Modelli con vincoli di tipo logico

Le variabili decisionali possono essere soggette a vincoli di tipo logico, più o meno espliciti. Ad esempio:

- vincoli di incompatibilità tra varie alternative: *se* localizziamo un'antenna in certo sito, *allora* non possiamo installarne altre in altri siti che provocherebbero interferenze;
- investimenti con costi fissi: *se* la dimensione dell'investimento è maggiore di 0, *allora* si paga un costo fisso;
- vincoli di copertura: *se* vogliamo servire un certo quartiere, *allora* dobbiamo aprire almeno un centro unificato di prenotazione in un certo insieme;
- possiamo avere clienti a Torino *solo se* abbiamo un rapresentante in Italia;
- bisogna attivare un numero massimo di alternative;
- etc. etc.

In questi casi introduciamo delle *variabili logiche* il cui dominio è limitato ai soli due valori 0 e 1 (variabili binarie) e il cui valore è in relazione con il valore di altre variabili. Ricordiamo che vogliamo (dobbiamo) rappresentare *tutti* i vincoli in modo lineare, anche i vincoli che coinvolgono variabili logiche: dal punto di vista modellistico, le variabili logiche sono variabili come tutte le altre e, pertanto, possono essere combinate solo in modo *lineare*. Quindi, NON possiamo applicare alle variabili logiche gli operatori logici, o operatori linguistici ("if $y_1 = 0$ then $y_2 = 1$"), o moltiplicarle tra loro o per altre variabili: sarebbero tutte forme NON lineari.

Modelli con vincoli di tipo logico: esempi

Nota: y sono variabili logiche e x variabili di altro tipo (reali o intere).

SBAGLIATO formulazioni *NON LINEARI*!!!			**Corretto** Vincoli	Domini
if $x_1 > 0$ then $x_2 = 0$ and if $x_2 > 0$ then $x_1 = 0$	$nand(y_1, y_2)$	$x_1 x_2 = 0$ $y_1 y_2 = 0$	$x_1 \leq M y_1$ $x_2 \leq M y_2$ $y_1 + y_2 \leq 1$	$x_1, x_2 \geq 0$ $y_1, y_2 \in \{0, 1\}$ $(M \to \infty)$
if $x > 0$ then $y = 1$	$(x > 0) \to (y = 1)$	$x(1 - y) = 0$	$x \leq M y$	$x \geq 0, y \in \{0, 1\}$
$y_1 = 1$ or $y_2 = 1$	$y_1 \vee y_2$	$(1 - y_1)(1 - y_2) = 0$	$y_1 + y_2 \geq 1$	$y_1, y_2 \in \{0, 1\}$
$y_1 = 1$ and $y_2 = 1$	$y_1 \wedge y_2$	$y_1 y_2 = 1$	$y_1 + y_2 = 2$	$y_1, y_2 \in \{0, 1\}$
$y_1 = 1$ only if $y_2 = 1$	$y_1 \to y_2$	$y_1(1 - y_2) = 0$	$y_1 \leq y_2$	$y_1, y_2 \in \{0, 1\}$
$y_1 = 1$ only if $y_2 = 0$	$y_1 \to \overline{y_2}$	$y_1 y_2 = 0$	$y_1 \leq (1 - y_2)$	$y_1, y_2 \in \{0, 1\}$
$y_1 = 1$ xor $y_2 = 1$	$y_1 \neq y_2$		$y_1 + y_2 = 1$	$y_1, y_2 \in \{0, 1\}$
etc. etc. etc.			etc. etc. etc.	
Queste formulazioni sono semanticamente corrette ma **NON ACCETTABILI** in un modello di programmazione lineare			Queste formulazioni sono corrette a patto di - SPECIFICARE I DOMINI - ATTIVARE le var. logiche	

Localizzazione con costi fissi

Una catena delle Grande Distribuzione Organizzata (GDO) dispone di un budget W per l'apertura di nuovi ipermercati in Italia. Gli studi preliminari hanno individuato un insieme I di possibili localizzazioni. Per l'apertura di un ipermercato nella localizzazione i bisogna sostenere un costo fisso F_i (acquisto del terreno, oneri amministrativi etc.) e un costo variabile pari a C_i ogni 100 mq di ipermercato. Per ogni localizzazione, è prevista una dimensione massima U_i e, nel caso di apertura, una dimensione minima pari a L_i. Una volta aperto e entrato a regime, ciascun ipermercato localizzato in i produrrà entrate per R_i ogni 100 mq. Determinare l'insieme di localizzazioni in cui aprire dei nuovi ipermercati e dimensionare gli ipermercati stessi in modo da massimizzare i ricavi complessivi, tenendo conto che non possono essere aperti più di K ipermercati.

Variabili decisionali

- $x_i : i \in I$: dimensione in centinaia di mq dell'ipermercato localizzato in i;
- $y_i : i \in I$: **variabile logica (binaria)** legata all'apertura di un ipermercato nella localizzazione i, cioé:
$y_i = \begin{cases} 1, \text{ se viene aperto un ipermercato nella localizzazione } i \ (x_i > 0) \\ 0, \text{ altrimenti} \end{cases}$

Modello

$$\max \sum_{i \in I} R_i x_i$$

$$s.t.$$

$$\sum_{i \in I} C_i x_i + F_i y_i \leq W \qquad \text{(budget)}$$

$$x_i \leq U_i y_i \quad \forall\, i \in I \qquad \text{(dimensione massima / attivazione delle variabili binarie)}$$

$$x_i \geq L_i y_i \quad \forall\, i \in I \qquad \text{(dimensione minima dell'ipermercato)}$$

$$\sum_{i \in I} y_i \leq K \qquad \text{(numero massimo di ipermercati)}$$

$$x_i \in \mathbb{R}_+, y_i \in \{0, 1\}$$

Portfolio Optimization

Un cliente affida ad un'agenzia finanziaria 100 000 euro da impiegare in fondi di investimento. I fondi attualmente offerti dal mercato sono di cinque tipi, come riassunto in tabella:

Nome	**Tipo**	**Moody's rating**	**Durata (anni)**	**Rendita alla maturazione**
A	privato	Aa	9	4,5%
B	pubblico	A	15	5,4%
C	stato	Aaa	4	5,1%
D	stato	Baa	3	4,4%
E	privato	Ba	2	6,1%

Si sa che i fondi pubblici e dello stato sono tassati del 30% alla fine del periodo. Il cliente chiede di riservare almeno il 40% del capitale a fondi pubblici e dello stato e vuole che la durata media dell'investimento non superi i 5 anni.
Le regole del mercato impongono che l'investimento in C precluda la possibilità di investire in D, e viceversa. Inoltre, è possibile investire in E solo se si sono investiti almeno 10 000 euro in A. Infine, trasformando il Moody's rating in una scala numerica (Aaa = 1, Aa = 2, A = 3, Baa = 4 e Ba = 5), il valore medio del rischio dell'investimento non deve superare 1,5. Si vuole massimizzare la rendita finale dell'investimento.

Portfolio Optimization (soluzione)

Variabili decisionali

- $x_i : i \in \{A, B, C, D, E\}$: ammontare in euro investito in i;
- $y_i : i \in \{A, B, C, D, E\}$: variabile binaria legata all'investimento in i, cioé:
  $y_i = \begin{cases} 1, \text{ se si investe qualcosa in } i \ (x_i > 0) \\ 0, \text{ altrimenti} \end{cases}$

Parametri

- M: costante sufficientemente alta ($M \geq 100000$).

Portfolio Optimization (soluzione): Modello

$$\max \quad 4,5x_A + 0,7 \cdot 5,4x_B + 0,7 \cdot 5,1x_C + 0,7 \cdot 4,4x_D + 6,1x_E$$

$s.t.$

$x_A + x_B + x_C + x_D + x_E \leq M$ (budget)

$2x_A + 3x_B + x_C + 4x_D + 5x_E \leq 1,5(x_A + x_B + x_C + x_D + x_E)$ (Moody's medio)

$9x_A + 15x_B + 4x_C + 3x_D + 2x_E \leq 5(x_A + x_B + x_C + x_D + x_E)$ (durata media)

$x_B + x_C + x_D \geq 0,4 \cdot M$ (minimo investimento pubblico/stato)

$x_C \leq My_C$ (attivazione variabili binarie)

$x_D \leq My_D$

$y_C + y_D \leq 1$ (vincolo logico C nand D)

$x_A \geq 10000\ y_A$ (attivazione variabili binarie)

$x_E \leq My_E$

$y_E \leq y_A$ (vincolo logico E $\Rightarrow x_A \geq 10000$)

$x_i \in \mathbb{R}_+, y_i \in \{0,1\}$

Commenti sulle variabili logiche

"Attivazione" delle variabili logiche
La sola definizione delle variabili logiche non basta per la correttezza del modello. Infatti, la defizione

$$y_i = \begin{cases} 1, \text{ se si investe qualcosa in } i \\ 0, \text{ altrimenti} \end{cases}$$

NON fa parte del modello, ma è un semplice commento che ne facilita la lettura. Ogni volta che si usano delle variabili logiche legate ad altre variabili, è necessario introdurre dei vincoli (vincoli di "attivazione") che sanciscano la relazione tra le variabili binarie e la/le corrispondenti altre variabili. Si ribadisce che tali vincoli devono essere LINEARI.

Valori "spuri"
Si fa notare che il vincolo di attivazione delle variabili logiche y_C e y_D non esclude i casi $y_C = 1$ con $x_C = 0$ oppure $y_D = 1$ con $x_D = 0$. In altre parole, se $x_C = 0$ (risp. $x_D = 0$), la corrispondente variabile y_C (risp. y_D) può essere sia 0 che 1. Questo non inficia la validità della formulazione, in quanto l'eventualità di un valori 1 "spuri" per y_C o y_D si può verificare solo quando sia x_C che x_D sono a 0, e quindi solo in caso di soluzioni comunque ammissibili.

Analogamente, si possono verificare valori spuri per le variabili y_E e y_A, che non pregiudicano la validità del modello, in quanto corrispondono a casi comunque ammissibili.

Assunzione multiperiodale di personale

Una ditta che si occupa di riparazioni deve pianificare le assunzioni per i prossimi 5 mesi. All'inizio, la ditta dispone di 20 operai esperti. Ogni operaio esperto fornisce 150 ore di lavoro al mese e percepisce uno stipendio di 1000 euro. Un operaio neoassunto, durante il primo mese di servizio, percepisce uno stipendio di 500 euro e non fornisce, in pratica, lavoro utile; per questo primo mese gli viene invece affiancato un operaio esperto che gli insegni il mestiere. Ogni operaio esperto che svolge affiancamento rende per 70 ore di lavoro al mese (anziché 150). Dopo il mese di apprendistato, gli operai neoassunti diventano esperti, con pari abilità lavorativa e stipendio. Le quantità di ore/lavoro da coprire nei prossimi 5 mesi sono rispettivamente pari a 2000, 4000, 7000, 3000 e 3500. Se si assumono almeno 10 persone nei primi due mesi, l'azienda può incassare un contributo statale di 10000 euro. Infine, l'ufficio del personale può supportare nuove assunzioni solo in uno degli ultimi tre mesi. Formulare il programma lineare che consenta di pianificare le assunzioni in modo da minimizzare i costi netti del personale nei prossimi 5 mesi.

Assunzione multiperiodale di personale: soluzione

Variabili decisionali

- $x_i : i \in \{1..5\}$: neoassunti nel mese i;
- $y_i : i \in \{1..5\}$: esperti disponibili nel mese i;
- $w_i : i \in \{3..5\}$:variabile logica legata alla scelta di assumere nel mese i:
  $w_i = \begin{cases} 1, \text{ se si decide di assumere nel mese } i \\ 0, \text{ altrimenti;} \end{cases}$
- z: variabile logica legata alla scelta di ottenere o meno il contributo statale:
  $z = \begin{cases} 1, \text{ se si decide di ottenere il contributo statale} \\ 0, \text{ altrimenti.} \end{cases}$

Parametri

- M: costante sufficientemente elevata (maggiore del numero massimo di apprendisti assumibili nei mesi 3, 4 o 5)

  Se vogliamo dare un valore per M (non è richiesto all'esame, ma si apprezzano ragionamenti validi), possiamo procedere come segue. Sicuramente, tenendoci "larghi", un valore possibile per M è ottenuto considerando tutto il lavoro da fare, e assumendo che sia fatto da soli apprendisti: $M \geq \lceil \frac{2000+4000+7000+3000+3500}{150} \rceil = 137$. Con qualche considerazione in più, possiamo affinare il valore di M, che, in generale, è bene sia il più basso possibile. Osserviamo che M è riferita agli ultimi tre mesi, nei quali non assumeremo più operai di quelli necessari per effettuare tutta la manutenzione dei mesi 4 e 5 (gli operai sono produttivi dal mese successivo). Pertanto, possiamo porre $M \geq \lceil \frac{3000+3500}{150} \rceil = 44$.

Assunzione multiperiodale di personale: soluzione

Modello

$$\min \quad 500(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) + 1000(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5) - 10000z$$

s.t.

(Mese 1)
$$y_1 = 20$$
$$x_1 \leq y_1$$
$$150(y_1 - x_1) + 70x_1 \geq 2000$$

(Mese 2)
$$y_2 = y_1 + x_1$$
$$x_2 \leq y_2$$
$$150(y_2 - x_2) + 70x_2 \geq 4000$$

(Mese 3)
$$y_3 = y_2 + x_2$$
$$x_3 \leq y_3$$
$$150(y_3 - x_3) + 70x_3 \geq 7000$$

(Mese 4)
$$y_4 = y_3 + x_3$$
$$x_4 \leq y_4$$
$$150(y_4 - x_4) + 70x_4 \geq 3000$$

(Mese 5)
$$y_5 = y_4 + x_4$$
$$x_5 \leq y_5$$
$$150(y_5 - x_5) + 70x_5 \geq 3500$$

(attiva z)
$$x_1 + x_2 \geq 10z$$

(limiti)
$$x_i \leq Mw_i, \ \forall\ i = 3, 4, 5$$
$$w_3 + w_4 + w_5 \leq 1$$

$$x_i, y_i \in \mathbb{Z}_+ \qquad z \in \{0, 1\},\ w_i \in \{0, 1\}$$

Nota: possiamo arguire che x_5 è a 0 in una soluzione ottima ed eliminare tale variabile.

Commento sull'attivazione delle variabili logiche

Analogamente a quanto osservato per l'esercizio "Portfolio Optimization", sono possibili dei valori 1 "spuri" per le variabili w_i. Tuttavia, anche in questo caso, tali valori spuri sono in corrispondenza di soluzioni comunque ammissibili: la presenza di una w_i pari a 1, con la corrispondente x_i pari a 0, esclude comunque che ci possano essere altre $x_i > 0$, cioé la soluzione è comunque ammissibile.

Se si guardano i soli vincoli, sarebbero possibili anche valori "spuri" per la variabile z. Infatti, è possibile avere $z = 0$ con $x_1 + x_2 \geq 10$: ad esempio, se $x_1 + x_2 = 11$, il vincolo "(attiva z)" sarebbe soddisfatto anche con $z = 0$. Tale eventualità è però esclusa dalla funzione obiettivo: infatti, le soluzioni con $x_1 + x_2 \geq 10$ e $z = 0$, sebbene ammissibili secondo i vincoli, non sono ottime e, quindi, sono escluse dal modello complessivo. In altre parole, il caso $x_1 + x_2 \geq 10$ con $z = 0$ è escluso per ottimalità.

Raffineria

Una raffineria produce benzina verde e benzina super a partire da due tipi di greggio A e B, usando tre impianti. Il primo impianto può produrre 2 barili di verde e 3 di super a partire da 4 barili di greggio di tipo A e 3 barili di greggio di tipo B. Il secondo impianto può produrre 4 barili di verde e 2 di super a partire da 3 barili di greggio di tipo A e 4 barili di greggio di tipo B. Il terzo impianto può produrre 2 barili di verde e 2 di super a partire da 3 barili di greggio di tipo A e 3 barili di greggio di tipo B. Gli impianti lavorano sempre con le proporzioni specificate. La benzina verde viene venduta a 120 euro al barile, la super a 150 euro al barile. Sono disponibili, per questo mese, 5000 barili di greggio di tipo A e 6000 di tipo B. Per esigenze legate ad altre lavorazioni, almeno uno dei tre impianti deve produrre al massimo 1000 barili. Determinare la produzione che massimizza il profitto mensile.

Raffineria: soluzione

Variabili decisionali

Essendo i mix di ingresso e uscita in rapporti costanti e ben determinati, possiamo utilizzare variabili legate al livello di produzione degli impianti.

- $x_i : i \in \{1..3\}$: livello di produzione dell'impianto i;

  es. livello $x_1 = 1 \Rightarrow$ consumo 4 barili di A e 3 di B e produco 2 varili di verde e 3 di super;

  es. livello $x_1 = 1,5 \Rightarrow$ consumo 6 barili di A e 4,5 di B e produco 3 varili di verde e 4,5 di super;

- $z_i : i \in \{1..3\}$: variabile logica legata alla scelta degli impianti con produzione limitata, cioé

  $$z_i = \begin{cases} 1, \text{ se si decide di limitare a 1000 la produzione di barili nell'impianto } i \\ 0, \text{ altrimenti} \end{cases} .$$

Parametri

- M: costante sufficientemente elevata (maggiore o uguale al numero massimo di barili di verde o super ottenibili in un impianto).

Raffineria: soluzione

Modello

$$
\begin{array}{rl}
 & \max 120(2x_1 + 4x_2 + 2x_3) + 150(3x_1 + 2x_2 + 2x_3) \\
 & s.t. \\
\text{(Disponibilità greggio)} & 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 5000 \\
 & 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 6000 \\
 & \\
\text{(Vincolo logico)} & z_1 + z_2 + z_3 \geq 1 \\
 & 5x_1 \leq 1000 + M(1 - z_1) \\
 & 6x_2 \leq 1000 + M(1 - z_2) \\
 & 4x_3 \leq 1000 + M(1 - z_3) \\
 & \\
 & x_i \in \mathbb{R}_+, z_i \in \{0, 1\}, \forall i = 1..3
\end{array}
$$

Nota: come si potrebbe dimensionare M?

Raffineria: soluzione con FORMULAZIONE ALTERNATIVA

Variabili decisionali

Una scelta più immediata delle variabili decisionali è la seguente. Si ottiene un modello corretto ma più complicato.

- $x_{ij} : i \in \{v, s\}, j \in \{1, 2, 3\}$: numero di barili di benzina di tipo i prodotta (output) nell'impianto j;
- $y_{ij} : i \in \{v, s\}, j \in \{1, 2, 3\}$: numero di barili di greggio di tipo i utilizzati (input) nell'impianto j;
- $z_i : i \in \{1..3\}$: variabile logica legata alla scelta degli impianti con produzione limitata, cioé
  $$z_i = \begin{cases} 1, \text{ se si decide di limitare a 1000 la produzione di barili nell'impianto } i \\ 0, \text{ altrimenti} \end{cases}.$$

Parametri

- M: costante sufficientemente elevata (maggiore o uguale al numero massimo di barili di verde o super ottenibili in un impianto).

Raffineria: soluzione con FORMULAZIONE ALTERNATIVA

Modello

$$
\begin{aligned}
& \max 120(x_{v1} + x_{v2} + x_{v3}) + 150(x_{s1} + x_{s2} + x_{s3}) \\
& s.t. \\
\text{(Disponibilità greggio)} \quad & y_{A1} + y_{A2} + y_{A3} \leq 5000 \\
& y_{B1} + y_{B2} + y_{B3} \leq 6000 \\
\\
\text{(Bilanciamento impianto 1)} \quad & 3y_{A1} = 4y_{B1} \qquad \text{(input } y_{A1} : y_{B1} = 4 : 3) \\
& 3x_{v1} = 2x_{s1} \qquad \text{(output } x_{v1} : x_{s1} = 2 : 3) \\
& 2y_{A1} = 4x_{v1} \qquad \text{(input/output } y_{A1} : x_{v1} = 4 : 2) \\
\\
\text{(Bilanciamento impianto 2)} \quad & 4y_{A2} = 3y_{B2} \qquad \text{(input)} \\
& 2x_{v2} = 4x_{s2} \qquad \text{(output)} \\
& 4y_{A2} = 3x_{v2} \qquad \text{(input/output)} \\
& (cont.)
\end{aligned}
$$

(*cont.*)

$$
\begin{aligned}
&\text{(Bilanciamento impianto 3)} && y_{A2} = y_{B2} \quad \text{(input)}\\
& && x_{v2} = x_{s2} \quad \text{(output)}\\
& && 2y_{A2} = 3x_{v2} \quad \text{(input/output)}\\
&\text{(Vincolo logico)} && z_1 + z_2 + z_3 \geq 1\\
& && x_{v1} + x_{s1} \leq 1000 + M(1 - z_1)\\
& && x_{v2} + x_{s2} \leq 1000 + M(1 - z_2)\\
& && x_{v3} + x_{s3} \leq 1000 + M(1 - z_3)\\
&\text{(Dominio)} && x_{ij}, y_{ij} \in \mathbb{R}_+, z_j \in \{0,1\}, \forall i \in \{v, s\}, j \in \{1,2,3\}
\end{aligned}
$$

Agricoltore CEE

Un'azienda agricola produce mais, soia e grano in tre tenute A, B e C. La tenuta A dispone di 600 ettari di terreno e di una riserva d'acqua di $8 \times 10^6 mc$. La tenuta B dispone di 700 ettari di terreno e di $5 \times 10^6 mc$ d'acqua. La tenuta C dispone di 450 ettari di terreno e di $6 \times 10^6 mc$ d'acqua. La resa economica di ogni ettaro di terreno è di 5, 6 e 7 migliaia di euro per le produzioni di mais, soia e grano, rispettivamente. Ogni ettaro di terreno consuma acqua per 20000, 10000 e 10000 mc se coltivato rispettivamente a mais, soia o grano. Le direttive della comunità europea impongono che almeno una tenuta lasci 200 ettari di terreno incolto e che l'estensione complessiva del terreno coltivato a soia dall'azienda non superi il 40% del totale del suolo coltivato. L'azienda vuole massimizzare la resa economica delle tre tenute.

Agricoltore CEE: soluzione

Variabili decisionali

- $x_{ij} : i \in \{A, B, C\}, j \in \{M, S, G\}$: ettari della tenuta i da coltivare a j;
- $z_i : i \in \{A, B, C\}$: variabile logica legata alla scelta della tenuta con terreno incolto, cioé
  $z_i = \begin{cases} 1, \text{ se si decide di lasciare } 200ha \text{ di terreno incolto nella tenuta } i \\ 0, \text{ altrimenti} \end{cases}$.

Modello

$$
\begin{array}{rl}
 & \max[5(x_{AM} + x_{BM} + x_{CM}) + 7(x_{AS} + x_{BS} + x_{CS}) \\
 & \qquad +6(x_{AG} + x_{BG} + x_{CG})] \times 10^6 \\
 & s.t. \\
\text{(Disponibilità acqua)} & 20x_{AM} + 10x_{AS} + 10x_{AG} \leq 8000 \quad (\times 10^3) \\
 & 20x_{BM} + 10x_{BS} + 10x_{BG} \leq 5000 \\
 & 20x_{CM} + 10x_{CS} + 10x_{CG} \leq 6000 \\
 & \ldots
\end{array}
$$

Agricoltore CEE: soluzione

$$\begin{array}{rl}
 & \ldots \\
\text{(Disponibilità terreno)} & x_{AM} + x_{AS} + x_{AG} \leq 600 \\
 & x_{BM} + x_{BS} + x_{BG} \leq 700 \\
 & x_{CM} + x_{CS} + x_{CG} \leq 450 \\
 & \\
\text{(Massimo 40\% a soia)} & x_{AS} + x_{BS} + x_{CS} \leq 0,4 \sum_{i,j} x_{ij} \\
 & \\
\text{(terreno incolto)} & z_A + z_B + z_C \geq 1 \\
 & x_{AM} + x_{AS} + x_{AG} \leq 600 - 200 z_A \\
 & x_{BM} + x_{BS} + x_{BG} \leq 700 - 200 z_B \\
 & x_{CM} + x_{CS} + x_{CG} \leq 450 - 200 z_C \\
 & \\
\text{(Dominio)} & x_{ij} \in \mathbb{R}_+, z_j \in \{0,1\}, \forall i \in \{A,B,C\}, j \in \{M,S,G\}
\end{array}$$

Nota: I vincoli sul terreno incolto rendono superflui (*dominano*) i vincoli sulla disponibilità di terreno.