Ricerca Operativa

2. Modelli di Programmazione Lineare

Modelli di programmazione lineare

- Il metodo grafico è basato su
  - $\Rightarrow$ linearità della funzione obiettivo
  - $\Rightarrow$ linearità dei vincoli
- Sotto queste ipotesi (come vedremo meglio in seguito), una soluzione si trova su un vertice della regione ammissibile: l'ultimo toccato traslando le rette isoprofitto nella direzione del gradiente
- Si parla in questi casi di modelli di programmazione lineare (PL)

Formulazione generale di un modello di programmazione lineare

$\min\ (\max)\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n (+cost.)$
subject to (s.t., soggetto a, s.a)

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n \geq (=, \leq)\ b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n \geq (=, \leq)\ b_2$
$\ldots$
$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n \geq (=, \leq)\ b_m$

$x_j \in \Re_{(+)}$ (x_j intere)

z : funzione obiettivo da minimizzare (min) o massimizzare (max)
x_j : variabili decisionali (incognite)
- reali (eventualmente non negative)
- intere (eventualmente non negative)
- binarie ($x_j \in \{0,1\}$)

$\}$ Programmazione lineare intera (PLI)

c_j : coefficienti di costo (min) o profitto (max)
a_{ij} : coefficienti tecnologici
b_i : termini noti

CAVEAT!!!

In questo corso si richiedono

MODELLI LINEARI

le variabili, di qualsiasi natura esse siano, possono essere solo moltiplicate per una costante e sommate tra loro. E basta!!!

Dieta economica

Un dietologo deve preparare una dieta che garantisca un apporto giornaliero di proteine, ferro e calcio di almeno 20 mg, 30 mg e 10 mg, rispettivamente. Il dietologo è orientato su cibi a base di verdura (5 mg/kg di proteine, 6 mg/Kg di ferro e 5 mg/Kg di calcio, al costo di 4 €/Kg), carne (15 mg/kg di proteine, 10 mg/Kg di ferro e 3 mg/Kg di calcio, al costo di 10 €/Kg) e frutta (4 mg/kg di proteine, 5 mg/Kg di ferro e 12 mg/Kg di calcio, al costo di 7 €/Kg). Determinare la dieta di costo minimo.

Modello PLI

- Siano x_1, x_2 e x_3 le quantità di cibi a base di verdura, carne e frutta, rispettivamente

$$
\begin{aligned}
&\min \quad 4\,x_1+10\,x_2+7\,x_3 && \text{(costo giornaliero dieta)}\\
&s.t.\\
&\quad 5x_1+15x_2+4x_3 \geq 20 && \text{(proteine)}\\
&\quad 6x_1+10x_2+5x_3 \geq 30 && \text{(ferro)}\\
&\quad 5x_1+3x_2+12x_3 \geq 10 && \text{(calcio)}
\end{aligned}
$$

$$x_i \in \Re_+,\ \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

Indagine di mercato

Un'azienda pubblicitaria deve svolgere un'indagine di mercato per lanciare un nuovo prodotto. Si deve contattare telefonicamente un campione significativo di persone: almeno 150 donne sposate, almeno 110 donne non sposate, almeno 120 uomini sposati e almeno 100 uomini non sposati. Le telefonate possono essere effettuate al mattino (al costo operativo di 1.1 euro) o alla sera (al costo di 1.6 euro). Le percentuali di persone mediamente raggiunte sono riportate in tabella.

	Mattino	Sera
Donne sposate	30%	30%
Donne non sposate	10%	20%
Uomini sposati	10%	30%
Uomini non sposati	10%	15%
Nessuno	40%	5%

Si noti come le telefonate serali sono più costose, ma permettono di raggiungere un maggior numero di persone: solo il 5% va a vuoto. Si vuole minimizzare il costo complessivo delle telefonate da effettuare (mattina/sera) in modo da raggiungere un campione significativo di persone

Modello PLI

- Siano x_1 e x_2 il numero di telefonate da fare al mattino e alla sera, rispettivamente

$$\min \quad 1.1\, x_1 + 11.6\, x_2 \qquad \text{(costo totale telefonate)}$$

s.t.

$$0.3x_1 + 0.3x_2 \geq 150 \qquad \text{(donne sposate)}$$
$$0.1x_1 + 0.2x_2 \geq 110 \qquad \text{(donne non sposate)}$$
$$0.1x_1 + 0.3x_2 \geq 120 \qquad \text{(uomini sposati)}$$
$$0.1x_1 + 0.15x_2 \geq 100 \qquad \text{(uomini non sposati)}$$

$$x_i \in Z_+, \ \forall i \in \{1, 2\}$$

Trasporto di frigoriferi

Una ditta di produzione di elettrodomestici produce dei frigoriferi in tre stabilimenti e li smista in quattro magazzini intermedi di vendita. La produzione settimanale nei tre stabilimenti A, B e C è rispettivamente di 50, 70 e 20 unità. La quantità richiesta dai 4 magazzini è rispettivamente di 10, 60, 30 e 40 unità. I costi per il trasporto di un frigorifero tra gli stabilimenti e i magazzini 1, 2, 3 e 4 sono i seguenti:

- dallo stabilimento A: 6, 8, 3, 4 euro;
- dallo stabilimento B: 2, 3, 1, 3 euro;
- dallo stabilimento C: 2, 4, 6, 5 euro.

La ditta vuole determinare il piano di trasporti di costo minimo.

Modello PLI

- Sia x_{ij} il numero di frigoriferi prodotti nello stabilimento i e smistati nel magazzino j

$$
\begin{array}{ll}
\min & 6\,x_{A1}+8\,x_{A2}+3\,x_{A3}+4\,x_{A4}+ \\
\quad + & 2\,x_{B1}+3\,x_{B2}+1\,x_{B3}+3\,x_{B4}+ \\
\quad + & 2\,x_{C1}+4\,x_{C2}+6\,x_{C3}+5\,x_{C4} \\
s.t. & \\
& x_{A1}+x_{A2}+x_{A3}+x_{A4} \le 50 \quad \text{(capacità produttiva stabilimento A)} \\
& x_{B1}+x_{B2}+x_{B3}+x_{B4} \le 70 \quad \text{(capacità produttiva stabilimento B)} \\
& x_{C1}+x_{C2}+x_{C3}+x_{C4} \le 20 \quad \text{(capacità produttiva stabilimento C)} \\
& x_{A1}+x_{B1}+x_{C1} \ge 10 \quad \text{(domanda magazzino 1)} \\
& x_{A2}+x_{B2}+x_{C2} \ge 60 \quad \text{(domanda magazzino 2)} \\
& x_{A3}+x_{B3}+x_{C3} \ge 30 \quad \text{(domanda magazzino 3)} \\
& x_{A4}+x_{B4}+x_{C4} \ge 40 \quad \text{(domanda magazzino 4)}
\end{array}
$$

$x_{ij} \in Z_+,\ \forall i \in \{A, B, C\}, j \in \{1, 2, 3, 4\}$

Turni in ospedale

Si vogliono organizzare i turni degli infermieri in ospedale. Ogni infermiere lavora 5 giorni consecutivi, indipendentemente da come sono collocati all'interno della settimana, e poi ha diritto a due giorni consecutivi di riposo. Le esigenze di servizio per i vari giorni della settimana richiedono la presenza di 17 infermieri il lunedì, 13 il martedì, 15 il mercoledì, 19 il giovedì, 14 il venerdì, 16 il sabato e 11 la domenica. Organizzare il servizio in modo da minimizzare il numero totale di infermieri da impegnare.

Modello PLI

- Siano lun, mar, mer, gio, ven, sab e dom il numero di infermieri in cui turno inizia di lunedì,… domenica

$$
\begin{array}{lllllllll}
\min & lun & +mar & +mer & +gio & +ven & +sab & +dom & \\
s.t. & & & & & & & & \\
& lun & & & +gio & +ven & +sab & +dom & \geq 17 \text{ (presenze lunedì)} \\
& lun & +mar & & & +ven & +sab & +dom & \geq 13 \text{ (presenze martedì)} \\
& lun & +mar & +mer & & & +sab & +dom & \geq 15 \text{ (presenze mercoledì)} \\
& lun & +mar & +mer & +gio & & & +dom & \geq 19 \text{ (presenze giovedì)} \\
& lun & +mar & +mer & +gio & +ven & & & \geq 14 \text{ (presenze venerdì)} \\
& & mar & +mer & +gio & +ven & +sab & & \geq 16 \text{ (presenze sabato)} \\
& & & +mer & +gio & +ven & +sab & +dom & \geq 11 \text{ (presenze domenica)}
\end{array}
$$

$$lun, mar, mer, gio, ven, sab, dom \in Z_+$$

Localizzazione di servizi

Una città è divisa in sei quartieri, dove si vogliono attivare dei centri unificati di prenotazione (CUP) per servizi sanitari. In ciascun quartiere è stata individuata una possibile località di apertura. Le distanze medie in minuti da ciascun quartiere a ciascuna delle possibili località è indicata in tabella. Si desidera che nessun utente abbia un tempo medio di spostamento superiore a 15 minuti per arrivare al CUP più vicino e si vuole minimizzare il numero di CUP attivati.

	Loc. 1	Loc. 2	Loc 3	Loc. 4	Loc. 5	Loc. 6
Q.re 1	5	10	20	30	30	20
Q.re 2	10	5	25	35	20	10
Q.re 3	20	25	5	15	30	20
Q.re 4	30	35	15	5	15	25
Q.re 5	30	20	30	15	5	14
Q.re 6	20	10	20	25	14	5

Modello PLI

Sia $x_i = 1$, se viene aperto il CUP nel quartiere i, 0 altrimenti

$$
\begin{array}{lll}
\min & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 & \\
s.t. & & \\
& x_1 + x_2 \geq 1 & \text{(esigenze q.re 1)} \\
& x_1 + x_2 + x_6 \geq 1 & \text{(esigenze q.re 2)} \\
& x_3 + x_4 \geq 1 & \text{(esigenze q.re 3)} \\
& x_3 + x_4 + x_5 \geq 1 & \text{(esigenze q.re 4)} \\
& x_4 + x_5 + x_6 \geq 1 & \text{(esigenze q.re 5)} \\
& x_2 + x_5 + x_6 \geq 1 & \text{(esigenze q.re 6)} \\
& & \\
& x_i \in \{0,1\} &
\end{array}
$$

Altri modelli

- Mix ottimo di produzione:
  - Produzione e forza lavoro
  - Produzione e capacità eccedente
  - Produzione di salumi (libro di testo)
- Multiperiodali
  - Piano di investimento
  - Produzione di radio (libro di testo)

Min-max, max-min e min-abs

min max $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$

$$\begin{aligned} &\min y \\ &y \geq e_1 \\ &y \geq e_2 \\ &\ldots \\ &y \geq e_n \end{aligned}$$

max min $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$

$$\begin{aligned} &\max y \\ &y \leq e_1 \\ &y \leq e_2 \\ &\ldots \\ &y \leq e_n \end{aligned}$$

min $|e| \equiv$ min max $\{e, -e\}$

$$\begin{aligned} &\min y \\ &y \geq e \\ &y \geq -e \end{aligned}$$

Esempi:

- Produzione su più linee
- Schedulazione just-in-time