

RICERCA OPERATIVA

Tema d'esame del 15/12/2008 (5 crediti)

COGNOME:

NOME:

MATRICOLA:

1. Babbo Natale deve organizzare gli acquisti per le prossime festività. Sono arrivate richieste di 15000 bamboline, 17000 automobiline e 12000 libri. La crisi economica spinge Babbo Natale ad approfittare di alcuni stock di giocattoli, la cui composizione e il cui prezzo sono sintetizzati nella seguente tabella:

Stock	bamboline	automobiline	libri	peluches	costo (euro)
1	100	40	80	-	90.00
2	50	90	20	-	75.00
3	80	60	-	40	80.00
4	25	125	140	20	100.00

Babbo Natale farà i suoi acquisti da solo e, vista la vicinanza del Natale, non potrà acquistare sia pacchi dello stock 1 sia pacchi dello stock 2, perché i relativi punti di vendita sono molto distanti tra loro. Gli eventuali giocattoli non utilizzati saranno dati in beneficenza. Il numero complessivo di giocattoli da dare in beneficenza, indipendentemente dal tipo, non deve essere inferiore a 2000. Aiutiamo Babbo Natale ad effettuare gli acquisti nel modo più economico possibile, attraverso la formulazione di un modello di programmazione lineare del problema.

2. Dato il seguente problema di P.L.

$$\begin{array}{llllll}
 \max & -2x_1 & + & 3x_2 & - & 7x_3 \\
 s.t. & -x_1 & + & x_2 & - & x_3 = 4 \\
 & -2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 \leq 5 \\
 & x_1 \leq 0 & & x_2 \geq 0 & & x_3 \geq 0
 \end{array}$$

trovare la soluzione ottima con il metodo del simplesso (si applichi la regola anti-ciclo di Bland).

3. Dato il seguente problema di P.L.

$$\begin{array}{llllll}
 \min & -x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 \\
 s.t. & -x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 \leq 2 \\
 & 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 = 4 \\
 & & - & 4x_2 & & \geq -3 \\
 & x_1 \leq 0 & & x_2 \geq 0 & & x_3 \geq 0
 \end{array}$$

applicare le condizioni di complementarità primale-duale per dimostrare che la soluzione $x_1 = -41/20$; $x_2 = 3/4$; $x_3 = 11/5$ è ottima.

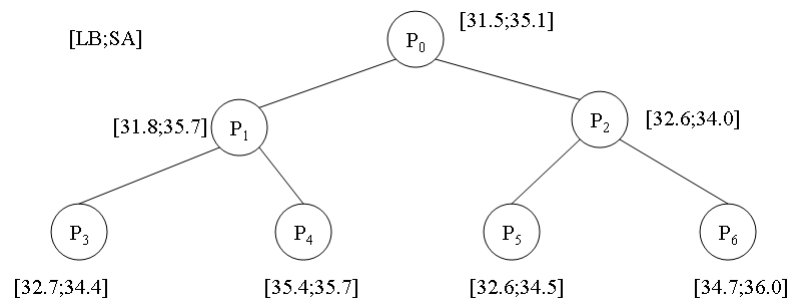
...ALTRE DOMANDE SUL RETRO...

4. Come si riconoscono sul tableau del simpleso le condizioni di illimitatezza di un problema di programmazione lineare con funzione obiettivo di minimo? Giustificare la risposta.
5. Nella seguente tabella sono sintetizzati i risultati dell'applicazione dell'algoritmo di Bellman-Ford ad un grafo con 5 nodi: il nodo origine è il nodo 1, h indica l'iterazione ($h = 0$ corrisponde al passo di inizializzazione) e in ogni cella è indicato il valore dell'etichetta (tra parentesi, il nodo predecessore).

iterazione	nodo 1	nodo 2	nodo 3	nodo 4	nodo 5
$h = 0$	0 (\wedge)	$+\infty$ (\wedge)	$+\infty$ (\wedge)	$+\infty$ (\wedge)	$+\infty$ (\wedge)
$h = 1$	0 (\wedge)	+2 (1)	$+\infty$ (\wedge)	$+\infty$ (\wedge)	$+\infty$ (\wedge)
$h = 2$	0 (\wedge)	+2 (1)	$+\infty$ (\wedge)	$+\infty$ (\wedge)	-2 (2)
$h = 3$	0 (\wedge)	+2 (1)	$+\infty$ (\wedge)	-3 (5)	-2 (2)
$h = 4$	0 (\wedge)	+2 (1)	-1 (4)	-3 (5)	-2 (2)
$h = 5$	0 (\wedge)	+1 (3)	-1 (4)	-3 (5)	-2 (2)

Rispondere alle seguenti domande giustificando le risposte:

- (a) è stato eseguito il numero corretto di iterazioni?
- (b) cosa possiamo desumere sull'esistenza di cicli di costo negativo?
- (c) qual è un cammino minimo da 1 a 2 che utilizzi al massimo 3 archi?
- (d) qual è un cammino minimo da 1 a 2 che utilizzi al massimo 5 archi?
6. Si consideri il seguente albero di sviluppo del Branch and Bound per un problema di ottimizzazione combinatoria con funzione obiettivo di minimo:



- (a) È possibile chiudere dei nodi? Se sì, quali e perché?
- (b) In quale intervallo è sicuramente compreso il valore della funzione obiettivo?

TRACCIA DELLA SOLUZIONE

1. Si fornisce il sorgente AMPL:

```
#VARIABILI E DOMINI
var x1 >=0 integer; #numero di stock 1 acquistati
var x2 >=0 integer;
var x3 >=0 integer;
var x4 >=0 integer;
var y1 binary;      #1 se acquisto almeno uno stock 1 (0 altrimenti)
var y2 binary;

#FUNZIONE OBIETTIVO
minimize z: 90 *x1 + 75 *x2 + 80 *x3 + 100 *x4;

#RICHIESTE GIOCATTOLE
s.t. b: 100 *x1 + 50 *x2 + 80 *x3 + 25 *x4 >= 15000; #minimo numero di bamboline
s.t. a: 40 *x1 + 90 *x2 + 60 *x3 + 125 *x4 >= 17000; #minimo numero di automobiline
s.t. l: 80 *x1 + 20 *x2 + 0 *x3 + 140 *x4 >= 12000; #minimo numero di libri

#BENEFICENZA
s.t. t: 100 *x1 + 50 *x2 + 80 *x3 + 25 *x4 +
      40 *x1 + 90 *x2 + 60 *x3 + 125 *x4 +
      80 *x1 + 20 *x2 + 0 *x3 + 140 *x4 +
      - ( 15000 + 17000 + 12000 ) >= 2000; #giocattoli in beneficenza

#INCOMPATIBILITA' (VINCOLI LOGICI)
s.t. l1: x1 <= 10000 * y1; #attivazione y1
s.t. l2: x2 <= 10000 * y2; #attivazione y2
s.t. l0: y1 + y2 <= 1; #no stock 1 e 2 contemporaneamente
```

2. Forma standard: da max a min, variabile di slack x_4 , sostituzione della variabile non positiva x_1 con $\hat{x}_1 = -x_1$:

$$\begin{aligned} \min z = & -2 \hat{x}_1 - 3 x_2 + 7 x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \hat{x}_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ & 2 \hat{x}_1 - 2 x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ & \hat{x}_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Non è evidente una base ammissibile \Rightarrow Fase I del simplesso \Rightarrow problema artificiale (basta una sola variabile artificiale):

$$\begin{aligned} \min w = & y \\ \text{s.t.} \quad & \hat{x}_1 + x_2 - x_3 + y = 4 \\ & 2 \hat{x}_1 - 2 x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ & \hat{x}_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0 \quad y \geq 0 \end{aligned}$$

Tableau iniziale della fase I:

	\hat{x}_1	x_2	x_3	x_4	y	\bar{b}
$-w$	0	0	0	0	1	0
	1	1	-1	0	1	4
	2	-2	1	1	0	5

Passo alla forma canonica:

	\hat{x}_1	x_2	x_3	x_4	y	\bar{b}
$-w$	-1	-1	1	0	0	-4
	1	1	-1	0	1	4
	2	-2	1	1	0	5

e applico il simplesso con la regola di Bland (tra \hat{x}_1 e x_2 scelgo \hat{x}_1):

	\hat{x}_1	x_2	x_3	x_4	y	\bar{b}
$-w$	0	-2	3/2	1/2	0	-3/2
	0	2	-3/2	-1/2	1	3/2
	1	-1	1/2	1/2	0	5/2

	\hat{x}_1	x_2	x_3	x_4	y	\bar{b}
$-w$	0	0	0	0	1	0
	0	1	-3/4	-1/4	1/2	3/4
	1	0	-1/4	1/4	1/2	13/4

$w^* = 0 \Rightarrow$ esiste soluzione ammissibile; è già evidente la base ammissibile x_2, \hat{x}_1 . Si passa alla fase II, con tableau

	\hat{x}_1	x_2	x_3	x_4	\bar{b}
$-z$	-2	-3	7	0	0
	0	1	-3/4	-1/4	3/4
	1	0	-1/4	1/4	13/4

Passo alla forma canonica

	\hat{x}_1	x_2	x_3	x_4	\bar{b}
$-z$	0	-3	13/2	1/2	13/2
	0	1	-3/4	-1/4	3/4
	1	0	-1/4	1/4	13/4

	\hat{x}_1	x_2	x_3	x_4	\bar{b}
$-z$	0	0	17/4	-1/4	35/4
	0	1	-3/4	-1/4	3/4
	1	0	-1/4	1/4	13/4

e applico l'algoritmo del simplesso con regola di Bland:

	\hat{x}_1	x_2	x_3	x_4	\bar{b}
$-z$	4	0	1/2	0	12
	1	1	-1	0	4
	4	0	-1	1	13

Costi ridotti non negativi: riconosco la soluzione ottima $x_1 = -\hat{x}_1 = 0; x_2 = 4; x_3 = 0; x_4 = 13; z_{MAX} = -z = -(-12) = 12$.

3. Si scrive il duale:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 2 u_1 + 4 u_2 - 3 u_3 \\
 s.t. \quad & -u_1 + 2 u_2 \geq -1 \\
 & -3 u_1 + 2 u_2 - 4 u_3 \leq -3 \\
 & u_1 + 3 u_2 \leq -2 \\
 & u_1 \leq 0 \quad u_3 \geq 0 \quad u_2 \text{ libera}
 \end{aligned}$$

I valori indicati per le variabili primali sono in linea con i domini ($x_1 = -41/20 < 0$, $x_2 = 3/4 > 0$ e $x_3 = 11/5 > 0$) e rispettano i vincoli primali. In particolare, tutti i vincoli sono rispettati all'uguaglianza. La soluzione proposta è quindi *ammissibile*. Le condizioni di complementarità primale-duale sono le seguenti:

$$x_1 - 3 x_2 + x_3 = 2 \leq 2 \Rightarrow \text{nessuna informazione su } u_1$$

$$-4 x_2 = -3 \geq -3 \Rightarrow \text{nessuna informazione su } u_3$$

$$x_1 < 0 \Rightarrow -u_1 + 2 u_2 = -1$$

$$x_2 > 0 \Rightarrow -3 u_1 + 2 u_2 - 4 u_3 = -3$$

$$x_3 > 0 \Rightarrow u_1 + 3 u_2 = -2$$

Nota: il secondo vincolo primale è di uguaglianza, quindi nessuna condizione può avere tale vincolo come condizione sufficiente (quindi, nessuna informazione su u_2).

Si ha quindi il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} u_1 + 2 u_2 = -1 \\ -3 u_1 + 2 u_2 - 4 u_3 = -3 \\ u_1 + 3 u_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = -1/5 \\ u_2 = -3/5 \\ u_3 = 3/5 \end{cases}$$

La soluzione duale ottenuta è ammissibile (i vincoli sono rispettati all'uguaglianza, per costruzione e i valori sono nei domini corretti) e in scarti complementari con la soluzione primale data (per costruzione). Abbiamo quindi una soluzione ammissibile primale e una soluzione ammissibile duale che soddisfano le condizioni di complementarità primale-duale e, pertanto, tali soluzioni sono ottime. PER VERIFICA dei calcoli, noto anche che i valori delle funzioni obiettivo sono entrambe $-23/5$, a ULTERIORE conferma dell'ottimalità delle due soluzioni.

4. Le condizioni sono: esiste (almeno) una colonna con costo ridotto negativo e restanti valori non positivi (negativi o nulli). Per la giustificazione (da includere ai fini della risposta all'esame) si veda la teoria sulle dispense o sul libro di testo (si basa sulla possibilità di far entrare la variabile relativa alla colonna citata facendole assumere un valore positivo arbitrario senza perdere l'ammissibilità della nuova soluzione, facendo così arbitrariamente diminuire il valore della funzione obiettivo).
5. Si dà una traccia delle possibili risposte. Per argomentazioni più rigorose, si vedano le dispense.
 - (a) SI, il numero di iterazioni è corretto. Infatti, l'algoritmo di Bellman-Ford è in grado di determinare, ad ogni iterazione \bar{h} , la lunghezza del cammino minimo con al più \bar{h} archi. Siccome un cammino minimo, in assenza di cicli negativi, contiene al più $n - 1$ archi (dove n è il numero di nodi, nel caso 5) sono sufficienti 5 iterazioni per verificare se le etichette dei nodi (lunghezze dei cammini minimi) si stabilizzano e rimangono quelle con 4 archi (non esistono cicli negativi) o se cambiano (esistono cicli negativi).
 - (b) Per quanto detto sopra, esiste un ciclo negativo. In particolare, seguendo a ritroso i puntatori a partire dal nodo 2, che ha cambiato etichetta all'ultima iterazione, si ottiene il ciclo $2 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2$ (di costo -1).
 - (c) Per quanto detto sopra, bisogna considerare le etichette e i puntatori all'iterazione $h = 3$, ottenendo il cammino $1 \rightarrow 2$ di costo 2.
 - (d) Anche se esiste un ciclo negativo, il fatto di imporre un limite al numero di archi rende possibile trovare un cammino minimo. Infatti, basta considerare la ripetizione del ciclo negativo un numero massimo di volte, per non oltrepassare il numero di archi imposto. Nel nostro caso, per quanto detto sopra, è facile ottenere il *costo* del cammino minimo da 1 a 2 con al più cinque archi: basta guardare le etichette all'iterazione $h = 5$ e ottenere costo pari a 1. Per il cammino, osserviamo che il "cammino" $1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2$ contiene non più di 5 archi (esattamente 5 archi, nel caso) e costa $2 - 1 = 1$ ed è quindi un cammino minimo con al più 5 archi.
6. Si dà una traccia delle possibili risposte. Per argomentazioni più rigorose, si vedano le dispense. Nota: non si fa menzione di interezza dei coefficienti in funzione obiettivo, quindi non si può procedere ad arrotondamenti di alcun genere.
 - (a) Osserviamo che la migliore soluzione ammissibile a disposizione è pari a 34.0 (nodo P_2). Quindi i nodi P_4 e P_6 possono essere chiusi perché il loro lower bound non è minore di 34.0: si tratta di nodi non miglioranti.
 - (b) Il miglior valore che possiamo sperare per la funzione obiettivo è il più piccolo lower bound tra i nodi aperti (a questo punto P_3 e P_5). Quindi non possiamo

fare meglio di 32.6. Inoltre, abbiamo già una soluzione ammissibile che vale 34.0, quindi l'ottimo non potrà essere più alto di 34.0. L'ottimo della funzione obiettivo è quindi sicuramente compreso nell'intervallo $[32.6; 34.0]$