Produzione e forza lavoro

Testo

Un'azienda produce i modelli I, II e III di un certo prodotto a partire dai materiali grezzi A e B, di cui sono disponibili 4000 e 6000 unità, rispettivamente. In particolare, ogni unità del modello I richiede 2 unità di A e 4 di B; un'unità del modello II richiede 3 unità di A e 2 di B; ogni unità del modello III richiede 5 unità di A e 7 di B. Il modello I richiede una forza lavoro doppia rispetto al modello II e tripla rispetto al modello III. La forza lavoro disponibile è in grado di produrre al massimo l'equivalente di 700 unità del modello I. Il settore marketing dell'azienda ha reso noto che la domanda minima per ciascun modello è rispettivamente di 200, 200 e 150 unità, al prezzo di 30, 20 e 50 euro. Si vuole massimizzare il profitto totale.

Formulazione

Variabili decisionali

- $x_i : i \in \{I, II, III\}$: quantità prodotta del modello i.

Modello

$$\max z = 30x_I + 20x_{II} + 50x_{III}$$

$s.t.$

$x_I \geq 200$ (vincoli sulla domanda)

$x_{II} \geq 200$

$x_{III} \geq 150$

$2x_I + 3x_{II} + 5x_{III} \leq 4000$ (vincoli sui materiali)

$4x_I + 2x_{II} + 7x_{III} \leq 6000$

$x_I + \frac{1}{2}x_{II} + \frac{1}{3}x_{III} \leq 700$ (vincoli sulla forza lavoro)

$x_i \in \mathbb{Z}_+, \forall i \in \{I, II, III\}$ (dominio)

Produzione e capacità eccedente

Testo

Una società ha tre impianti con capacità produttiva eccedente. Tutti e tre gli impianti sono in grado di produrre schiume di lattice e si è deciso di sfruttare in questo modo la capacità produttiva in eccesso. Le schiume possono essere realizzate in tre diverse densità (bassa, media e alta) che forniscono un profitto netto unitario di 9, 10 e 12 euro. Gli stabilimenti 1, 2 e 3 hanno manodopera e capacità produttiva in eccesso per produrre 500, 600 e 300 quintali al giorno, indipendentemente dalla densità delle schiume. Comunque, la disponibilità dello spazio destinato all'immagazzinamento durante il processo produttivo limita la produzione. Gli stabilimenti 1, 2 e 3 hanno, rispettivamente, 900, 800 e 350 mq di magazzino disponibile per questo prodotto. Ogni quintale di schiuma prodotta al giorno in densità bassa, media o alta richiede 2, 1.5 e 1 mq, rispettivamente. Le previsioni di vendita indicano che si possono vendere al massimo 600, 800 e 500 quintali delle schiume di densità bassa, media e alta, rispettivamente. I sindacati hanno chiesto di mantenere un carico di lavoro uniforme e la direzione ha concordato che sarà utilizzata la medesima percentuale della capacità produttiva in eccesso. La direzione ci chiede di determinare come suddividere la produzione per massimizzare il profitto totale.

Formulazione

Variabili decisionali

- x_{ij} : $i \in \{1,2,3\}, j \in \{b,m,a\}$: quantità di schiuma di densità j prodotta nello stabilimento i.

Modello

$$\max z = 9(x_{1b} + x_{2b} + x_{3b}) + 10(x_{1m} + x_{2m} + x_{3m}) + 12(x_{1a} + x_{2a} + x_{3a})$$

s.t.

$$\begin{aligned}
&x_{1b} + x_{1m} + x_{1a} \leq 500 \quad \text{(disponibilità manodopera)}\\
&x_{2b} + x_{2m} + x_{2a} \leq 600\\
&x_{3b} + x_{3m} + x_{3a} \leq 300
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&2x_{1b} + 1.5x_{1m} + 1x_{1a} \leq 900 \quad \text{(disponibilità magazzini)}\\
&2x_{2b} + 1.5x_{2m} + 1x_{2a} \leq 800\\
&2x_{3b} + 1.5x_{3m} + 1x_{3a} \leq 350
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&x_{1b} + x_{2b} + x_{3b} \leq 600 \quad \text{(previsioni di vendita)}\\
&x_{1m} + x_{2m} + x_{3m} \leq 800\\
&x_{1a} + x_{2a} + x_{3a} \leq 500
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{500}(x_{1b} + x_{1m} + x_{1a}) = \frac{1}{600}(x_{2b} + x_{2m} + x_{2a}) \quad \text{(uniformità del}\\
&\frac{1}{500}(x_{1b} + x_{1m} + x_{1a}) = \frac{1}{300}(x_{3b} + x_{3m} + x_{3a}) \quad \text{carico di lavoro)}
\end{aligned}$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}_+, \forall\, i \in \{1,2,3\},\ j \in \{b,m,a\} \quad \text{(dominio)}$$

Piani di investimento

Testo

Un finanziere ha due piani di investimento A e B disponibili all'inizio di ciascuno dei prossimi cinque anni. Ogni euro investito in A all'inizio di ogni anno garantisce, due anni più tardi, un profitto di 0,4 euro (e può essere immediatamente reinvesito). Ogni euro investito in B all'inizio di ogni anno dà, tre anni dopo, un profitto di 0,7 euro. In più, da un certo momento in avanti, sarà possibile sfruttare anche i piani di investimento C e D. Ogni euro investito in C all'inizio del secondo anno raddoppierà dopo 4 anni. Ogni euro investito in D all'inizio del quinto anno darà un profitto di 0,3 euro l'anno successivo. Anche per i piani B, C e D vale la possibilità di reinvestimento, come per il piano A. Il finanziere ha a disposizione 10000 euro e vuole sapere quale piano di investimento massimizza il capitale posseduto all'inizio del sesto anno.

Formulazione

Variabili decisionali

- $x_{ij} : i \in \{A, B, C, D\}, j \in \{1..5\}$: capitale investito in euro investito nel piano i nell'anno j. Non sono considerate le variabili x_{A5}, x_{B4}, x_{B5}, x_{C1}, x_{C3}, x_{C4}, x_{C5}, x_{D1}, x_{D2}, x_{D3} e x_{D4}, corrispondenti a piani di investimento non disponibili o a investimenti che non rientrerebbero entro l'inizio del sesto anno.

Modello

$$
\begin{aligned}
10000 + \max 0.4(&x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}) + \\
&+0.7(x_{B1} + x_{B2} + x_{B3}) + x_{C2} + 0.3x_{D5}
\end{aligned}
$$

$s.t.$

$$
\begin{aligned}
& x_{A1} + x_{B1} \leq 10000 \quad \text{(anno 1)} \\
& x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} \leq 10000 - x_{A1} - x_{B1} \quad \text{(anno 2)} \\
& x_{A3} + x_{B3} \leq 10000 + 0.4x_{A1} - x_{B1} - x_{A2} - x_{B2} - x_{C2} \quad \text{(anno 3)} \\
& x_{A4} \leq 10000 + 0.4x_{A1} + 0.7x_{B1} + 0.4x_{A2} - x_{B2} - x_{C2} - x_{A3} - x_{B3} \quad \text{(anno 4)} \\
& x_{D5} \leq 10000 + 0.4x_{A1} + 0.7x_{B1} + 0.4x_{A2} + 0.7x_{B2} + 0.4x_{A3} + \\
& \qquad -x_{C2} - x_{B3} - x_{A4} \quad \text{(anno 5)}
\end{aligned}
$$

$$
x_{ij} \in \mathbb{R}_+, \forall\, i \in \{A, B, C, D\},\ j \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \text{(dominio)}
$$

Produzione su più linee

Testo

Un mangime è ottenuto miscelando tre componenti che possono essere lavorate su quattro linee di produzione differenti. Ogni linea è dotata di una limitata capacità di ore di lavorazione e una diversa produttività (unità di componente per ogni ora), come indicato nella seguente tabella:

Linea	Capacità	Produttività		
		componente 1	componente 2	componente 3
1	100	10	15	5
2	150	15	10	5
3	80	20	5	10
4	200	10	15	20

Si vuole determinare il numero di ore di lavorazione di ciascuna componente su ciascuna linea di produzione in modo da massimizzare la quantità di mangime complessivamente prodotta.

Formulazione

Variabili decisionali

Nota - La quantità di mangime completata è condizionata dalla componente disponibile nella minore quantità. Se indichiamo con p_j la quantità di componente j prodotta complessivamente dalle 4 linee, la quantità di mangime ottenibile per miscelazione è il minimo tra p_1, p_2 e p_3. Di conseguenza, la funzione obiettivo prende la forma

$\max \min\{p_1, p_2, p_3\}$

che **non** è lineare, ma è facilmente linearizzabile con l'aggiunta di una variabile y. Le variabili sono quindi le seguenti:

- $x_{ij} : i \in \{1..4\}, j \in \{1..3\}$: numero di ore di lavorazione della componente j sulla linea di lavorazione i.
- y: variabile di comodo per la linearizzazione della funzione obiettivo di tipo max-min.

Modello

$$z = \max y$$

$$s.t.$$

$$y \leq 10x_{11} + 15x_{21} + 20x_{31} + 10x_{41} \quad \text{(componente 1 disponibile)}$$
$$y \leq 15x_{12} + 10x_{22} + 5x_{32} + 15x_{42} \quad \text{(componente 2 disponibile)}$$
$$y \leq 5x_{13} + 5x_{23} + 10x_{33} + 20x_{43} \quad \text{(componente 3 disponibile)}$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 100 \quad \text{capacità oraria delle linee}$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 150$$
$$x_{31} + x_{42} + x_{53} \leq 80$$
$$x_{31} + x_{42} + x_{53} \leq 200$$

$$x_{ij} \in \mathbb{R}_+, \forall\, i \in \{1..4\},\ j \in \{1,2,3\} \quad \text{(dominio)}$$

Schedulazione just-in-time

Testo

Un server computazionale deve pianificare l'esecuzione di cinque batch su di una macchina mono-processore. I batch durano rispettivamente 5, 7, 4, 7 e 10 minuti. La sequenza di esecuzione 1-2-3-4-5 è data e non ci può essere sovrapposizione temporale tra i batch. Il primo batch ha come ora di consegna desiderata le 10.32, il secondo le 10.38, il terzo le 10.42, il quarto le 10.52 e il quinto le 10.57. La consegna dei batch elaborati deve essere il più puntuale possibile: si paga una penale di 750 euro per ogni minuto di anticipo o ritardo nella consegna. Organizzare i tempi di esecuzione (al minuto) per minimizzare la penale totale.

Formulazione

Variabili decisionali

Nota - La decisione riguarda l'ora in cui far finire ciascun batch o, equivalentemente, l'ora di inizio. Essendo l'ora non facilmente trattabile con gli operatori di somma e prodotto, trasformiamo tali variabili in minuti, facendo stabilire al modello il minuto dopo le 10:00 nel quale un batch deve essere preso in carico dalla macchina. Le variabili sono quindi le seguenti:

- $i_j : j \in \{1..5\}$: minuto dopo le 10:00 nel quale la macchina inizia il batch j.
- y_j: minuti di anticipo/ritardo del job j.

Notare inoltre che, se i_j è il minuto di inizio del job j, p_j la sua durata e d_j il minuto di consegna desiderato, allora la penalità associata al job j è $y_j = |i_j + p_j - d_j|$ (la funzione obiettivo è del tipo "min-abs"). Ovviamente, anche le ore di consegna desiderata devo essere espresse come "minuti dopo le 10.00" (ad es. le 10:32 sono espresse come 32).

Modello

$$\min z = 750(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5)$$

$$s.t.$$

$$y_1 \geq i_1 + 5 - 32 \quad \text{(linearizzazione dei valori assolulti)}$$
$$y_1 \geq 32 - 5 - i_j$$
$$y_2 \geq i_2 + 7 - 38 \qquad y_2 \geq 38 - 7 - i_2$$
$$y_3 \geq i_3 + 4 - 42 \qquad y_3 \geq 42 - 4 - i_3$$
$$y_4 \geq i_4 + 7 - 52 \qquad y_4 \geq 52 - 7 - i_4$$
$$y_5 \geq i_5 + 10 - 57 \qquad y_5 \geq 57 - 10 - i_5$$

$$i_2 \geq i_1 + 5 \quad \text{(precedenza e non sovrapposizione tra i batch)}$$
$$i_3 \geq i_2 + 7$$
$$i_3 \geq i_2 + 4$$
$$i_3 \geq i_2 + 7$$

$$i_j \in \mathbb{Z}_+, \forall\, j \in \{1..5\} \quad \text{(dominio)}$$