

Esercizi da temi d'esame

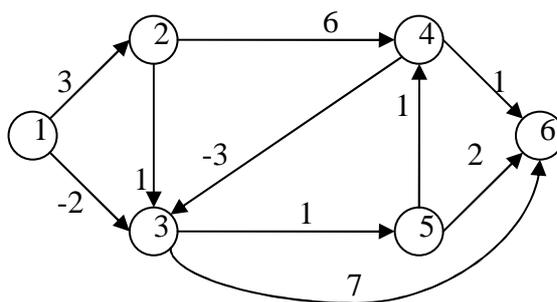
COGNOME: _____ *Questo foglio deve*
 Scrivere subito! NOME: _____ *va consegnato con*
 MATRICOLA: _____ *l'elaborato*

- Un mulino produce due tipi di semola normale e integrale a partire da tre tipi di granaglie: A, B e C. Per produrre un quintale di semola normale, sono necessari 0.5 quintali di granaglia A, 0.4 di granaglia B e 0.3 di granaglia C; per un quintale di semola integrale, sono necessari 0.3 quintali di granaglia A, 0.7 di B e 0.4 di C. Il mulino si serve da tre fornitori. Ciascun fornitore mette a disposizione un lotto di acquisto, le cui caratteristiche sono riportate nella seguente tabella:

Lotto	Granaglia A	Granaglia B	Granaglia C	Costo	% impurità
1	3 q	5 q	8 q	100 €	1.0 %
2	4 q	9 q	3 q	140 €	2.0 %
3	7 q	2 q	2 q	120 €	1.5 %

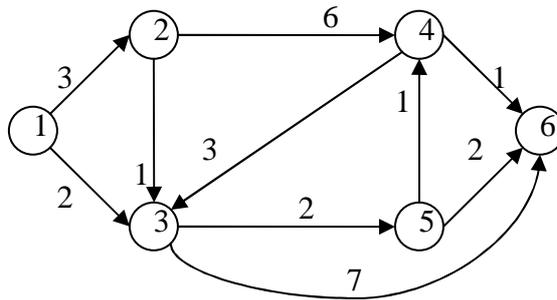
Il mulino dispone di 10 000 € per approvvigionarsi di granaglie e vuole massimizzare il numero di quintali di semola prodotta complessivamente, considerando che:

- si possono acquistare al massimo 5 unità di lotto 3;
 - la semola normale deve essere almeno il doppio della semola integrale e non più del quadruplo;
 - le granaglie del lotto 1 e del lotto 2 sono incompatibili e pertanto non possono essere contemporaneamente acquistate;
 - l'impurità media delle scorte di granaglia di tipo A deve essere inferiore allo 0.6%.
- Si consideri il seguente grafo:



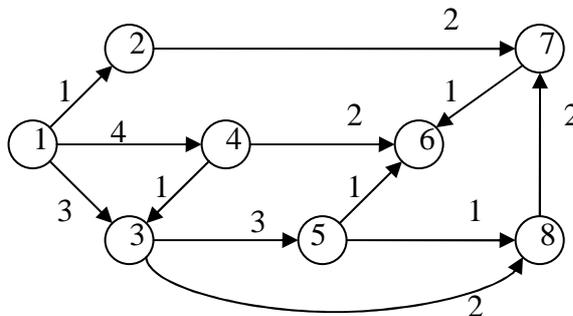
- si scelga un algoritmo per determinare i cammini minimi dal nodo 1 verso tutti gli altri nodi e si motivi la scelta;
- si applichi l'algoritmo scelto (riportare e giustificare i passi dell'algoritmo in una tabella);
- L'algoritmo ha individuato un ciclo negativo? Giustificare la risposta.

- Si consideri il seguente grafo:



- si scelga il miglior algoritmo tra quelli presentati per determinare i cammini minimi dal nodo 1 verso tutti gli altri nodi e si motivi la scelta;
- si applichi l'algoritmo scelto (riportare e giustificare i passi dell'algoritmo in una tabella);
- si disegni l'albero dei cammini minimi.

- Si consideri il seguente grafo:



- si scelga un algoritmo appropriato e si motivi la scelta;
- si calcolino i cammini minimi dal nodo 1 verso tutti gli altri nodi (i passi dell'algoritmo vanno riportati in una tabella e giustificati);
- si disegni l'albero dei cammini minimi.

- Enunciare le condizioni di complementarità primale-duale in generale. Applicare tali condizioni per dimostrare che $(x_1, x_2, x_3) = (1, 4, 0)$ è soluzione ottima del seguente problema:

$$\begin{aligned}
 & \max && x_2 + x_3 \\
 \text{s.t.} & -x_1 - x_2 + 2x_3 &\leq & 1 \\
 & -2x_1 + x_2 &\leq & 2 \\
 & 2x_2 &\geq & -3 \\
 & 2x_1 + x_3 &= & 2 \\
 & x_1 \text{ libera } x_2 \geq 0 \ x_3 \leq 0
 \end{aligned}$$

- Enunciare le condizioni di complementarità primale-duale e applicarle per dimostrare che $(x_1, x_2, x_3) = (3/2, 9/4, 0)$ è soluzione ottima del seguente problema:

$$\begin{aligned}
 & \min -2x_1 + x_2 - x_3 \\
 \text{s.t.} & -2x_1 - x_2 + x_3 \leq 2 \\
 & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\
 & -2x_1 \geq -3 \\
 & x_1 \geq 0 \ x_2 \geq 0 \ x_3 \leq 0
 \end{aligned}$$

- Enunciare le condizioni di complementarità primale-duale e applicarle per dimostrare che $(x_1, x_2, x_3) = (0, 4, 8)$ è soluzione ottima del seguente problema:

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 \leq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- Come si riconoscono sul tableau del simplesso le condizioni di illimitatezza per un problema di minimo? Giustificare la risposta.
- Si può usare l'algoritmo di Dijkstra per il cammino minimo in presenza di costi negativi ma senza cicli di lunghezza negativa? Giustificare la risposta.
- Sia data una coppia di problemi primale-duale con problema duale non ammissibile. Cosa è possibile dire sulla soluzione del problema primale? Giustificare la risposta.
- Si consideri un problema di programmazione lineare: è possibile che più soluzioni di base rappresentino lo stesso vertice della regione ammissibile? Giustificare la risposta.
- Si enunci e si giustifichi la regola adottata dal metodo del simplesso per la selezione della variabile uscente nelle operazioni di cambio base.
- Si consideri il seguente tableau del simplesso:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
$-z$	0	1/2	0	1	0	9
x_3	0	1/2	1	2	0	0
x_5	0	0	0	-1	1	2
x_1	1	-1/2	0	1	0	1

Indicare, senza svolgere operazioni di pivot, 3 basi ottime (nei termini delle variabili che le compongono) del corrispondente problema di programmazione lineare.

- Si consideri il seguente tableau del simplesso:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
$-z$	0	-1/3	0	-1	0	9
x_3	0	1/13	1	2	0	0
x_5	0	0	0	-1	1	4/3
x_1	1	1/17	0	1	0	0

Rispondere (NON su questo foglio) alle seguenti domande:

- (a) Su quale elemento si farà pivot alla prossima iterazione del simplesso usando la regola di Bland?
 - (b) Stabilire, **SENZA EFFETTUARE LE OPERAZIONI DI PIVOT**, quale sarà il valore della funzione obiettivo alla fine della prossima iterazione del simplesso. **GIUSTIFICARE LA RISPOSTA!**
 - (c) Alla fine della prossima iterazione sarà cambiata la base corrente: sarà cambiato anche il vertice del poliedro associato alla nuova base? **GIUSTIFICARE LA RISPOSTA!**
- Enunciare e giustificare le condizioni di ottimalità nel metodo del simplesso.