

# Ricerca Operativa

## 2. Modelli di Programmazione Lineare

### Modelli di programmazione lineare

- Il metodo grafico è basato su
  - ⇒ **linearità** della funzione obiettivo
  - ⇒ **linearità** dei vincoli
- Sotto queste ipotesi (come vedremo meglio in seguito), una soluzione si trova su un vertice della regione ammissibile: l'ultimo toccato traslando le rette isoprofitto nella direzione del gradiente
- Si parla in questi casi di **modelli di programmazione lineare (PL)**

## Formulazione generale di un modello di Programmazione Lineare

$$\min (\max) z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_jx_j + \dots + c_nx_n (+cost.)$$

subject to (s.t., soggetto a, s.a)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n \geq (=, \leq) b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n \geq (=, \leq) b_2$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n \geq (=, \leq) b_m$$

$$x_j \in \mathcal{N}_{(+)} (x_j \text{ intere})$$

$z$  : funzione obiettivo da minimizzare (min) o massimizzare (max)

$x_j$  : variabili decisionali (incognite)

reali (eventualmente non negative)

interi (eventualmente non negative)

binarie ( $x_j \in \{0,1\}$ )

} Programmazione  
lineare intera (PLI)

$c_j$  : coefficienti di costo (min) o profitto (max) [costante nota]

$a_{ij}$  : coefficienti tecnologici [costante nota]

$b_i$  : termini noti [costante nota]

## CAVEAT!!!

In questo corso si richiedono

### MODELLI LINEARI

le variabili, di qualsiasi natura esse siano, possono essere solo moltiplicate per una costante e sommate tra loro. **E basta!!!**

## Il “gioco”

Per l'assemblaggio di telefonini, si hanno a disposizione 10 moduli display, 18 moduli di memoria, 12 moduli di trasmissione, 21 tastierini, 9 moduli di navigazione e 10 microcamere. I telefonini sono di due tipi. Il tipo A richiede un display, un modulo di navigazione, 2 tastierini, 2 moduli di memoria, un modulo di trasmissione e una microcamera. Il tipo B richiede 2 display, 3 tastierini, 2 moduli di memoria e 3 moduli di trasmissione. Considerando che il tipo A permette un guadagno netto di 3 euro e il tipo B di 8 euro, determinare la produzione che massimizza il guadagno.

## Modello PLI

Siano  $x_A$  e  $x_B$  le quantità di telefoni di tipo A e B

$$\max 3 x_A + 8 x_B \quad (\text{guadagno complessivo})$$

s.t.

$$x_A + 2 x_B \leq 10 \quad (\text{display})$$

$$x_A \leq 9 \quad (\text{navigazione})$$

$$2 x_A + 3 x_B \leq 21 \quad (\text{tastierini})$$

$$2 x_A + 2 x_B \leq 18 \quad (\text{memoria})$$

$$x_A + 3 x_B \leq 12 \quad (\text{trasmissione})$$

$$x_A \leq 10 \quad (\text{microcamere})$$

$$x_A, x_B \in \mathbb{Z}_+$$

**Esercizio: risolvere il problema graficamente**

## Dieta economica

Un dietologo deve preparare una dieta che garantisca un apporto giornaliero di proteine, ferro e calcio di almeno 20 mg, 30 mg e 10 mg, rispettivamente. Il dietologo è orientato su cibi a base di verdura (5 mg/kg di proteine, 6 mg/Kg di ferro e 5 mg/Kg di calcio, al costo di 4 €/Kg), carne (15 mg/kg di proteine, 10 mg/Kg di ferro e 3 mg/Kg di calcio, al costo di 10 €/Kg) e frutta (4 mg/kg di proteine, 5 mg/Kg di ferro e 12 mg/Kg di calcio, al costo di 7 €/Kg). Determinare la dieta di costo minimo.

## Modello PL

- Siano  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  le quantità di cibi a base di verdura, carne e frutta, rispettivamente

$$\min \quad 4x_1 + 10x_2 + 7x_3 \quad (\text{costo giornaliero dieta})$$

s.t.

$$5x_1 + 15x_2 + 4x_3 \geq 20 \quad (\text{proteine})$$

$$6x_1 + 10x_2 + 5x_3 \geq 30 \quad (\text{ferro})$$

$$5x_1 + 3x_2 + 12x_3 \geq 10 \quad (\text{calcio})$$

$$x_i \in \mathcal{R}_+, \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

## Indagine di mercato

Un'azienda pubblicitaria deve svolgere un'indagine di mercato per lanciare un nuovo prodotto. Si deve contattare telefonicamente un campione significativo di persone: almeno 150 donne sposate, almeno 110 donne non sposate, almeno 120 uomini sposati e almeno 100 uomini non sposati. Le telefonate possono essere effettuate al mattino (al costo operativo di 1.1 euro) o alla sera (al costo di 1.6 euro). Le percentuali di persone mediamente raggiunte sono riportate in tabella.

	Mattino	Sera
Donne sposate	30%	30%
Donne non sposate	10%	20%
Uomini sposati	10%	30%
Uomini non sposati	10%	15%
Nessuno	40%	5%

Si noti come le telefonate serali sono più costose, ma permettono di raggiungere un maggior numero di persone: solo il 5% va a vuoto. Si vuole minimizzare il costo complessivo delle telefonate da effettuare (mattina/sera) in modo da raggiungere un campione significativo di persone

## Modello PLI

- Siano  $x_1$  e  $x_2$  il numero di telefonate da fare al mattino e alla sera, rispettivamente

$$\min \quad 1.1 x_1 + 1.6 x_2 \quad (\text{costo totale telefonate})$$

s.t.

$$0.3x_1 + 0.3x_2 \geq 150 \quad (\text{donne sposate})$$

$$0.1x_1 + 0.2x_2 \geq 110 \quad (\text{donne non sposate})$$

$$0.1x_1 + 0.3x_2 \geq 120 \quad (\text{uomini sposati})$$

$$0.1x_1 + 0.15x_2 \geq 100 \quad (\text{uomini non sposati})$$

$$x_i \in \mathbb{Z}_+, \quad \forall i \in \{1, 2\}$$

## Trasporto di frigoriferi

Una ditta di produzione di elettrodomestici produce dei frigoriferi in tre stabilimenti e li smista in quattro magazzini intermedi di vendita. La produzione settimanale nei tre stabilimenti A, B e C è rispettivamente di 50, 70 e 20 unità. La quantità richiesta dai 4 magazzini è rispettivamente di 10, 60, 30 e 40 unità. I costi per il trasporto di un frigorifero tra gli stabilimenti e i magazzini 1, 2, 3 e 4 sono i seguenti:

- dallo stabilimento A: 6, 8, 3, 4 euro;
- dallo stabilimento B: 2, 3, 1, 3 euro;
- dallo stabilimento C: 2, 4, 6, 5 euro.

La ditta vuole determinare il piano di trasporti di costo minimo.

## Modello PLI

- Sia  $x_{ij}$  il numero di frigoriferi prodotti nello stabilimento  $i$  e smistati nel magazzino  $j$

$$\begin{aligned} \min \quad & 6x_{A1} + 8x_{A2} + 3x_{A3} + 4x_{A4} + \\ & + 2x_{B1} + 3x_{B2} + 1x_{B3} + 3x_{B4} + \\ & + 2x_{C1} + 4x_{C2} + 6x_{C3} + 5x_{C4} \end{aligned}$$

s.t.

$$\begin{aligned} x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4} &\leq 50 && \text{(capacità produttiva stabilimento A)} \\ x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4} &\leq 70 && \text{(capacità produttiva stabilimento B)} \\ x_{C1} + x_{C2} + x_{C3} + x_{C4} &\leq 20 && \text{(capacità produttiva stabilimento C)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{A1} + x_{B1} + x_{C1} &\geq 10 && \text{(domanda magazzino 1)} \\ x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} &\geq 60 && \text{(domanda magazzino 2)} \\ x_{A3} + x_{B3} + x_{C3} &\geq 30 && \text{(domanda magazzino 3)} \\ x_{A4} + x_{B4} + x_{C4} &\geq 40 && \text{(domanda magazzino 4)} \end{aligned}$$

$$x_{ij} \in Z_+, \quad \forall i \in \{A, B, C\}, j \in \{1, 2, 3, 4\}$$

## Turni in ospedale

Si vogliono organizzare i turni degli infermieri in ospedale. Ogni infermiere lavora 5 giorni consecutivi, indipendentemente da come sono collocati all'interno della settimana, e poi ha diritto a due giorni consecutivi di riposo. Le esigenze di servizio per i vari giorni della settimana richiedono la presenza di 17 infermieri il lunedì, 13 il martedì, 15 il mercoledì, 19 il giovedì, 14 il venerdì, 16 il sabato e 11 la domenica. Organizzare il servizio in modo da minimizzare il numero totale di infermieri da impegnare.

## Modello PLI

- Siano *lun*, *mar*, *mer*, *gio*, *ven*, *sab* e *dom* il numero di infermieri in cui turno inizia di lunedì,... domenica

$$\min \quad \textit{lun} + \textit{mar} + \textit{mer} + \textit{gio} + \textit{ven} + \textit{sab} + \textit{dom}$$

s.t.

$$\textit{lun} + \textit{gio} + \textit{ven} + \textit{sab} + \textit{dom} \geq 17 \text{ (presenze lunedì)}$$

$$\textit{lun} + \textit{mar} + \textit{ven} + \textit{sab} + \textit{dom} \geq 13 \text{ (presenze martedì)}$$

$$\textit{lun} + \textit{mar} + \textit{mer} + \textit{sab} + \textit{dom} \geq 15 \text{ (presenze mercoledì)}$$

$$\textit{lun} + \textit{mar} + \textit{mer} + \textit{gio} + \textit{dom} \geq 19 \text{ (presenze giovedì)}$$

$$\textit{lun} + \textit{mar} + \textit{mer} + \textit{gio} + \textit{ven} \geq 14 \text{ (presenze venerdì)}$$

$$\textit{mar} + \textit{mer} + \textit{gio} + \textit{ven} + \textit{sab} \geq 16 \text{ (presenze sabato)}$$

$$\textit{mer} + \textit{gio} + \textit{ven} + \textit{sab} + \textit{dom} \geq 11 \text{ (presenze domenica)}$$

$$\textit{lun}, \textit{mar}, \textit{mer}, \textit{gio}, \textit{ven}, \textit{sab}, \textit{dom} \in \mathbb{Z}_+$$

## Localizzazione di servizi

Una città è divisa in sei quartieri, dove si vogliono attivare dei centri unificati di prenotazione (CUP) per servizi sanitari. In ciascun quartiere è stata individuata una possibile località di apertura. Le distanze medie in minuti da ciascun quartiere a ciascuna delle possibili località è indicata in tabella. Si desidera che nessun utente abbia un tempo medio di spostamento superiore a 15 minuti per arrivare al CUP più vicino e si vuole minimizzare il numero di CUP attivati.

	Loc. 1	Loc. 2	Loc. 3	Loc. 4	Loc. 5	Loc. 6
Q.re 1	5	10	20	30	30	20
Q.re 2	10	5	25	35	20	10
Q.re 3	20	25	5	15	30	20
Q.re 4	30	35	15	5	15	25
Q.re 5	30	20	30	15	5	14
Q.re 6	20	10	20	25	14	5

Luigi De Giovanni - Ricerca Operativa - 2. Modelli di Programmazione Lineare

2.15

## Modello PLI

Sia  $x_i = 1$ , se viene aperto il CUP nel quartiere  $i$ , 0 altrimenti

$$\min x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

s.t.

$$x_1 + x_2 \geq 1 \text{ (esigenze q.re 1)}$$

$$x_1 + x_2 + x_6 \geq 1 \text{ (esigenze q.re 2)}$$

$$x_3 + x_4 \geq 1 \text{ (esigenze q.re 3)}$$

$$x_3 + x_4 + x_5 \geq 1 \text{ (esigenze q.re 4)}$$

$$x_4 + x_5 + x_6 \geq 1 \text{ (esigenze q.re 5)}$$

$$x_2 + x_5 + x_6 \geq 1 \text{ (esigenze q.re 6)}$$

$$x_i \in \{0,1\}$$

Luigi De Giovanni - Ricerca Operativa - 2. Modelli di Programmazione Lineare

2.16



## Altri modelli

- Mix ottimo di produzione:
  - Produzione e forza lavoro
  - Produzione e capacità eccedente
  - *Produzione di salumi (libro di testo)*
- Multiperiodali
  - Piano di investimento
  - *Produzione di radio (libro di testo)*

## Min-max, max-min e min-abs

$$\min \max \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

$$\begin{aligned} \min y \\ y &\geq e_1 \\ y &\geq e_2 \\ &\dots \\ y &\geq e_n \end{aligned}$$

$$\max \min \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

$$\begin{aligned} \max y \\ y &\leq e_1 \\ y &\leq e_2 \\ &\dots \\ y &\leq e_n \end{aligned}$$

$$\min |e| \equiv \min \max \{e, -e\}$$

$$\begin{aligned} \min y \\ y &\geq e \\ y &\geq -e \end{aligned}$$

Esempi:

- Produzione su più linee
- Schedulazione just-in-time