_{ij} \in \{0, 1\}, \ \forall\, i \in I, j \in J$
$x_j \in \mathbb{Z}_+, \ \forall\, j \in J$

[1] Il vincolo funziona perché abbiamo che $y_{c1} + y_{c2} + y_{c3} \leq 1$ e $y_{d1} + y_{d2} + y_{d3} \leq 1$, dai vincoli di assegnamento. La sommatoria può quindi essere considerata come una variabile logica che vale 0 o 1 a seconda che il lotto c (o d) sia assegnato ad una qualsiasi macchina o meno. Un modello corretto poteva anche essere ottenuto introducendo:

- z_i: variabile logica che vale 1 se il lotto $i \in \{c, d\}$ è assegnato, 0 altrimenti.

e sostituendo il vincolo in esame con i seguenti:

$y_{c1} + y_{c2} + y_{c3} \leq Mz_c$ #(attivazione variabile logica z_c)
$y_{d1} + y_{d2} + y_{d3} \leq Mz_d$ #(attivazione variabile logica z_d)
$z_c = z_d$ #(vincolo logico)
$z_j \in \{0, 1\}, \ \forall\, j \in \{c, d\}$

La costante M è arbitrariamente grande (in questo caso basta $M \geq 3$, o anche per quanto detto sopra, $M \geq 1$).

Definendo i parametri p_i / t_i (profitto / tempo per la realizzazione del lotto $i \in I$, lo *stesso* modello sopra esposto può essere scritto in forma compatta:

$$\max \quad z = \sum_{i \in I} p_i \sum_{j \in J} y_{ij} - 0.3 \sum_{j \in J} x_j$$

s.t.

$\sum_{i \in J} y_{ij} \leq 1 \; \forall \, i \in I \quad$ #(assegno lotto i ad una macchina al massimo)

$\sum_{i \in I} t_i y_{ij} \leq 8 + x_j \; \forall \, j \in J \quad$ #(capacità della macchina j)

$x_j \leq 3 \; \forall \, j \in J \quad$ #(limite ore aggiuntive)

$\sum_{j \in J} y_{cj} = \sum_{j \in J} y_{dj} \quad$ #(se faccio c faccio d e viceversa)

$y_{ij} \in \{0, 1\}, \; \forall \, i \in I, j \in J$
$x_j \in \mathbb{Z}_+, \; \forall \, j \in J$

2. Riportiamo il problema dato in forma standard attraverso le seguenti operazioni:
   - sostituzione di $x_2 \leq 0$ con $\hat{x}_2 = -x_2, \; \hat{x}_2 \geq 0$;
   - trasformazione della funzione obiettivo di max in min;
   - aggiunta della variabili di slack x_4 al secondo vincolo di $\leq$.

$$\begin{array}{lll} \min -z & = z_{\min} = & -2x_1 + 2\hat{x}_2 - 3x_3 \\ s.t. & & x_1 + 2\hat{x}_2 + 2x_3 = 6 \\ & & x_1 + \hat{x}_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ & & x_1 \geq 0, \; \hat{x}_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0, \; x_4 \geq 0 \end{array}$$

Non essendo facilmente individuabile una soluzione di base ammissibile di partenza, applichiamo la Fase I del simplesso, introducendo il seguente problema artificiale (basta una sola variabile artificiale y, potendo utilizzare la variabile di slack x_4 come seconda variabile di base):

$$\begin{array}{lll} \min w & = & y \\ s.t. & & x_1 + 2\hat{x}_2 + 2x_3 + y = 6 \\ & & x_1 + \hat{x}_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ & & x_1 \geq 0, \; \hat{x}_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0, \; x_4 \geq 0, \; y \geq 0 \end{array}$$

Risolviamo il problema artificiale (Fase I del simplesso).

Tableau iniziale della fase I:

	x_1	$\hat{x}_2$	x_3	x_4	y	$\bar{b}$
$-w$	0	0	0	0	1	0
	1	2	2	0	$\boxed{1}$	6
	1	1	-1	1	0	5

Passaggio alla forma canonica:

	x_1	$\hat{x}_2$	x_3	x_4	y	$\bar{b}$	
$-w$	-1	-2	-2	0	0	-6	$R_0 \leftarrow R_0 - R_1$
y	1	2	2	0	1	6	
x_4	$\boxed{1}$	1	-1	1	0	5	

Iterazioni del simplesso - Fase I:

Fra le candidate ad entrare, la regola di Bland sceglie x_1, esce x_4.

	x_1	$\hat{x}_2$	x_3	x_4	y	$\bar{b}$	
$-w$	0	-1	-3	1	0	-1	$R_0 \leftarrow R_0 + R_2$
y	0	$\boxed{1}$	3	-1	1	1	$R_1 \leftarrow R_1 - R_2$
x_1	1	1	-1	1	0	5	

Fra le candidate a entrare, la regola di Bland sceglie $\hat{x}_2$, esce y.

	x_1	$\hat{x}_2$	x_3	x_4	y	$\bar{b}$	
$-w$	0	0	0	0	1	0	$R_0 \leftarrow R_0 + R_1$
$\hat{x}_2$	0	1	3	-1	1	1	
x_1	1	0	-4	2	-1	4	$R_2 \leftarrow R_2 - R_1$

L'ottimo del problema artificiale è $w^* = 0$: il problema di partenza ammette soluzione. Tutte le variabili artificiali sono fuori base: una soluzione ammissibile di base iniziale per il problema di partenza (in forma standard) si legge direttamente nel tableau finale della fase I $(\hat{x}_2, x_1)$.

Tableau iniziale della Fase II del simplesso:

	x_1	$\hat{x}_2$	x_3	x_4	$\bar{b}$
$-z_{\min}$	-2	2	-3	0	0
	0	$\boxed{1}$	3	-1	1
	$\boxed{1}$	0	-4	2	4

Passaggio alla forma canonica:

	x_1	$\hat{x}_2$	x_3	x_4	$\bar{b}$	
$-z_{\min}$	0	0	-17	6	6	$R_0 \leftarrow R_0 + 2R_2 - 2R_1$
$\hat{x}_2$	0	1	$\boxed{3}$	-1	1	
x_1	1	0	-4	2	4	

	x_1	$\hat{x}_2$	x_3	x_4	$\bar{b}$	
$-z_{\min}$	0	$17/3$	0	$1/3$	$35/3$	$R_0 \leftarrow R_0 + 17/3R_1$
x_3	0	$1/3$	1	$-1/3$	$1/3$	$R_1 \leftarrow R_1/3$
x_1	1	$4/3$	0	$2/3$	$16/3$	$R_2 \leftarrow R_2 + 4/3R_1$

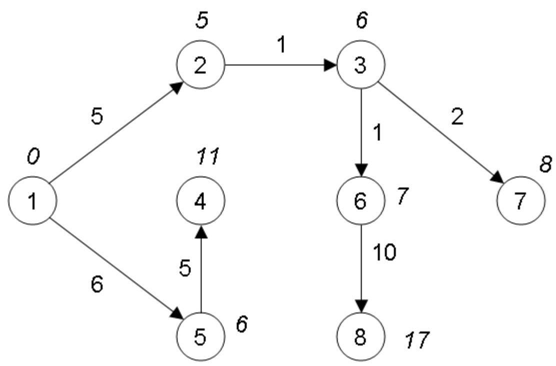
Tutti i costi ridotti sono non negativi, quindi l'ottimo del problema è: $z^*_{\min} = -35/3 \Rightarrow z^* = 35/3$; $x_1^* = 16/3$; $\hat{x}_2^* = 0 \Rightarrow x_2^* = 0$; $x_3^* = 1/3$; $x_4^* = 0 \Rightarrow$ secondo vincolo del problema originario (prima della forma standard) saturo.

3. Possiamo applicare sia l'algoritmo di Dijkstra sia l'algoritmo di Bellman-Ford per i cammini minimi. Non avendo costi sugli archi negativi, possiamo applicare l'algoritmo di Dijkstra, che garantisce una complessità computazionale migliore dell'algoritmo di Bellman-Ford. Riportiamo la tabella delle iterazioni, con il seguente significato dei simboli nella cella i, j:

   - *numero*: l'etichetta del nodo j è stata verificata e aggiornata all'iterazione i (tra parentesi riportiamo l'aggiornamento del corrispondente nodo predecessore);
   - "*": l'etichetta del nodo j è stata fissata all'iterazione i ($j = \hat{v}$);
   - "/": l'etichetta del nodo j è stata verificata ma non aggiornata all'iterazione i;
   - "×": l'etichetta del nodo j, anche se j è un successore di $\hat{v}$, era già fissata all'iterazione i e non è stata per questo né verificata (né aggiornata).

it.	nodo 1	nodo 2	nodo 3	nodo 4	nodo 5	nodo 6	nodo 7	nodo 8	$\bar{S}$	$\hat{v}$
0	$0^*_{(\wedge)}$	$5_{(1)}$	$+\infty_{(\wedge)}$	$+\infty_{(\wedge)}$	$6_{(1)}$	$+\infty_{(\wedge)}$	$+\infty_{(\wedge)}$	$+\infty_{(\wedge)}$	$2,3,4,5,6,7,8$	
1		$*$	$6_{(2)}$						$3,4,5,6,7,8$	2
2			$*$			$7_{(3)}$	$8_{(3)}$		$4,5,6,7,8$	3
3				$11_{(5)}$	$*$				$4,6,7,8$	5
4						$*$	/	$17_{(6)}$	$4,7,8$	6
5							$*$		$4,8$	7
6			×	$*$					8	4
6								$*$	$\emptyset$	8

Il corrispondente grafo dei cammini minimi coincide con l'albero dei cammini minimi ed è ili seguente:



4. Dato un problema di programmazione lineare, ad esempio nella forma $\min\{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\}$ e il corrispondente duale $\max\{u^t b : u^T A \leq c^T, u \leq 0\}$, le soluzioni primale e duale $\bar{x}$ e $\bar{u}$ sono ottime primale e duale rispettivamente se e solo se $\bar{x}$ è ammissibile primale, $\bar{u}$ è ammissibile duale e $\bar{x}$ e $\bar{u}$ sono in scarti complementari, cioè valgono le seguenti condizioni di ortogonalità (dette anche condizioni di complementarietà primale-duale):

$$(\bar{u}^T A - c^T)\bar{x} = 0$$

e

$$\bar{u}^T (A\bar{x} - b) = 0$$

oppure, equivalentemente (indicando con a_i^T la riga i-esima di $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e con A_j la colonna j-esima)

$$(\bar{u}^T A_j - c_j)\bar{x}_j = 0, \ \forall \ j$$

e

$$\bar{u}_i(a_i^T \bar{x} - b_i) = 0, \ \forall \ i$$

Dimostrazione:

$$\begin{cases} x, u \text{ ammissibile} \\ \\ \\ \\ \\ x, u \text{ ottime} \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ax \leq b \\ u^T A \leq c^T \\ u \leq 0 \\ x \geq 0 \\ \\ c^T x = u^T b \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^T Ax \geq u^T b \\ u^T Ax \leq c^T x \\ u \leq 0 \\ x \geq 0 \\ \\ c^T x = u^T b \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^T Ax \geq u^T b \\ u^T Ax \leq c^T x \\ u \leq 0 \\ x \geq 0 \\ \\ u^T Ax = u^T b \\ u^T Ax = c^T x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^T Ax \geq u^T b \\ u^T Ax \leq c^T x \\ u \leq 0 \\ x \geq 0 \\ \\ u^T(Ax - b) = 0 \\ (u^T A - c^T)x = 0 \end{cases}$$

Inoltre:

$$\begin{cases} x, u \text{ ammissibile} \\ \\ \\ \\ \\ x, u \text{ ottime} \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_i^T x \leq b_i, \ \forall \ i \\ u^T A_j \leq c_j, \ \forall \ j \\ u_i \leq 0, \ \forall \ i \\ x_j \geq 0, \ \forall \ j \\ \\ u^T(Ax - b) = 0 \\ (u^T A - c^T)x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_i^T x \leq b_i, \ \forall \ i \\ u^T A_j \leq c_j, \ \forall \ j \\ u_i \leq 0, \ \forall \ i \\ x_j \geq 0, \ \forall \ j \\ \\ u_i(a_i^T x - b_i) = 0, \ \forall \ i \\ (u^T A_j - c_j)x_j = 0, \ \forall \ j \end{cases} \qquad \text{(c.v.d.)}$$

Per il problema dato, il duale è:

$$\begin{array}{lll} \max & w = -6u_1 + 3u_2 + 7u_3 & \\ s.t. & 3u_1 + u_2 + u_3 & \leq 4 \\ & -2u_2 + u_3 & \leq -5 \\ & u_1 - 2u_3 & \geq 3 \\ & u_1 & \leq 0 \\ & u_2, u_3 & \geq 0 \end{array}$$

e le condizioni di complementarietà primale duale sono:

$$\begin{cases} (3u_1 + u_2 + u_3 - 4)x_1 = 0 \\ (-2u_2 + u_3 + 5)x_2 = 0 \\ (u_1 - 2u_3 - 3)x_3 = 0 \\ \\ u_1(3x_1 + x_3 + 6) = 0 \\ u_2(x_1 - 2x_2 - 3) = 0 \\ u_3(x_1 + x_2 - 2x_3 - 7) = 0 \end{cases}$$

Le condizioni possono essere lette anche nel seguente modo. AD ESEMPIO, se $u_1 < 0$, allora il corrispondente vincolo primale è saturo, cioè $3x_1 + x_3 = -6$; se il secondo vincolo duale NON è saturo, cioè $-2u_2 + u_3 < -5$, allora la corrispondente variabile primale è 0, cioè $x_2 = 0$ ETC.

5. L'affermazione (a) è vera (non è possibile avere esattamente due soluzioni ottime distinte). Consideriamo un problema di programmazione lineare in forma standard $\min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$ e supponiamo che esistano le soluzioni x_1 e x_2 ottime, con $x_1 \neq x_2$. Allora $c^T x_1 = c^T x_2 = z^*$ e $Ax_1 = Ax_2 = b$. Per una combinazione lineare convessa di x_1 e x_2, $y = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ ($\alpha \in [0,1]$), si avrà $Ay = A(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = \alpha A x_1 + (1-\alpha)Ax_2 = \alpha b + (1-\alpha)b = (\alpha+1-\alpha)b = b$: cioè, y è ammissibile. Inoltre, $c^T y = c^T(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = \alpha c^T x_1 + (1-\alpha)c^T x_2 = \alpha z^* + (1-\alpha)z^* = (\alpha + 1 - \alpha)z^* = z^*$: cioè, y è ottima. Quindi, a partire da due soluzione ottime distinte x_1 e x_2, al variare di α tra 0 e 1, si ottengono *infinite* soluzioni ottime (quelle sul segmento che congiunge x_1 e x_2).

   L'affermazione (b) è falsa. Con riferimento al punto (a), le soluzioni ottenute come combinazione lineare convessa stretta *non* sono vertici del poliedro ammissibile, e quindi non sono soluzioni di base, pur essendo soluzioni ottime.

6. - Si capisce che è un problema di minimo perché i valori contrassegnati come LB sono crescenti di padre in figlio nell'albero e pertanto possono essere associati a valutazioni ottimistiche di problemi di minimo via via più vincolati. I valori contrassegnati come UB non sono decrescenti di padre in figlio e non possono essere associati a valutazioni ottimistiche di problemi di massimo via via più vincolati. I valori UB sono quindi le valutazioni della funzione obiettivo di minimo in corrispondenza di soluzioni ammissibili.
   - La migliore soluzione ammissibile vale 14.0 (vedi nodo P_2. Quindi è possibile chiudere i nodi P_4 e P_6 perché non miglioranti.
   - L'ottimo della funzione obiettivo è compreso tra 13.6 (il miglior lower bound - nodo P_5) e 14.0 (migliore soluzione disponibile).
   - Il nodo che sarà sviluppato per primo in una strategia *best bound first* è quello che ha la valutazione più promettente (LB più basso) tra quelli che rimangono aperti, cioè il nodo P_5.
   - Nel caso ipotizzato, rimangono aperti il nodo P_3 con $(LB, UB) = (13.7, 14.4)$ e un nodo P_7 con $(LB, UB) = (lb, ub)$. Basta quindi che sia $lb = ub$ (lb corrisponde a una soluzione ammissibile) per poter chiudere il nodo in esame P_7 e che $lb \leq 13.7$, per poter chiudere P_3. Deve inoltre essere $lb \geq 13.6$, per compatibilità con il lower bound del nodo padre P_5. Ad esempio $(LB, UB) = (13.65, 13.65)$, o $(LB, UB) = (13.7, 13.7)$, o $(LB, UB) = (13.6, 13.6)$ etc.