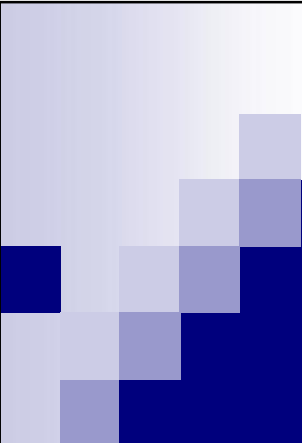




Ricerca Operativa

2. Modelli di Programmazione Lineare - TESTI



Modelli di programmazione lineare

- Il metodo grafico è basato su
 - ⇒ **linearità** della funzione obiettivo
 - ⇒ **linearità** dei vincoli
- Sotto queste ipotesi (come vedremo meglio in seguito), una soluzione si trova su un vertice della regione ammissibile: l'ultimo toccato traslando le rette isoprofitto nella direzione del gradiente
- Si parla in questi casi di **modelli di programmazione lineare (PL)**

Formulazione generale di un modello di Programmazione Lineare

$$\min (\max) z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_jx_j + \dots + c_nx_n (+cost.)$$

subject to (s.t., soggetto a, s.a)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n \geq (=, \leq) b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n \geq (=, \leq) b_2$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n \geq (=, \leq) b_m$$

$$x_j \in \neg_{(+)} (x_j \text{ intere})$$

z : funzione obiettivo da minimizzare (min) o massimizzare (max)

x_j : variabili decisionali (incognite)

reali (eventualmente non negative)

interi (eventualmente non negative)

binarie ($x_j \in \{0,1\}$)

} Programmazione
lineare intera (PLI)

c_j : coefficienti di costo (min) o profitto (max) [costante nota]

a_{ij} : coefficienti tecnologici [costante nota]

b_i : termini noti [costante nota]

Luigi De Giovanni - Ricerca Operativa - 2. Modelli di Programmazione Lineare

2.3

CAVEAT!!!

In questo corso si richiedono

MODELLI LINEARI

le variabili, di qualsiasi natura esse siano, possono essere solo moltiplicate per una costante e sommate tra loro. **E basta!!!**

Luigi De Giovanni - Ricerca Operativa - 2. Modelli di Programmazione Lineare

2.4

Il “gioco”

Per l'assemblaggio di telefonini, si hanno a disposizione 10 moduli display, 18 moduli di memoria, 12 moduli di trasmissione, 21 tastierini, 9 moduli di navigazione e 10 microcamere. I telefonini sono di due tipi. Il tipo A richiede un display, un modulo di navigazione, 2 tastierini, 2 moduli di memoria, un modulo di trasmissione e una microcamera. Il tipo B richiede 2 display, 3 tastierini, 2 moduli di memoria e 3 moduli di trasmissione. Considerando che il tipo A permette un guadagno netto di 3 euro e il tipo B di 8 euro, determinare la produzione che massimizza il guadagno.

Modello PLI

Siano x_A e x_B le quantità di telefoni di tipo A e B

$$\max 3 x_A + 8 x_B \quad (\text{guadagno complessivo})$$

s.t.

$$\begin{array}{rcll} x_A + 2 x_B & \leq & 10 & (\text{display}) \\ x_A & \leq & 9 & (\text{navigazione}) \\ 2 x_A + 3 x_B & \leq & 21 & (\text{tastierini}) \\ 2 x_A + 2 x_B & \leq & 18 & (\text{memoria}) \\ x_A + 3 x_B & \leq & 12 & (\text{trasmissione}) \\ x_A & \leq & 10 & (\text{microcamere}) \end{array}$$

$$x_A, x_B \in \mathbb{Z}_+$$

Esercizio: risolvere il problema graficamente

Dieta economica

Un dietologo deve preparare una dieta che garantisca un apporto giornaliero di proteine, ferro e calcio di almeno 20 mg, 30 mg e 10 mg, rispettivamente. Il dietologo è orientato su cibi a base di verdura (5 mg/kg di proteine, 6 mg/Kg di ferro e 5 mg/Kg di calcio, al costo di 4 €/Kg), carne (15 mg/kg di proteine, 10 mg/Kg di ferro e 3 mg/Kg di calcio, al costo di 10 €/Kg) e frutta (4 mg/kg di proteine, 5 mg/Kg di ferro e 12 mg/Kg di calcio, al costo di 7 €/Kg). Determinare la dieta di costo minimo.

Luigi De Giovanni - Ricerca Operativa - 2. Modelli di Programmazione Lineare

2.7

Modello PL

Luigi De Giovanni - Ricerca Operativa - 2. Modelli di Programmazione Lineare

2.8

Indagine di mercato

Un'azienda pubblicitaria deve svolgere un'indagine di mercato per lanciare un nuovo prodotto. Si deve contattare telefonicamente un campione significativo di persone: almeno 150 donne sposate, almeno 110 donne non sposate, almeno 120 uomini sposati e almeno 100 uomini non sposati. Le telefonate possono essere effettuate al mattino (al costo operativo di 1.1 euro) o alla sera (al costo di 1.6 euro). Le percentuali di persone mediamente raggiunte sono riportate in tabella.

	Mattino	Sera
Donne sposate	30%	30%
Donne non sposate	10%	20%
Uomini sposati	10%	30%
Uomini non sposati	10%	15%
Nessuno	40%	5%

Si noti come le telefonate serali sono più costose, ma permettono di raggiungere un maggior numero di persone: solo il 5% va a vuoto. Si vuole minimizzare il costo complessivo delle telefonate da effettuare (mattina/sera) in modo da raggiungere un campione significativo di persone

Modello PLI

Trasporto di frigoriferi

Una ditta di produzione di elettrodomestici produce dei frigoriferi in tre stabilimenti e li smista in quattro magazzini intermedi di vendita. La produzione settimanale nei tre stabilimenti A, B e C è rispettivamente di 50, 70 e 20 unità. La quantità richiesta dai 4 magazzini è rispettivamente di 10, 60, 30 e 40 unità. I costi per il trasporto di un frigorifero tra gli stabilimenti e i magazzini 1, 2, 3 e 4 sono i seguenti:

- dallo stabilimento A: 6, 8, 3, 4 euro;
- dallo stabilimento B: 2, 3, 1, 3 euro;
- dallo stabilimento C: 2, 4, 6, 5 euro.

La ditta vuole determinare il piano di trasporti di costo minimo.

Modello PLI

Turni in ospedale

Si vogliono organizzare i turni degli infermieri in ospedale. Ogni infermiere lavora 5 giorni consecutivi, indipendentemente da come sono collocati all'interno della settimana, e poi ha diritto a due giorni consecutivi di riposo. Le esigenze di servizio per i vari giorni della settimana richiedono la presenza di 17 infermieri il lunedì, 13 il martedì, 15 il mercoledì, 19 il giovedì, 14 il venerdì, 16 il sabato e 11 la domenica. Organizzare il servizio in modo da minimizzare il numero totale di infermieri da impegnare.

Luigi De Giovanni - Ricerca Operativa - 2. Modelli di Programmazione Lineare

2.13

Modello PLI

Luigi De Giovanni - Ricerca Operativa - 2. Modelli di Programmazione Lineare

2.14

Localizzazione di servizi

Una città è divisa in sei quartieri, dove si vogliono attivare dei centri unificati di prenotazione (CUP) per servizi sanitari. In ciascun quartiere è stata individuata una possibile località di apertura. Le distanze medie in minuti da ciascun quartiere a ciascuna delle possibili località è indicata in tabella. Si desidera che nessun utente abbia un tempo medio di spostamento superiore a 15 minuti per arrivare al CUP più vicino e si vuole minimizzare il numero di CUP attivati.

	Loc. 1	Loc. 2	Loc 3	Loc. 4	Loc. 5	Loc. 6
Q.re 1	5	10	20	30	30	20
Q.re 2	10	5	25	35	20	10
Q.re 3	20	25	5	15	30	20
Q.re 4	30	35	15	5	15	25
Q.re 5	30	20	30	15	5	14
Q.re 6	20	10	20	25	14	5

Luigi De Giovanni - Ricerca Operativa - 2. Modelli di Programmazione Lineare

2.15

Modello PLI

Luigi De Giovanni - Ricerca Operativa - 2. Modelli di Programmazione Lineare

2.16

Altri modelli

- Mix ottimo di produzione:
 - Produzione e forza lavoro
 - Produzione e capacità eccedente
 - *Produzione di salumi (libro di testo)*
- Multiperiodali
 - Piano di investimento
 - *Produzione di radio (libro di testo)*

Min-max, max-min e min-abs

$$\min \max \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

$$\begin{aligned} \min y \\ y &\geq e_1 \\ y &\geq e_2 \\ &\dots \\ y &\geq e_n \end{aligned}$$

$$\max \min \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

$$\begin{aligned} \max y \\ y &\leq e_1 \\ y &\leq e_2 \\ &\dots \\ y &\leq e_n \end{aligned}$$

$$\min |e| \equiv \min \max \{e, -e\}$$

$$\begin{aligned} \min y \\ y &\geq e \\ y &\geq -e \end{aligned}$$

Esempi:

- Produzione su più linee
- Schedulazione just-in-time