Modelli con vincoli di tipo logico

Le variabili decisionali possono essere soggette a vincoli di tipo logico, più o meno espliciti. Ad esempio:

- vincoli di incompatibilità tra varie alternative: *se* localizziamo un'antenna in certo sito, *allora* non possiamo installarne altre in altri siti che provocherebbero interferenze;
- investimenti con costi fissi: *se* la dimensione dell'investimento è maggiore di 0, *allora* si paga un costo fisso;
- vincoli di copertura: *se* vogliamo servire un certo quartiere, *allora* dobbiamo aprire almeno un centro unificato di prenotazione in un certo insieme;
- possiamo avere clienti a Torino *solo se* assebbiamo un rapresentante in Italia;
- bisogna attivare una e una sola alternativa;
- etc. etc.

In questi casi introduciamo delle *variabili logiche* il cui dominio è limitato ai soli due valori 0 e 1. Ricordiamo che vogliamo (dobbiamo) rappresentare *tutti* i vincoli in modo lineare, anche i vincoli di tipo logico che coinvolgono variabili logiche: dal punto di vista modellistico, le variabili logiche sono variabili come tutte le altre e, pertanto, possono essere combinate solo in modo *lineare*. Quindi, NON possiamo applicare alle variabili logiche gli operatori logici, o operatori linguistici ("if $y_1 = 0$ then $y_2 = 1$"), o moltiplicarle tra loro o per altre variabili: sarebbero tutte forme NON lineari.

Modelli con vincoli di tipo logico: esempi

SBAGLIATO formulazioni *NON LINEARI*!!!			**Corretto**	
			Vincoli	Domini
if $x_1 > 0$ then $x_2 = 0$ and if $x_2 > 0$ then $x_1 = 0$	$nand(y_1, y_2)$	$x_1 x_2 = 0$ $y_1 y_2 = 0$	$x_1 \leq M y_1$ $x_2 \leq M y_2$ $y_1 + y_2 \leq 1$	$x_1, x_2 \geq 0$ $y_1, y_2 \in \{0, 1\}$ $(M \to \infty)$
if $x > 0$ then $y = 1$	$(x > 0) \to (y = 1)$	$x(1 - y) = 0$	$x \leq My$	$x \geq 0, y \in \{0, 1\}$
$y_1 = 1$ or $y_2 = 1$	$y_1 \vee y_2$	$(1 - y_1)(1 - y_2) = 0$	$y_1 + y_2 \geq 1$	$y_1, y_2 \in \{0, 1\}$
$y_1 = 1$ and $y_2 = 1$	$y_1 \wedge y_2$	$y_1 y_2 = 1$	$y_1 + y_2 = 2$	$y_1, y_2 \in \{0, 1\}$
$y_1 = 1$ only if $y_2 = 1$	$y_1 \to y_2$	$y_1(1 - y_2) = 0$	$y_1 \leq y_2$	$y_1, y_2 \in \{0, 1\}$
$y_1 = 1$ only if $y_2 = 0$	$y_1 \to \overline{y_2}$	$y_1 y_2 = 0$	$y_1 \leq (1 - y_2)$	$y_1, y_2 \in \{0, 1\}$
$y_1 = 1$ xor $y_2 = 1$	$y_1 \neq y_2$		$y_1 + y_2 = 1$	$y_1, y_2 \in \{0, 1\}$
etc. etc. etc.			etc. etc. etc.	
Queste formulazioni sono logicamente corrette ma **NON ACCETTABILI** in un modello di programmazione lineare			Queste formulazioni sono corrette a patto di SPECIFICARE I DOMINI	

Localizzazione con costi fissi

Una catena delle Grande Distribuzione Organizzata (GDO) dispone di un budget W per l'apertura di nuovi ipermercati in Italia. Gli studi preliminari hanno individuato un insieme I di possibili localizzazioni. Per l'apertura di un ipermercato nella localizzazione i bisogna sostenere un costo fisso F_i (acquisto del terreno, oneri amministrativi etc.) e un costo variabile pari a C_i ogni 100 mq di ipermercato, e la dimensione massima è U_i. Una volta aperto e entrato a regime, ciascun ipermercato localizzato in i produrrà entrate per R_i ogni 100 mq. Determinare l'insieme di localizzazioni in cui aprire dei nuovi ipermercati e dimensionare gli ipermercati stessi in modo da massimizzare le entrate complessive.
Si valuti inoltre il caso in cui, per ogni localizzazione, sia previsto anche un limite minimo L_i per la dimensione dell'ipermercato in i, nel caso in cui questo venga effettivamente realizzato.

Variabili decisionali

- $x_i : i \in I$: dimensione in centinaia di mq dell'ipermercato localizzato in i;
- $y_i : i \in I$: **variabile logica (o binaria)** legata all'apertura di un ipermercato nella localizzazione i, cioé:
  $$y_i = \begin{cases} 1, \text{ se viene aperto un ipermercato nella localizzazione } i \\ 0, \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Modello

$$\max \sum_{i \in I} R_i x_i$$
$$s.t.$$
$$\sum_{i \in I} C_i x_i + F_i y_i \leq W \qquad \text{(budget)}$$
$$x_i \leq U_i y_i \quad \forall\, i \in I \qquad \text{(dimensione massima / attivazione delle variabili binarie)}$$
$$x_i \geq L_i y_i \quad \forall\, i \in I \qquad \text{(dimensione minima dell'ipermercato)}$$
$$x_i \in \mathbb{R}_+, y_i \in \{0, 1\}$$

Portfolio Optimization

Un cliente affida ad un'agenzia finanziaria un miliardo di euro da impiegare in fondi di investimento. I fondi attualmente offerti dal mercato sono di cinque tipi, come riassunto in tabella:

Nome	**Tipo**	**Moody's rating**	**Durata (anni)**	**Rendita alla maturazione**
A	privato	Aa	9	4,5%
B	pubblico	A	15	5,4%
C	stato	Aaa	4	5,1%
D	stato	Baa	3	4,4%
E	privato	Ba	2	4,1%

Si sa che i fondi pubblici e dello stato sono tassati del 50% alla fine del periodo. Il cliente chiede di riservare almeno il 40% del capitale a fondi pubblici e dello stato e vuole che la durata media dell'investimento non superi i 5 anni.

Le regole del mercato impongono che l'investimento in C precluda la possibilità di investire in D, e viceversa. Inoltre, è possibile investire in E solo se si investe anche in A. Si consideri che, se si investe in A, si deve investire almeno 1000 euro. Infine, trasformando il Moody's rating in una scala numerica (Aaa = 1, Aa = 2, A = 3, Baa = 4 e Ba = 5), il valore medio del rischio dell'investimento non deve superare 1,5. Si vuole massimizzare la rendita finale dell'investimento.

Variabili decisionali e parametri

- $x_i : i \in \{A, B, C, D, E\}$: ammontare in euro investito in i;
- $y_i : i \in \{A, B, C, D, E\}$: variabile binaria legata all'investimento in i, cioé:

$$y_i = \begin{cases} 1, \text{ se si investe qualcosa in } i \\ 0, \text{ altrimenti} \end{cases}$$

- M: costante sufficientemente alta ($M \geq 1 \times 10^9$).

Modello

$$\max \quad 4,5x_A + \frac{5,4}{2}x_B + \frac{5,1}{2}x_C + \frac{4,4}{2}x_D + 4,1x_E$$

$s.t.$

$x_A + x_B + x_C + x_D + x_E \leq M$ (budget)

$2x_A + 3x_B + x_C + 4x_D + 5x_E \leq 1,5(x_A + x_B + x_C + x_D + x_E)$ (Moody's medio)

$9x_A + 15x_B + 4x_C + 3x_D + 2x_E \leq 5(x_A + x_B + x_C + x_D + x_E)$ (durata media)

$x_B + x_C + x_D \geq 400 \times 10^6$ (minimo investimento pubblico/stato)

$x_C \leq My_C$ (attivazione variabili binarie)

$x_D \leq My_D$

$y_C + y_D \leq 1$ (vincolo logico C nand D)

$x_A \geq 1000\ y_A$ (attivazione variabili binarie)

$x_E \leq My_E$

$y_E \leq y_A$ (vincolo logico E $\Rightarrow$ A)

$x_i \in \mathbb{R}_+, y_i \in \{0,1\}$

Assunzione multiperiodale di personale

Una ditta che si occupa di riparazioni deve pianificare le assunzioni per i prossimi 5 mesi. All'inizio, la ditta dispone di 20 operai esperti. Ogni operaio esperto fornisce 150 ore di lavoro al mese e percepisce uno stipendio di 1000 euro. Un operaio neoassunto, durante il primo mese di servizio, percepisce uno stipendio di 500 euro e non fornisce, in pratica, lavoro utile; per questo primo mese gli viene invece affiancato un operaio esperto che gli insegni il mestiere. Ogni operaio esperto che svolge affiancamento rende per 70 ore di lavoro al mese (anziché 150). Dopo il mese di apprendistato, gli operai neoassunti diventano esperti, con pari abilità lavorativa e stipendio. Le quantità di ore/lavoro da coprire nei prossimi 5 mesi sono rispettivamente pari a 2000, 4000, 7000, 3000 e 3500. Se si assumono almeno 10 persone nei primi due mesi, l'azienda può incassare un contributo statale di 10000 euro. Formulare il programma lineare che consenta di pianificare le assunzioni in modo da minimizzare i costi netti del personale nei prossimi 5 mesi.

Variabili decisionali

- $x_i : i \in \{1..5\}$: neoassunti nel mese i;
- $y_i : i \in \{1..5\}$: esperti disponibili nel mese i;
- z: variabile logica legata alla scelta di ottenere o meno il contributo statale, cioé:

$$z = \begin{cases} 1, \text{ se si decide di ottenere il contributo statale} \\ 0, \text{ altrimenti} \end{cases}.$$

Modello

$$\min \quad 500(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)+1000(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5)-10000z$$
s.t.

(Mese 1)
$$y_1 = 20$$
$$x_1 \leq y_1$$
$$150(y_1-x_1)+70x_1 \geq 2000$$

(Mese 2)
$$y_2 = y_1 + x_1$$
$$x_2 \leq y_2$$
$$150(y_2-x_2)+70x_2 \geq 4000$$

(Mese 3)
$$y_3 = y_2 + x_2$$
$$x_3 \leq y_3$$
$$150(y_3-x_3)+70x_3 \geq 7000$$

(Mese 4)
$$y_4 = y_3 + x_3$$
$$x_4 \leq y_4$$
$$150(y_4-x_4)+70x_4 \geq 3000$$

(Mese 5)
$$y_5 = y_4 + x_4$$
$$x_5 \leq y_5$$
$$150(y_5-x_5)+70x_5 \geq 3500$$

(attiva z)
$$x_1 + x_2 \geq 10z$$

$$x_i, y_i \in \mathbb{Z}_+ \qquad z \in \{0,1\}$$

Nota: possiamo arguire che x_5 è a 0 in una soluzione ottima ed eliminare tale variabile.

Raffineria

Una raffineria produce benzina verde e benzina super a partire da due tipi di greggio A e B, usando tre impianti. Il primo impianto può produrre 2 barili di verde e 3 di super a partire da 4 barili di greggio di tipo A e 3 barili di greggio di tipo B. Il secondo impianto può produrre 4 barili di verde e 2 di super a partire da 3 barili di greggio di tipo A e 4 barili di greggio di tipo B. Il terzo impianto può produrre 2 barili di verde e 2 di super a partire da 3 barili di greggio di tipo A e 3 barili di greggio di tipo B. Gli impianti lavorano sempre con le proporzioni specificate. La benzina verde viene venduta a 120 euro al barile, la super a 150 euro al barile. Sono disponibili, per questo mese, 5000 barili di greggio di tipo A e 6000 di tipo B. Per esigenze legate ad altre lavorazioni, almeno uno dei tre impianti deve produrre al massimo 1000 barili. Determinare la produzione che massimizza il profitto mensile.

Variabili decisionali e parametri

Essendo i mix di ingresso e uscita in rapporti costanti e ben determinati, possiamo utilizzare variabili legate al livello di produzione degli impianti.

- $x_i : i \in \{1..3\}$: livello di produzione dell'impianto i;

  es. livello $x_1 = 1 \Rightarrow$ consumo 4 barili di A e 3 di B e produco 2 varili di verde e 3 di super;

  es. livello $x_1 = 1,5 \Rightarrow$ consumo 6 barili di A e 4,5 di B e produco 3 varili di verde e 4,5 di super;

- $z_i : i \in \{1..3\}$: variabile logica legata alla scelta degli impianti con produzione limitata, cioé
  $$z_i = \begin{cases} 1, \text{ se si decide di limitare a 1000 la produzione di barili nell'impianto } i \\ 0, \text{ altrimenti} \end{cases}.$$

- M: costante sufficientemente elevata (maggiore o uguale al numero massimo di barili di verde o super ottenibili in un impianto).

Modello

$$
\begin{array}{rl}
 & \max 120(2x_1 + 4x_2 + 2x_3) + 150(3x_1 + 2x_2 + 2x_3) \\
 & s.t. \\
\text{(Disponibilità greggio)} & 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 5000 \\
 & 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 6000 \\
 & \\
\text{(Vincolo logico)} & z_1 + z_2 + z_3 \geq 1 \\
 & 5x_1 \leq 1000 + M(1 - z_1) \\
 & 6x_2 \leq 1000 + M(1 - z_2) \\
 & 4x_3 \leq 1000 + M(1 - z_3) \\
 & \\
 & x_i \in \mathbb{R}_+, z_i \in \{0, 1\}, \forall i = 1..3
\end{array}
$$

Nota: come dimensionare M?.

Variabili decisionali e parametri: FORMULAZIONE ALTERNATIVA

Una scelta più immediata delle variabili decisionali è la seguente. Si ottiene un modello corretto ma più complicato.

- $x_{ij} : i \in \{v, s\}, j \in \{1, 2, 3\}$: numero di barili di benzina di tipo i prodotta (output) nell'impianto j;
- $y_{ij} : i \in \{v, s\}, j \in \{1, 2, 3\}$: numero di barili di greggio di tipo i utilizzati (input) nell'impianto j;
- $z_i : i \in \{1..3\}$: variabile logica legata alla scelta degli impianti con produzione limitata, cioé

$$z_i = \begin{cases} 1, \text{ se si decide di limitare a 1000 la produzione di barili nell'impianto } i \\ 0, \text{ altrimenti} \end{cases}.$$

- M: costante sufficientemente elevata (maggiore o uguale al numero massimo di barili di verde o super ottenibili in un impianto).

Modello: FORMULAZIONE ALTERNATIVA

$$
\begin{array}{rll}
 & \max 120(x_{v1} + x_{v2} + x_{v3}) + 150(x_{s1} + x_{s2} + x_{s3}) & \\
 & s.t. & \\
\text{(Disponibilità greggio)} & y_{A1} + y_{A2} + y_{A3} \leq 5000 & \\
 & y_{B1} + y_{B2} + y_{B3} \leq 6000 & \\
 & & \\
\text{(Bilanciamento impianto 1)} & 3y_{A1} = 4y_{B1} & \text{(input } y_{A1} : y_{B1} = 4:3\text{)} \\
 & 3x_{v1} = 2x_{s1} & \text{(output } x_{v1} : x_{s1} = 2:3\text{)} \\
 & 2y_{A1} = 4x_{v1} & \text{(input/output } y_{A1} : x_{v1} = 4:2\text{)} \\
 & & \\
\text{(Bilanciamento impianto 2)} & 4y_{A2} = 3y_{B2} & \text{(input)} \\
 & 2x_{v2} = 4x_{s2} & \text{(output)} \\
 & 4y_{A2} = 3x_{v2} & \text{(input/output)} \\
 & & \\
\text{(Bilanciamento impianto 3)} & y_{A2} = y_{B2} & \text{(input)} \\
 & x_{v2} = x_{s2} & \text{(output)} \\
 & 2y_{A2} = 3x_{v2} & \text{(input/output)} \\
 & \ldots &
\end{array}
$$

$$\ldots$$

$$\begin{aligned}
\text{(Vincolo logico)} \quad & z_1 + z_2 + z_3 \geq 1 \\
& x_{v1} + x_{s1} \leq 1000 + M(1 - z_1) \\
& x_{v2} + x_{s2} \leq 1000 + M(1 - z_2) \\
& x_{v3} + x_{s3} \leq 1000 + M(1 - z_3) \\
\\
\text{(Dominio)} \quad & x_{ij}, y_{ij} \in \mathbb{R}_+, z_j \in \{0,1\}, \forall i \in \{v,s\}, j \in \{1,2,3\}
\end{aligned}$$

Agricoltore CEE

Un'azienda agricola produce mais, soia e grano in tre tenute A, B e C. La tenuta A dispone di 600 ettari di terreno e di una riserva d'acqua di $8 \times 10^6 mc$. La tenuta B dispone di 700 ettari di terreno e di $5 \times 10^6 mc$ d'acqua. La tenuta C dispone di 450 ettari di terreno e di $6 \times 10^6 mc$ d'acqua. La resa economica di ogni ettaro di terreno è di 5, 6 e 7 migliaia di euro per le produzioni di mais, soia e grano, rispettivamente. Ogni ettaro di terreno consuma acqua per 20000, 10000 e 10000 mc se coltivato rispettivamente a mais, soia o grano. Le direttive della comunità europea impongono che almeno una tenuta lasci 200 ettari di terreno incolto e che l'estensione complessiva del terreno coltivato a soia dall'azienda non superi il 40% del totale del suolo coltivato. L'azienda vuole massimizzare la resa economica delle tre tenute.

Variabili decisionali

- $x_{ij} : i \in \{A, B, C\}, j \in \{M, S, G\}$: ettari della tenuta i da coltivare a j;
- $z_i : i \in \{A, B, C\}$: variabile logica legata alla scelta della tenuta con terreno incolto, cioé
$$z_i = \begin{cases} 1, \text{ se si decide di lasciare } 200ha \text{ di terreno incolto nella tenuta } i \\ 0, \text{ altrimenti} \end{cases}.$$

Modello

$$\begin{aligned}
& \max[5(x_{AM} + x_{BM} + x_{CM}) + 7(x_{AS} + x_{BS} + x_{CS}) \\
& \qquad +6(x_{AG} + x_{BG} + x_{CG})] \times 10^6 \\
& s.t. \\
\text{(Disponibilità acqua)} \quad & 20x_{AM} + 10x_{AS} + 10x_{AG} \leq 8000 \quad (\times 10^3) \\
& 20x_{BM} + 10x_{BS} + 10x_{BG} \leq 5000 \\
& 20x_{CM} + 10x_{CS} + 10x_{CG} \leq 6000 \\
& \ldots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \dots \\
\text{(Disponibilità terreno)} \quad & x_{AM} + x_{AS} + x_{AG} \leq 600 \\
& x_{BM} + x_{BS} + x_{BG} \leq 700 \\
& x_{CM} + x_{CS} + x_{CG} \leq 450 \\
\\
\text{(Massimo 40\% a soia)} \quad & x_{AS} + x_{BS} + x_{CS} \leq 0,4 \sum_{i,j} x_{ij} \\
\text{(terreno incolto)} \quad & z_A + z_B + z_C \geq 1 \\
& x_{AM} + x_{AS} + x_{AG} \leq 600 - 200 z_A \\
& x_{BM} + x_{BS} + x_{BG} \leq 700 - 200 z_B \\
& x_{CM} + x_{CS} + x_{CG} \leq 450 - 200 z_C \\
\\
\text{(Dominio)} \quad & x_{ij} \in \mathbb{R}_+, z_j \in \{0,1\}, \forall i \in \{A,B,C\}, j \in \{M,S,G\}
\end{aligned}
$$

Nota: I vincoli sul terreno incolto rendono superflui (*dominano*) i vincoli sulla disponibilità di terreno.