

## Modelli di ottimizzazione

## 1 Cosa significa ottimizzare

Analizzando bene la vita di tutti i giorni, possiamo osservare che l'idea di ottimizzare è molto più diffusa di quanto ci si possa aspettare ed è insita nel comportamento umano, o addirittura nel sistema naturale. Quante volte capita di cercare di ottenere il migliore risultato con il minimo sforzo, impiegare meno tempo possibile a compiere qualche incarico, sfruttare al meglio le risorse messeci a disposizione, nel lavoro, nello studio, nello sport e nel gioco? Partiamo proprio da quest'ultimo caso per capire le problematiche che sorgono affrontando con metodo i problemi di ottimizzazione.

### Esempio: un gioco di costruzioni

Una scatola di montaggio ci mette a disposizione pezzi di diverso colore e dimensione, ognuno rappresentante una particolare componente di un telefono cellulare. Abbiamo 10 moduli display (di colore blu), 18 moduli di memoria (di colore verde), 12 moduli di trasmissione (di colore giallo), 21 tastierini a 6 tasti (di colore rosso), 9 tastiere di navigazione (di colore bianco) e 10 microcamere (di colore rosa). Componendo opportunamente questi elementi possiamo confezionare dei telefonini di due diversi modelli, come rappresentato in figura.

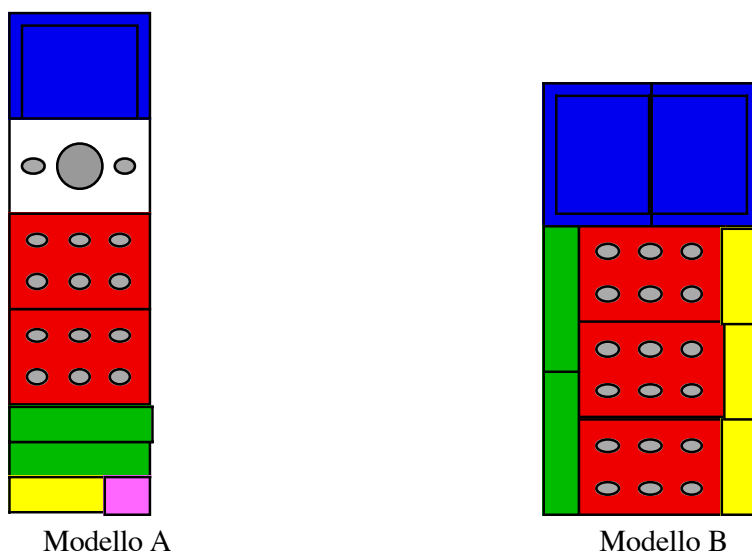


Figura 1: i due modelli di telefonini da assemblare

Ogni telefono di tipo A ci fa guadagnare 3 punti e ogni telefono di tipo B ce ne fa guadagnare 8. Il gioco consiste nell'assemblare le componenti a disposizione cercando di totalizzare il maggior punteggio possibile.

Avendo le varie componenti sotto mano, è abbastanza semplice riuscire a generare *soluzioni ammissibili*, ovvero combinazioni di pezzi che soddisfano le "ricette" dei telefonini, e può essere semplice individuare rapidamente tra tutte le combinazioni possibili quella che ci fa totalizzare il maggior numero di punti. Certamente meno semplice è riuscire a certificare che la soluzione trovata è la migliore in assoluto, cosa che possiamo fare efficientemente solo ricorrendo a strumenti matematici. Oppure quantificare il valore intrinseco delle risorse (per esempio, quanto siamo disposti a pagare per una tastiera in più?), o valutare la stabilità della soluzione di fronte a variazioni dei punti attribuiti. Tutto

questo, oltre ovviamente alla determinazione della soluzione ottima, è lo scopo che ci si prefigge con l'utilizzo delle metodologie della Ricerca Operativa.

## 2 Ricerca Operativa

La *Ricerca Operativa* ha come oggetto lo studio e la messa a punto di metodologie e strumenti quantitativi per la soluzione di problemi decisionali. Nata in ambito militare durante la seconda guerra mondiale, ha immediatamente trovato applicazione nei più svariati settori quali ad esempio la logistica e la produzione, i trasporti, le telecomunicazioni, la finanza. Al momento attuale, caratterizzato da contesti estremamente dinamici e complessi, la ricerca operativa è diventata uno strumento indispensabile per supportare i processi decisionali. I problemi affrontati sono tipicamente quelli in cui bisogna prendere decisioni sull'uso di risorse disponibili in quantità limitata in modo da rispettare un insieme assegnato di vincoli, massimizzando il “beneficio” ottenibile dall'uso delle risorse stesse. Questi problemi sono anche detti di *ottimizzazione*.

Nella seguente tabella sono riportati alcuni esempi di problemi di ottimizzazione sorti in vari ambiti applicativi e affrontati con successo grazie agli strumenti della ricerca operativa. Questi esempi sono tratti dalla lista dei lavori finalisti del premio Franz Edelman che la comunità internazionale assegna annualmente alle applicazioni della Ricerca Operativa di maggiore rilevanza. Per maggiori informazioni si può consultare il sito dell'INFORMS, l'associazione americana di ricerca operativa ([www.informs.org](http://www.informs.org)).

anno	azienda	settore	effetto
86	Eletrabras	Energia idroelettrica	43M\$ risp. annuo
90	Taco Bell	Turni del personale	7.6M\$ risp. annuo
92	Harris (semiconduttori)	Pianificazione produzione su scala globale	50%⇒95% ordini "on time"
95	GM - Car Rental	Utilizzo parco auto	+50M\$ annui evitato fallimento
96	HP - stampanti	Riprogettata linea produttiva	raddoppiata produzione
99	IBM	Riorganizzata catena logistica	750M\$ risp. annuo
00	Syngenta	Produzione di semi di mais	5M\$ risp. annuo

Tabella 1: esempi di applicazione della Ricerca Operativa

## 3 Come affrontare un problema di ottimizzazione

Se guardiamo con attenzione la nostra vita quotidiana possiamo renderci conto come molto spesso troviamo di fronte a problemi di ottimizzazione: per esempio determinare il miglior percorso per recarci al lavoro, fare la spesa minimizzando il tempo impiegato e non superando il budget a disposizione, gestire le proprie attività evitando le perdite di tempo, etc. Se per risolvere i problemi quotidiani non è indispensabile ricorrere agli strumenti quantitativi messi a disposizione dalla Ricerca Operativa (e forse sarebbe noioso), questi strumenti non possono venire ignorati nel risolvere problemi più complessi e di più vasto impatto come per esempio determinare il percorso di un autobus di linea in modo da massimizzare la qualità del servizio o il numero di passeggeri serviti, programmare i turni

del personale in modo da minimizzare i costi, amministrare il portafoglio titoli di un fondo di investimenti in modo da minimizzare il rischio e contemporaneamente massimizzare il rendimento atteso. Spesso l'intuizione e il buon senso non sono sufficienti per risolvere questo tipo di problemi, e in ogni caso, buon senso e intuizione non sono in grado di garantire l'effettiva qualità della soluzione trovata. Si prenda per esempio il seguente problema di programmazione della produzione, la cui formulazione è abbastanza semplice, ma la cui soluzione è tutt'altro che ovvia.

#### Esempio: ditta di cosmetici

Una ditta di cosmetici produce, con la stessa materia prima di base, una crema per il corpo (Body) e una crema per il viso (Face) entrambe in versione normale (Regular) e in versione lusso (Luxury). Il costo della materia prima è di 3 € al chilo, e trasformare un chilo di materia prima in prodotto Regular richiede un'ora di lavoro. Da un chilo di materia prima si ottengono 4 etti di Body Regular e 3 etti di Face Regular vendute al prezzo rispettivamente di 6 e 7 € all'etto. È inoltre possibile curare la profumazione, il colore e la confezione delle due creme producendo le versioni Luxury a partire dalle versioni Regular. Un etto di Regular Body viene trasformata in un etto Luxury Body impiegando 2 ore aggiuntive di lavoro e 4 €; il prezzo di vendita della Luxury Body è di 14 € all'etto. Analogamente un etto di Regular Face viene trasformata in un etto Luxury Face impiegando 3 ore aggiuntive di lavoro e 4 €; il prezzo di vendita della Luxury Face è di 18 € all'etto. Il direttore della produzione, sapendo di avere a disposizione non più di 6000 ore di forza lavoro, e di poter acquistare non più di 4000 chili di materia prima di base, vuole pianificare la produzione in modo da massimizzare i profitti.

Un *processo decisionale* può, in modo schematico, essere decomposto nelle seguenti fasi:

- 1) individuazione del problema decisionale;
- 2) analisi della realtà e raccolta dei dati;
- 3) costruzione del modello come astrazione del problema reale;
- 4) determinazione di una o più soluzioni;
- 5) analisi dei risultati ottenuti e loro interpretazione nel caso reale.

Le fasi di cui sopra non sono necessariamente in sequenza, anzi spesso sono da prevedere dei *feedback* per cui i risultati di una fase suggeriscono una modifica delle scelte fatte nelle fasi che la hanno preceduta.

Nello svolgimento del corso concentreremo l'attenzione sulla costruzione dei modelli, sullo sviluppo di algoritmi efficienti per la loro soluzione o sull'utilizzo di software commerciale di ottimizzazione e sull'interpretazione delle soluzioni ottenute.

Il *modello* è una astrazione che permette di descrivere in termini "matematici" le caratteristiche salienti del problema che si vuole studiare e risolvere.

Nella formulazione di un modello tre punti sono di fondamentale importanza:

- 1) individuazione delle decisioni che interessano il problema in esame. Nel caso dell'esempio della ditta produttrice di cosmetici, le decisioni da prendere riguardano: la quantità di materia prima da acquistare, la quantità delle varie creme da produrre, il numero di ore di lavorazione. In un modello di tipo matematico le decisioni vengono rappresentate da *variabili decisionali*.
- 2) determinazione dell'*obiettivo* o degli obiettivi da ottimizzare. Nell'esempio della ditta produttrice di cosmetici, l'obiettivo è massimizzare il profitto, ovvero la differenza tra i guadagni derivanti dalla vendita delle creme e il costo (di lavorazione e di acquisto delle materie prime) necessario per produrle. In generale è possibile esprimere l'obiettivo come una funzione delle variabili decisionali (*funzione obiettivo*).
- 3) definizione delle *soluzioni ammissibili*. Si vogliono in pratica esprimere le "regole" che definiscono il problema decisionale. Nel caso della ditta di cosmetici, per esempio, sappiamo che le ore di lavorazione non possono essere più di 6000, o che per produrre un etto di crema per il viso abbiamo bisogno di 1/3 di chilo di materia prima. In genere queste relazioni vengono chiamate *vincoli del problema*.

I modelli vengono suddivisi in tre classi principali: modelli programmazione matematica, modelli di teoria dei giochi e modelli di simulazione.

Nei *modelli di programmazione matematica* tutto il sistema sotto esame è descritto per mezzo di relazioni matematiche (o logiche) tra variabili che rappresentano gli elementi del sistema; risolvere il problema richiede quindi di cercare i valori delle variabili decisionali che soddisfino i vincoli e che massimizzino o minimizzino la funzione obiettivo.

Nei *modelli di teoria dei giochi*, la difficoltà di rappresentare matematicamente il comportamento degli individui o dei gruppi di individui presenti nella realtà sotto esame viene superata introducendo direttamente l'uomo nel modello attraverso i "giocatori", a ciascuno dei quali viene affidato un prefissato ruolo da svolgere con una determinata strategia. Un esempio tipico è quello dello studio dei mercati economici, o lo studio del traffico automobilistico in una rete stradale urbana.

I *modelli di simulazione* vengono generalmente impiegati quando la realtà in esame è molto complessa e anche i dati necessari a studiare il problema non sono certi, ma influenzati da una grande variabilità. In tal caso, si cerca di riprodurre nel modo più accurato possibile il comportamento del sistema che si vuole studiare per mezzo di relazioni matematiche; quindi si studia, su calcolatore, la sua risposta a sollecitazioni, che vengono realizzate con l'ausilio di generatori di numeri pseudo casuali in modo che siano il più possibile simili a quelle reali. I modelli di simulazione vengono impiegati per analisi di scenari, dette anche analisi di tipo "what if".

Nell'interpretare i risultati dei modelli, di qualsiasi tipo essi siano, non va mai dimenticato che essi sono una astrazione della realtà e potrebbero non riprodurre tutti i dettagli necessari ad affrontare il problema reale: la soluzione che otteniamo dal modello è di fatto la soluzione della rappresentazione che abbiamo costruito del problema reale. È sempre necessario prestare grande attenzione alla fondatezza del modello: il modello sarà sempre una descrizione molto limitata della realtà, dovrà però

rappresentare con ragionevole accuratezza gli aspetti che interessano ai fini della soluzione del problema decisionale che si sta affrontando.

#### 4 Esempio di soluzione di un problema di ottimizzazione

Vediamo su un esempio quali sono i passi da seguire nella soluzione di un problema di ottimizzazione, quindi la costruzione del modello matematico a partire dalla descrizione del problema e, in seguito, l'individuazione di un metodo di soluzione che sfrutti le proprietà del modello. Mentre la costruzione del modello che faremo sarà rigorosa, per la soluzione saremo più empirici, anche se il metodo, guidato dalle indicazioni del modello matematico sarà comunque corretto.

##### *Proposizione e analisi del problema*

Un coltivatore ha a disposizione 12 ettari di terreno da coltivare a lattuga o a patate. Le risorse a sua disposizione, oltre al terreno, sono: 70 kg. di semi di lattuga, 18 t. di tuberi, 160 t. di stallatico per concimare il terreno. Supponendo che il mercato sia in grado di assorbire tutta la produzione e che i prezzi siano stabili, la resa stimata della coltivazione a lattuga è di 3000 € per ettaro e quella delle patate è di 5000 € per ettaro. L'assorbimento delle risorse per ogni tipo di coltivazione è di 7 kg di semi e 10 t. di stallatico per ettaro di lattuga, e 3 t. di tuberi e 20 di stallatico per le patate. Il problema che si pone il coltivatore è quello di stabilire quanto terreno destinare a lattuga e quanto a patate in modo da massimizzare la resa economica e sfruttando al meglio le risorse disponibili.

##### *Costruzione del modello matematico*

Le variabili decisionali sono la quantità di ettari da destinare a lattuga ( $x_L$ ) e la quantità di ettari da destinare a patate ( $x_P$ ). Data una soluzione ( $x_L, x_P$ ) la resa economica è quantificata dalla funzione obiettivo che intendiamo massimizzare:

$$\max 3000 x_L + 5000 x_P.$$

I vincoli sono dati dalla disponibilità di risorse e dall'assorbimento dovuto alle colture. Pertanto il numero di ettari coltivati non può eccedere 12:

$$x_L + x_P \leq 12;$$

i semi di lattuga e i tuberi utilizzati che dipenderanno direttamente dal numero di ettari destinati a una coltura o all'altra, non possono eccedere la disponibilità, quindi:

$$7 x_L \leq 70$$

per i semi di lattuga, mentre per i tuberi:

$$3 x_P \leq 18;$$

lo stallatico impiegato per entrambe le colture non può eccedere la disponibilità:

$$10 x_L + 20 x_P \leq 160.$$

Inoltre non vanno dimenticati i vincoli di non negatività sulle variabili, non potendo coltivare una quantità negativa di terreno:

$$x_L, x_P \geq 0.$$

Riassumendo, il modello completo risulta:

$$\begin{aligned} \max \quad & 3000 x_L + 5000 x_P \\ & x_L + x_P \leq 12 \\ & 7 x_L \leq 70 \\ & 3 x_P \leq 18 \\ & 10 x_L + 20 x_P \leq 160 \\ & x_L, x_P \geq 0. \end{aligned}$$

### Soluzione del problema

Tra tutte le attribuzioni di valori alle variabili  $x_L$  e  $x_P$  che soddisfano i vincoli elencati sopra dobbiamo individuare quella che totalizza la resa economica maggiore. Per fare questo vediamo di farci guidare dal modello matematico. Se consideriamo l'insieme dei vincoli del problema, trattandosi di un sistema di disequazioni in 2 variabili possiamo darne una rappresentazione sul piano cartesiano facendo corrispondere la variabile  $x_L$  all'asse delle ascisse e la variabile  $x_P$  a quello delle ordinate. Il bordo di ciascun vincolo corrisponde a una retta. Per esempio la retta  $x_L + x_P$  corrisponde al bordo del vincolo riguardante gli ettari a disposizione. Il semipiano ammissibile è quello che ricade in basso a sinistra rispetto alla retta. Considerando anche gli altri vincoli possiamo completare la rappresentazione della regione ammissibile. In Figura 2 è stata ombreggiata la regione definita dall'intersezione di tutti i semipiani che rappresentano i vincoli.

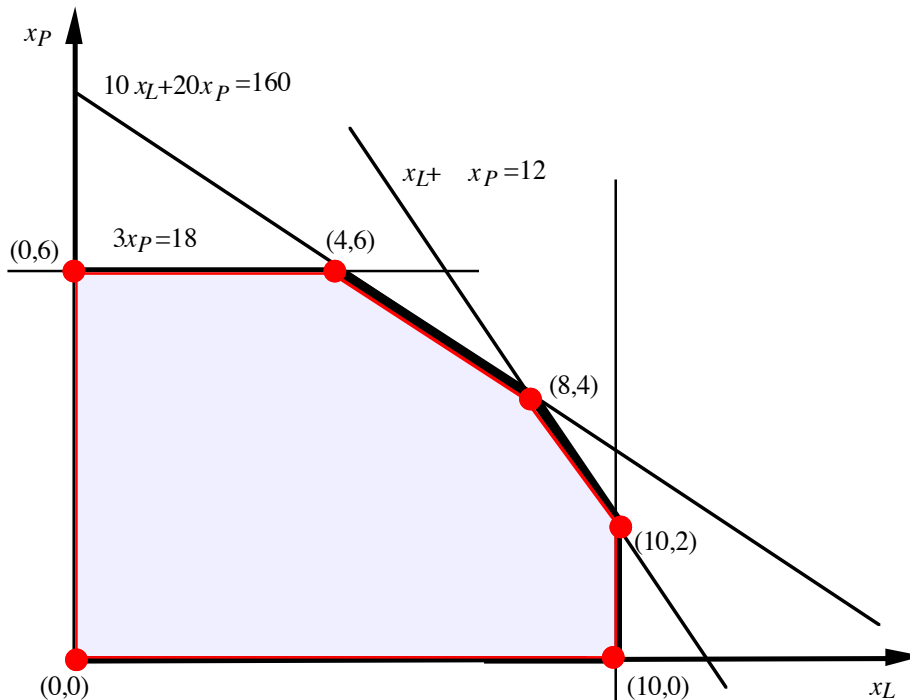


Figura 2: Rappresentazione geometrica e soluzione del problema del coltivatore

Qualsiasi punto appartenente alla regione ammissibile corrisponde a una possibile combinazione di coltivazioni. Ovviamente tali soluzioni sono infinite, per cercare la migliore possiamo restringere il campo di ricerca osservando che una soluzione ottima deve sfruttare al massimo almeno una risorsa. Questo significa che nella nostra ricerca possiamo concentrarci sui punti che appartengono al bordo della regione ammissibile, anzi, spingendo oltre la considerazione fatta sopra, possiamo concentrarci sui soli vertici. Tra tutti i vertici, vista la natura della funzione di valutazione della soluzione che ha i coefficienti positivi, possiamo senz'altro scartare l'origine (corrispondente a una soluzione che rende 0) e i punti  $\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$  che sono *dominati* rispettivamente da  $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$  e da  $\begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix}$ . Non ci rimane quindi che valutare le soluzioni corrispondenti ai punti  $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix}$ :

$x_L$	$x_P$	valore
4	6	42000
8	4	44000
10	2	40000

Tabella 2: valutazione delle soluzioni

La soluzione ottima è pertanto quella che prevede 8 ettari coltivati a lattuga e 6 a patate.

Appare evidente come il metodo utilizzato per risolvere il problema del coltivatore sia difficilmente utilizzabile per problemi con più di 2 o 3 variabili. Infatti, quand'anche fosse possibile individuare i vertici del poliedro corrispondente alla regione ammissibile, il loro numero potrebbe essere molto elevato e renderebbe assai dispendioso in termini di tempo la loro valutazione. Infatti dato un poliedro di  $\mathbf{R}^n$  descritto dalla intersezione di  $m$  semipiani corrispondenti alle disuguaglianze che definiscono i vincoli del problema, potenzialmente il numero di vertici potrebbe essere fino a  $\binom{m}{n}$ , dato che un vertice corrisponde all'intersezione di  $n$  rette linearmente indipendenti scelte fra le  $m$  corrispondenti ai bordi del poliedro.

Vedremo più avanti tecniche efficienti per risolvere questa classe di problemi. Tali metodi di soluzione ci forniranno anche informazioni aggiuntive relative alla soluzione, come per esempio il valore delle risorse, ovvero l'effetto dell'aumento di alcune risorse sul valore della soluzione ottima, o la stabilità della soluzione a fronte di variazioni dei coefficienti della funzione obiettivo.

### Esercizio

Fornire la rappresentazione geometrica e la soluzione ottima del problema dei telefonini.

## 5 Costruire modelli matematici di ottimizzazione

La costruzione di un modello matematico come astrazione di un problema reale è un processo complicato e difficilmente sistematizzabile. Si basa infatti su esperienza, intuizione e fantasia: tutti elementi difficili da insegnare con metodi tradizionali. Passiamo ora in rassegna alcuni elementi che possono venire utilizzati nella definizione di modelli matematici, in particolare soffermandoci su variabili, vincoli e funzioni obiettivo. Per fare ciò, più che dare regole generali, presenteremo una "carrellata" di esempi.

### 5.1 Variabili

Come visto negli esempi riportati fino qui, le variabili rappresentano delle decisioni. Nel caso più intuitivo, come nell'esempio del coltivatore e del gioco dei telefonini, le variabili rappresentano delle



*quantità assolute*: il numero di ettari da coltivare a lattuga o patate, il numero di telefonini di ciascun modello da assemblare. Le variabili di questo tipo possono essere sottoposte a vincoli riguardanti il segno o la loro natura. In particolare, sia nel caso del coltivatore che in quello dei telefonini, le variabili sono ristrette ad assumere valori non negativi, in quanto nei problemi in esame non ha significato coltivare delle quantità negative di terreno o produrre un numero negativo di telefonini. In altri casi potrebbe aver significato considerare delle variabili ristrette ad assumere valori non positivi, o delle *variabili libere in segno*. Vediamo un esempio di quest'ultimo caso.

Esempio: ottimizzazione dell'orario ferroviario

Dato un insieme di treni  $T=\{1,\dots,n\}$  e un insieme di stazioni presso le quali i treni fermano  $S=\{1,\dots,m\}$ , sono noti i tempi di arrivo  $a_{st}$  per ogni coppia  $(t,s)$ ,  $t\in T$ ,  $s\in S$ . Si vuole studiare l'effetto di una introduzione della variazione dei tempi di arrivo. Introduciamo quindi delle variabili  $\pi_{ts}$  che rappresentano le perturbazioni rispetto agli orari noti. Il nuovo orario del treno  $t$  nella stazione  $s$  sarà dato da  $a_{ts} + \pi_{ts}$ . Dato che la variazione potrebbe essere sia un ritardo ( $\pi_{ts}>0$ ) che un anticipo ( $\pi_{ts}<0$ ), o nulla, le variabili  $\pi_{ts}$  saranno non ristrette in segno.

Un'altra restrizione riguardante le variabili è quella relativa alla loro natura. Se consideriamo il caso dei telefonini, sembra abbastanza ovvio restringere l'attenzione alle soluzioni che arrivano ad assemblare un numero intero di telefoni, dato che le eventuali frazioni sarebbero prive di valore. Abbiamo quindi il caso delle *variabili intere*. La soluzione dei problemi con variabili intere è assai più complicata rispetto a quelli in cui le variabili sono continue, come avremo modo di vedere più avanti.

Un altro caso che ricorre spesso è quello delle variabili che rappresentano delle quantità relative. Vediamolo con un esempio.

Esempio: investimento di capitale

Si consideri il problema di decidere come investire un capitale di 137 k€ avendo a disposizione gli strumenti finanziari riportati in Tabella 3 ciascuno caratterizzato da una quantità massima acquistabile, e dall'entità della cedola staccata:

strumento	1	2	3	4	5
disponibilità massima in k€	40	12	130	5	400
cedola in k€	3.2	1.5	4.2	0.7	17

Tabella 3: caratteristiche degli strumenti finanziari

Le decisioni da prendere riguardano la quantità di ogni strumento finanziario che si desidera acquistare ( $x_i$ ,  $i=1,\dots,5$ ). Questa volta, invece che indicare un valore assoluto il cui limite superiore dovrebbe variare per ciascuna variabile, le variabili  $x_i$  rappresentano il *valore relativo* di ciascun fondo che si acquista, assumendo quindi valori compresi tra 0 e 1.

È abbastanza semplice comprendere l'utilizzo di tali variabili guardando il modello completo del problema che ha ovviamente l'obiettivo di massimizzare il guadagno dovuto agli interessi percepiti proporzionalmente all'investimento, con il vincolo di non superare il budget a disposizione.

$$\begin{aligned} \max \quad & 3.2x_1 + 1.5x_2 + 4.2x_3 + 0.7x_4 + 17x_5 \\ & 40x_1 + 12x_2 + 130x_3 + 5x_4 + 400x_5 \leq 137 \\ & 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

Variabili che rappresentano valori relativi vengono spesso utilizzate nel formulare problemi di instradamento su reti (stradali o di telecomunicazione) e descrivono la percentuale di traffico che circola su ciascun collegamento della rete.

#### Esercizio

Formulare il problema di investimento utilizzando variabili che rappresentano valori assoluti, mettendo in luce le differenze con il modello presentato sopra.

Se imponiamo i vincoli di interezza alle variabili che rappresentano valori relativi stiamo di fatto vincolando le variabili ad assumere valore 0 oppure 1, dando loro una valenza *logica*. Nel caso del problema di investimento si tratterebbe quindi di scegliere per intero o di scartare i vari strumenti. Viene più naturale pensare allo stesso problema in termini di oggetti, come nel seguente esempio.

#### Esempio: rapinatore

Un rapinatore si introduce furtivamente in una gioielleria avendo a disposizione un sacco con capacità di 8 chili. Trova a portata di mano sei oggetti il cui valore  $v_i$  in migliaia di euro è rispettivamente: 7, 2, 4, 5, 4 e 1; il loro peso  $p_i$  invece è rispettivamente di 5, 3, 2, 3, 1 e 1 chili. Potendo utilizzare il solo sacco a disposizione per trasportare la refurtiva, il ladro vuole effettuare la scelta di oggetti che massimizzi il valore complessivo.

Possiamo rappresentare il problema in due modi. Un primo modo è di tipo insiemistico. Sia  $O = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , la nostra variabile decisionale è data dall'insieme  $S \subseteq O$ ; vogliamo trovare un sottoinsieme  $S$  tale che  $\sum_{i \in S} p_i \leq 8$ , e che massimizzi  $\sum_{i \in S} v_i$ . In alternativa possiamo introdurre una variabile di scelta  $x_i$  per ogni oggetto  $i \in O$  che vale 1 se e solo se l'oggetto  $i$  viene scelto e 0 altrimenti. Le variabili decisionali sono di tipo "logico", ovvero per ogni oggetto dobbiamo decidere se includerlo o meno nella soluzione:  $x_i$  varrà 1 se l'oggetto  $i \in S$  e 0 altrimenti. In questo modo il problema viene rappresentato dal seguente modello:

$$\begin{aligned} \max \quad & 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 4x_5 + x_6 \\ & 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 \leq 8 \\ & x_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, 6. \end{aligned}$$

A volte si ha la necessità di effettuare una scelta tra un insieme finito di valori, pertanto la variabile che rappresenta tale scelta non rientra in nessuna delle categorie menzionate sopra e parliamo di *variabile a valori discreti*. Il contesto tipico è quello delle reti di telecomunicazione.

#### Esempio: capacità di una rete di telecomunicazione

Nel dimensionamento delle reti di telecomunicazione spesso si pone il problema di allocare capacità di trasmissione sui collegamenti diretti tra due centri. Considerato un collegamento  $l$ , la variabile con la quale decidiamo la capacità di tale link è  $w_l$  che può assumere uno solo tra i valori  $d_1, d_2, \dots, d_r$  caratteristici della capacità di trasmissione e dipendenti dalla tecnologia adottata:

$$w_l \in \{d_1, d_2, \dots, d_r\}.$$

Questa caratteristica può essere espressa introducendo  $r$  variabili logiche  $\{0,1\}$  che rappresentano la scelta o meno di uno degli  $r$  valori di capacità e ponendo la variabile reale  $w_l$  uguale alla seguente espressione:

$$w_l = d_1 y_1 + d_2 y_2 + \dots + d_r y_r.$$

Ovviamente è necessario aggiungere un vincolo che assicura il fatto che uno solo dei valori  $d_1, d_2, \dots, d_r$  sia attribuito alla variabile  $w_l$ , cioè:

$$y_1 + y_2 + \dots + y_r = 1.$$

Quest'ultimo caso vede già la necessità di introdurre dei vincoli per permettere alle variabili di assumere il significato voluto, cosa che verrà approfondita nel prossimo paragrafo. Ora invece discutiamo brevemente delle trasformazioni a cui possiamo sottoporre le variabili.

Una prima semplice trasformazione riguarda il segno delle variabili. Se una variabile  $x$  è ristretta ad assumere valori non positivi e, per comodità di notazione o altri motivi, abbiamo bisogno di avere nel modello una variabile non negativa, possiamo introdurre una nuova variabile  $x'$ , che poniamo uguale a  $-x$  e operare le dovute sostituzioni in tutto il modello. La nuova variabile  $x'$  è ristretta ad assumere valori non negativi. La stessa trasformazione può avvenire anche nel verso contrario e trasformare una variabile non negativa in una non positiva.

Più delicata è la trasformazione di una variabile libera in segno in una vincolata. In tal caso è necessario introdurre una coppia di variabili. Per semplicità consideriamo l'esempio dell'orario dei treni visto in precedenza.

#### Esempio: ottimizzazione dell'orario ferroviario

Le variabili non ristrette in segno  $\pi_{ts}$  rappresentano le perturbazioni rispetto agli orari noti  $a_{ts}$  per ogni coppia treno-stazione  $(t,s)$ . Quando la variazione è un ritardo  $\pi_{ts} > 0$  e quando è un anticipo  $\pi_{ts} < 0$ . Se nel nostro modello abbiamo necessità di avere tutte variabili non negative allora introduciamo una coppia di nuove variabili  $\pi_{ts}^+, \pi_{ts}^-$  che rappresentano rispettivamente il ritardo e l'anticipo del treno  $t$  nella stazione  $s$ . Il valore della vecchia variabile  $\pi_{ts}$  è ottenibile facendo la differenza  $\pi_{ts}^+ - \pi_{ts}^-$ .

Un'altra utile trasformazione riguarda il complemento delle variabili logiche. Data una variabile logica  $x$ , se abbiamo bisogno di una variabile che assuma i valori complementari basta introdurre una nuova variabile  $x' = 1 - x$ .

## 5.2 Vincoli

A parte il vincolo visto per la definizione della variabile a valori discreti, fino ad ora abbiamo visto i tipici *vincoli sulle disponibilità delle risorse* (si veda l'esempio del coltivatore, della scelta degli investimenti e del rapinatore). Vincoli analoghi, solo rovesciati, sono quelli legati al *fabbisogno*.

#### Esempio: dieta

Si consideri il problema di determinare la dieta giornaliera avendo a disposizione vari cibi ognuno con le proprie caratteristiche nutrizionali. Prendiamo ad esempio la seguente tabella con i tipici cibi della mensa del Politecnico di Milano:

Cibo	Pasta	Riso	Fettina di lonza	Carote	Patate	Pera
Calorie per hg	300	250	200	70	180	100

Tabella 4: apporti calorici

Il fabbisogno imposto dal dietologo è di almeno 700 calorie. Per esprimere il vincolo del dietologo introduciamo delle variabili  $x_i$  per i vari cibi  $i$  che rappresentano la quantità di cibo assunta (in hg) e il vincolo sarà:

$$300 x_{pasta} + 250 x_{riso} + 200 x_{lonza} + 70 x_{carote} + 180 x_{patate} + 100 x_{pera} \geq 700$$

Talvolta risulta utile trasformare i vincoli di maggiore o uguale (come quello visto nell'esempio della dieta) o di minore o uguale (come quelli visti nell'esempio del coltivatore) in vincoli equivalenti di uguaglianza. La trasformazione necessita dell'introduzione di una nuova variabile per vincolo che rappresenta il margine rispetto al fabbisogno (nel caso di  $\geq$ ) o l'avanzo di risorse rispetto alla disponibilità (nel caso di  $\leq$ ). Prendiamo il caso del vincolo sulla disponibilità di stallatico nel problema del coltivatore, volendolo trasformare in uguaglianza abbiamo:

$$10 x_L + 20 x_P + x_S = 160$$

dove la nuova variabile  $x_S \geq 0$  è detta *variabile di scarto* e dà la misura di quanta risorsa rimane a disposizione. Se consideriamo il vincolo sul fabbisogno della dieta, volendolo trasformare in uguaglianza abbiamo:

$$300 x_{pasta} + 250 x_{riso} + 200 x_{lonza} + 70 x_{carote} + 180 x_{patate} + 100 x_{pera} - x_S = 700$$

dove la variabile di scarto  $x_S \geq 0$  dà la misura di quanto stiamo eccedendo il fabbisogno calorico.

Una importante classe di vincoli è rappresentata dai *vincoli di flusso* che emergono in moltissimi campi applicativi, tanto che una parte del corso è dedicata esplicitamente ai metodi di soluzione di questo tipo di problemi. Prendiamo in esame un semplice esempio.

#### Esempio: rete di oleodotti

Un campo petrolifero costituito da vari pozzi convoglia verso le raffinerie il petrolio utilizzando una rete di oleodotti secondo lo schema rappresentato in Figura.

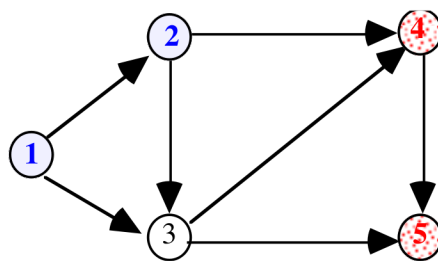


Figura 3: lo schema della rete di oleodotti

I nodi 1 e 2 rappresentano i pozzi che producono rispettivamente 10.000 e 15.000 barili di petrolio al giorno, mentre i nodi 4 e 5 rappresentano le raffinerie con una richiesta di 13.000 e 9.000 barili al giorno. Il nodo 3 è un centro di smistamento senza possibilità di immagazzinamento. Le frecce rappresentano i tubi e il verso di pompaggio del petrolio. Le variabili decisionali in gioco sono la

quantità  $x_{ij}$  di petrolio da inviare lungo ciascun tubo  $(i,j)$ . Se prendiamo in esame il nodo-pozzo 1, abbiamo che la quantità di petrolio uscente non può superare la disponibilità, quindi:

$$x_{12} + x_{13} \leq 10.000$$

Per il nodo-pozzo 2 il vincolo è solo complicato dal fatto che in 2 oltre alla disponibilità propria del pozzo, dobbiamo considerare anche il petrolio che arriva dal nodo 1:

$$x_{23} + x_{24} \leq 15.000 + x_{12}.$$

Analogamente, i nodi-raffineria 5 e 4 danno origine ai seguenti vincoli:

$$x_{35} + x_{45} \geq 9.000$$

$$x_{24} + x_{34} \geq 13.000 + x_{45}.$$

Il vincolo riguardante il nodo 3 impone semplicemente che il flusso entrante deve essere uguale a quello uscente:

$$x_{13} + x_{23} = x_{34} + x_{35}.$$

### Esercizio

Trasformare i vincoli di disuguaglianza riguardanti i pozzi e le raffinerie in uguaglianze introducendo opportune variabili di scarto. Dare una interpretazione fisica di queste variabili, osservando che nel problema le variabili sono legate a flussi di petrolio.

Una classe di vincoli che ricorre spesso nei problemi di miscelazione (tipici nell'industria siderurgica o in quella petrolifera) è quella dei vincoli di qualità o di *blending*. In pratica si impone che un prodotto o sottoprodotto del processo di produzione soddisfi dei vincoli sulla qualità della composizione.

### Esempio: dieta

Nel caso della dieta visto prima, uno di questi vincoli potrebbe essere per esempio che la quota calorica dovuta a contorno e frutta costituisca almeno il 30% del totale. Siccome il computo totale delle calorie dipende dalla soluzione che otterremo, il vincolo deve venire espresso come segue:

$$\frac{70 x_{carote} + 180 x_{patate} + 100 x_{pera}}{300 x_{pasta} + 250 x_{riso} + 200 x_{lonza} + 70 x_{carote} + 180 x_{patate} + 100 x_{pera}} \geq 0.3.$$

Purtroppo però il vincolo scritto in questo modo non è lineare come quelli visti in precedenza e, come vedremo in seguito, vincoli non lineari possono dar luogo a modelli molto difficili da affrontare. Ad ogni modo, osservando che per una soluzione ottima il denominatore della frazione è sempre positivo, possiamo trasformare il vincolo moltiplicando entrambi i termini per l'espressione al denominatore e semplificando nel seguente modo:

$$-90 x_{pasta} - 75 x_{riso} - 60 x_{lonza} + 49 x_{carote} + 126 x_{patate} + 70 x_{pera} \geq 0.$$

I vincoli che riguardano l'utilizzo delle variabili logiche sono molto interessanti, dato che possono essere utilizzati per tradurre in termini matematici tutte le relazioni logiche che intercorrono tra le variabili. Abbiamo già introdotto uno di questi vincoli nella definizione delle variabili a valori discreti: si trattava di un vincolo di esclusione, infatti la variabile  $w_l$  poteva assumere esattamente uno dei valori,

il che veniva imposto consentendo al massimo a una variabile logica  $y_i$  di valere 1. Una variante potrebbe consentire alla variabile  $w_i$  di assumere anche il valore 0, che nel contesto dell'esempio corrisponderebbe a non allocare alcuna capacità sul collegamento in questione. In tal caso il vincolo sarebbe:

$$\sum_{i=1}^r y_i \leq 1.$$

Simili vincoli di esclusione sono un po' più laboriosi da gestire se riguardano variabili non di tipo logico, e richiedono l'introduzione di opportune variabili logiche extra.

### Esempio: dieta

Consideriamo un vincolo di esclusione del tipo: una dieta equilibrata comprende pasta o riso, ma non entrambi. Se le variabili  $x_{pasta}$  e  $x_{riso}$  fossero di tipo logico, imporre questo vincolo sarebbe analogo a quanto fatto sopra, ma purtroppo si tratta di variabili continue che rappresentano una quantità. Dobbiamo introdurre due variabili logiche  $y_{pasta}$  e  $y_{riso}$  che devono assumere il seguente significato:

$$y_{pasta} = \begin{cases} 1 & \text{se } x_{pasta} > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$y_{riso} = \begin{cases} 1 & \text{se } x_{riso} > 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per indurre le variabili  $y_{pasta}$  e  $y_{riso}$  ad assumere il significato di cui sopra, dobbiamo introdurre degli opportuni vincoli che le leghino effettivamente al valore di  $x_{pasta}$  e  $x_{riso}$ . Supponendo che in qualsiasi soluzione ammissibile  $x_{pasta}$  e  $x_{riso}$  possano valere al massimo  $M_{pasta}$  e  $M_{riso}$  i vincoli che mettono in relazione le  $x$  e le  $y$  sono:

$$x_{pasta} \leq M_{pasta} y_{pasta}$$

$$x_{riso} \leq M_{riso} y_{riso}$$

$$y_{pasta}, y_{riso} \in \{0,1\}$$

in tal modo se  $x_{pasta}$  o  $x_{riso}$  assumono valore maggiore strettamente di 0, le corrispondenti variabili logiche  $y$  devono valere 1 e il vincolo di esclusione è:

$$y_{pasta} + y_{riso} \leq 1.$$

Possiamo osservare che  $y_{pasta}$  e  $y_{riso}$  non sono obbligate ad assumere valore 0 se la corrispondente variabile  $x$  vale 0. Dovremo quindi tener presente questo fatto nella formulazione completa del problema in modo da evitare che simili soluzioni possano inficiare la validità del modello.

I vincoli di esclusione sono un caso particolare di vincolo logico (or esclusivo). Vediamone altri come per esempio le implicazioni: se la variabile  $x_1$  vale 1, allora deve valere 1 anche la variabile  $x_2$ ; vedendo le variabili in accordo al loro significato logico il vincolo rappresenta l'implicazione  $x_1 \Rightarrow x_2$ . Ricordando il significato dell'implicazione, tra tutte le configurazioni di valori delle variabili quello che dobbiamo vietare è  $x_1=1, x_2=0$ , che viene tradotto in termini matematici come:

$$x_1 \leq x_2.$$

Anche la negazione è facilmente traducibile in termini matematici utilizzando il complemento a 1, come abbiamo visto parlando delle variabili. Quindi ad esempio l'implicazione  $x_1 \Rightarrow \neg x_2$  viene tradotta come:

$$x_1 \leq (1-x_2) \text{ e quindi } x_1 + x_2 \leq 1.$$

Se vogliamo generalizzare le implicazioni al caso di più variabili, consideriamo  $n+1$  variabili  $x_1, x_2, \dots, x_n$  e  $y$ , e il vincolo: "se almeno  $m$  variabili tra  $x_1, x_2, \dots, x_n$  valgono 1 allora  $y$  deve valere 1". La sua traduzione in termini matematici è:

$$y \geq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n - m + 1}{n - m + 1}.$$

Osserviamo infatti che l'unico modo di avere una quantità maggiore di zero a destra del  $\geq$  è fissare il valore di almeno  $m$  variabili  $x$  a 1. La quantità al denominatore serve a non superare mai il valore 1.

### \*Esempio: il problema della soddisfattibilità

Interessante è analizzare il legame che vi è tra il calcolo proposizionale e la programmazione matematica. Sia  $A$  una formula in *Forma Normale Congiuntiva* (FNC):

$$A = C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_m,$$

dove  $C_1, C_2, \dots, C_m$  sono clausole del tipo

$$C_i = \pm P_1 \vee \pm P_2 \vee \dots \vee \pm P_r,$$

e con  $\pm P_j$  si indica o la proposizione elementare  $P_j$  o la sua negata  $\neg P_j, j=1, \dots, n$ .

Un classico problema di logica si propone di determinare, se esiste, un valore di verità per le proposizioni  $P_1, P_2, P_n$  che renda vera la formula  $A$ . Tale problema è noto come *Problema di Soddisfattibilità*.

Si noti che il problema della soddisfattibilità non è in realtà un problema di ottimizzazione, dato che non vi è una funzione obiettivo da massimizzare o minimizzare, sebbene la sua natura combinatoria sia evidente. Una variante di ottimizzazione è quella nota come massima soddisfattibilità in cui l'obiettivo è quello di massimizzare il numero di clausole soddisfatte (o minimizzare il numero di clausole non soddisfatte). Una formula è soddisfattibile se il valore ottimo del problema di massima soddisfattibilità è uguale al numero di clausole.

Consideriamo la clausola:

$$P_1 \vee \neg P_2 \vee P_3 \vee \neg P_4$$

che asserisce che almeno uno dei letterali  $P_1, \neg P_2, P_3$  o  $\neg P_4$  sia vero. Se facciamo corrispondere a ciascuna proposizione elementare  $P_i$  una variabile 0-1  $x_i$ , essa può essere scritta come:

$$\begin{aligned} x_1 + (1 - x_2) + x_3 + (1 - x_4) &\geq 1, \\ x_i &\in \{0,1\}, i=1, \dots, 4. \end{aligned}$$

La precedente relazione può essere scritta come

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \geq 1 - 2.$$

Quindi una notazione generale per le clausole è data da:

$$ax \geq 1 - n(a)$$

dove  $n(a)$  è uguale al numero di componenti negative nel vettore  $a = [a_1, \dots, a_n]$ :

$$a_j = \begin{cases} 1, & \text{se appare il letterale } P_j, \\ -1, & \text{se appare il letterale } \neg P_j, \\ 0, & \text{se la proposizione atomica } P_j \text{ non appare.} \end{cases}$$

Si suppone ovviamente che non tutte le componenti  $a_j$  siano nulle.

Data una formula  $H$  in forma normale congiuntiva (FNC) il sistema di disequazioni corrispondenti alle clausole di  $H$  verrà indicato con

$$P: \quad \begin{aligned} Ax &\geq b \\ x &\in \{0,1\}^n. \end{aligned}$$

Determinare la soddisfattibilità di  $H$  equivale a determinare la consistenza di  $P$ . Il problema di determinare se esistono soluzioni per  $P$  può essere trasformato nel seguente problema:

$$L: \quad \begin{aligned} \max \quad & cx \\ & Ax \geq b' \\ & x \in \{0,1\}^n; \end{aligned}$$

dove  $cx$  è il lato sinistro di un qualche vincolo  $ax \geq 1 - n(a) \in P$  e il sistema di disequazioni  $A'x \geq b'$  è il sistema  $Ax \geq b$  senza la disequazione  $ax \geq 1 - n(a)$ .

La formula  $H$  è soddisfattibile se il max di  $L$  è maggiore o uguale di  $1 - n(a)$ .

Per vedere se una formula  $H$  (il sistema equivalente  $P$ ) implica logicamente una clausola  $D$  (la disequazione  $dx \geq 1 - n(d)$ ) ci si può ricondurre alla seguente formulazione:

$$L': \quad \begin{aligned} \min \quad & dx \\ & Ax \geq b \\ & x \in \{0,1\}^n. \end{aligned}$$

$H$  implica logicamente  $D$  se e solo se il minimo valore della funzione obiettivo di  $L'$  è maggiore o uguale di  $1 - n(d)$ .

### 5.3 Funzioni obiettivo

Negli esempi visti fin qui le funzioni obiettivo erano la minimizzazione o la massimizzazione di opportune funzioni lineari. Volendo trasformare un problema di massimizzazione in un equivalente problema di minimizzazione (o viceversa) basta applicare la seguente trasformazione in cui abbiamo moltiplicato due volte per  $-1$  la funzione obiettivo:

$$\max \sum_j c_j x_j \equiv - \min \sum_j (-c_j) x_j.$$

Il segno meno che precede la minimizzazione è ininfluente sulle decisioni necessarie alla determinazione della soluzione ottima. Volendo riportare il valore della soluzione ottima del problema



di minimizzazione alla scala dei valori iniziale, bisognerà cambiarle di segno. Si noti che non bisogna cambiare il segno alle variabili decisionali, ma solo al valore della soluzione ottima.

Una classe diversa di funzioni obiettivo che merita attenzione è quella delle funzioni di tipo *bottleneck*, in cui si vuole minimizzare il massimo tra un insieme di valori (*minmax*) o massimizzare il minimo (*maxmin*). Consideriamo il seguente esempio.

Esempio: localizzazione di stazioni radio base

Nel pianificare una rete di telefonia cellulare bisogna installare le antenne delle stazioni radio-base scegliendo tra un insieme di siti candidati  $S=\{1,\dots,m\}$  in modo da servire un insieme di clienti  $C=\{1,\dots,n\}$ . Per raggiungere un cliente  $i$  l'antenna installata in  $j$  deve trasmettere con una potenza  $p_{ij}$ . Vogliamo decidere dove installare le stazioni radio base in modo da minimizzare la massima potenza emessa. Le variabili in gioco sono quelle che rappresentano la scelta di dove installare le antenne:  $y_j$  vale 1 se una antenna viene messa nel sito  $j$  e 0 altrimenti. Inoltre avremo le variabili  $x_{ij}$  che assegnano i clienti alle antenne, ( $x_{ij}=1$  se il cliente  $i$  viene servito dalla antenna  $j$  e 0 altrimenti). I vincoli riguardano il fatto che ogni cliente deve essere servito:

$$\sum_{j \in S} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in C.$$

Inoltre dobbiamo introdurre dei vincoli che rendono coerente l'assegnamento di un cliente con la scelta delle antenne installate, pertanto un vincolo che imponga di non assegnare clienti alle stazioni non attivate. Abbiamo due modi di scrivere questo vincolo: il primo modo è più sintetico dato che considera assieme tutti i clienti che possono venire collegati a una determinata antenna:

$$\sum_{i \in C} x_{ij} \leq n y_j \quad \forall j \in S.$$

Si noti come questo tipo di vincoli richiami l'implicazione generalizzata vista precedentemente. Il secondo modo di rappresentare i vincoli di coerenza considera ogni singola coppia cliente-antenna:

$$x_{ij} \leq y_j \quad \forall i \in C, \forall j \in S.$$

Anche in questo caso si tratta di una implicazione: se  $i$  è assegnato a  $j$  allora  $j$  deve avere una antenna installata. Questi due modi di rappresentare i vincoli di coerenza sono equivalenti dal punto di vista modellistico. Se consideriamo invece l'efficienza di soluzione, il secondo tipo di formulazione, nonostante il maggior numero di vincoli, permette ai solutori di problemi di Programmazione Lineare Intera di essere più efficienti. Consideriamo ora la funzione obiettivo che comporta la minimizzazione del massimo livello di potenza emesso:

$$\min \max_{i \in C, j \in S} p_{ij} x_{ij}.$$

La funzione obiettivo vera e propria ( $\max_{i \in C} p_{ij} x_{ij}$ ) che si intende minimizzare è evidentemente non lineare, ma con opportuni accorgimenti può venire "linearizzata". Per fare ciò è necessario introdurre una variabile  $d$  che ha il compito di determinare il valore della funzione obiettivo. Pertanto ora la funzione obiettivo si riduce a:

Ora bisogna aggiungere dei vincoli in modo da legare la variabile  $d$  con il resto della soluzione:

$$d \geq p_{ij}x_{ij} \quad \forall i \in C, \forall j \in S.$$

In questo modo la variabile  $d$  non può valere meno del massimo valore di potenza tra ogni cliente e l'antenna a cui è assegnato, però il segno dell'ottimizzazione (minimo) spingerà  $d$  ad assumere esattamente il valore del massimo.

### Esercizio

Si formuli il problema in cui si vuole massimizzare la minima potenza emessa.

Molto spesso nell'affrontare un problema reale di ottimizzazione non ci si pone un solo obiettivo, ma potrebbero essercene vari, spesso in contrasto fra loro. Si rientra nel caso della programmazione a molti obiettivi. Vediamo due modi di affrontare questi casi riprendendo una variante dell'esempio di prima.

### Esempio: localizzazione di stazioni radio base considerando il costo di realizzazione

Nell'esempio precedente ci eravamo concentrati sugli aspetti legati alla potenza, adesso invece consideriamo il costo della realizzazione della rete ponendoci l'obiettivo di minimizzarlo. A differenza dell'esempio precedente quindi consideriamo un costo di installazione  $c_j > 0$  per ciascun sito candidato  $j$ . I vincoli del problema sono invariati, mentre la funzione obiettivo considera i costi ed è:

$$\min \sum_{j \in S} c_j y_j.$$

Consideriamo ora una situazione in cui non si richiede la copertura totale dell'insieme degli utenti, pertanto il vincolo di copertura da uguaglianza diventa disuguaglianza:

$$\sum_{j \in S} x_{ij} \leq 1 \quad \forall i \in C.$$

È evidente che il problema di ottimizzazione che minimizza i costi di installazione senza il vincolo di copertura di tutti gli utenti ha come soluzione ottima la soluzione nulla. Possiamo quindi porci come secondo obiettivo quello di massimizzare il numero di clienti serviti, che è in contrasto con quello di minimizzare il costo.

Vi sono due modi di considerare due (o più) funzioni obiettivo. Un primo modo tenta di ridurre le due funzioni ad una stessa scala di valori, considerando entrambi i criteri su uno stesso piano e includendoli in una unica *funzione di utilità*. Nell'esempio delle rete cellulare introduciamo un parametro  $\alpha$  che quantifica in termini economici il vantaggio di avere un nuovo utente collegato. La funzione di utilità quindi diventa:

$$\max \alpha \sum_{i \in C} \sum_{j \in S} x_{ij} - \sum_{j \in S} c_j y_j$$

o alternativamente

$$\min \sum_{j \in S} c_j y_j - \alpha \sum_{i \in C} \sum_{j \in S} x_{ij}$$

Si noti che il contributo alla funzione di utilità dovuto al numero di utenti serviti è negativo, dato che il segno di ottimizzazione è di minimo. Inoltre la scelta del parametro  $\alpha$  deve essere tale da privilegiare la copertura rispetto ai costi, per non ottenere la soluzione nulla, cosa abbastanza probabile con valori di  $\alpha$  troppo piccoli.

Il secondo modo di trattare problemi con più obiettivi è quello di fissare dei valori di riferimento per alcuni obiettivi da mettere esplicitamente nei vincoli del problema e lasciare nella funzione obiettivo una unica funzione. Sempre nel caso dell'installazione di antenne per stazioni radio base, si potrebbe fissare un limite massimo per le spese di installazione, chiamiamolo  $B$ , e massimizzare la copertura degli utenti. Pertanto la formulazione sarebbe:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in C} \sum_{j \in S} x_{ij} \\ & \sum_{j \in S} c_j y_j \leq B \end{aligned}$$

oltre ai vincoli già descritti precedentemente.

## 6 Utilizzo del linguaggio di modellazione

Per dare in input un modello di ottimizzazione e i suoi dati a un computer in modo da poter ottenere la soluzione ottima si ricorre in genere a qualche linguaggio di ottimizzazione, come AMPL, MPL, GAMS, LINGO, Mosel, OPL, per citare i più diffusi. Le differenze fra i vari linguaggi sono minime ed è facile passare da uno all'altro. In seguito adotteremo AMPL come riferimento, scaricabile in versione studenti da internet nel sito <http://www.ampl.com>, dotato anche del solutore CPLEX.

Vi sono vari modi di utilizzare il linguaggio per scrivere un modello di programmazione lineare. L'ideale è riuscire a scrivere in modo da rendere il codice quanto più leggibile possibile e in modo tale che in caso di necessità sia facile intervenire per apportare eventuali modifiche.

### Esempio: coltivatore (cont)

In questo primo esempio scriviamo il modello del coltivatore nel modo più banale, utilizzando minimamente le potenzialità del linguaggio.

```
var xlattuga;
var xpatate;
maximize profitto: 3000 * xlattuga + 5000 * xpatate;
subject to
    disp_ettari: xlattuga + xpatate <= 12;
    disp_semi: 7 * xlattuga <= 70;
    disp_tuberi: 3 * xpatate <= 18;
    disp_concime: 10 * xlattuga + 20 * xpatate <= 160;
```

I comandi sopra elencati possono venire digitati direttamente o messi in un apposito file. Inizialmente sono state dichiarate le variabili oggetto di ottimizzazione. Per comodità di interpretazione abbiamo

dato un nome a ogni vincolo e alla funzione obiettivo. Si noti però che il fatto di avere assieme struttura del modello e dati rende poco flessibile la gestione.

Per rendere il modello parametrico e non dover riscrivere tutto il codice al minimo cambiamento dei dati si separa quella che è la struttura del problema (file .mod in AMPL) da quelli che sono i dati (file .dat in AMPL). Un elemento fondamentale che gioca un ruolo decisivo nella descrizione del modello è la struttura degli *insiemi* (parola chiave set in AMPL). Infatti gli insiemi permettono di indicizzare variabili, vincoli, e parametri del modello. Inoltre verranno introdotti dei nomi simbolici per tutti i parametri del problema, un po' come abbiamo fatto scrivendo il problema in forma matriciale. Riprendiamo l'esempio del coltivatore.

#### Esempio: coltivatore (cont)

Gli insiemi da introdurre in questo caso sono due: un insieme che si riferisce a variabili e rendimenti che possiamo chiamare "coltivazioni", e un insieme da riferire ai vincoli che possiamo chiamare "risorse". I parametri sono le rese per ettaro (vettore  $c$ ) indicizzate per coltivazione, gli assorbimenti delle risorse (matrice  $A$ ) indicizzati per risorse e per coltivazione e le disponibilità di risorse (vettore  $b$ ), ovviamente indicizzate sulle risorse. Chiamiamo le variabili  $x$  indicizzandole sulle coltivazioni. Nella dichiarazione delle variabili è possibile indicare i limiti superiori o inferiori, come per esempio i vincoli di segno. Il file coltivatore.mod è quindi il seguente:

```
set coltivazioni;
set risorse;

param resa{coltivazioni};
param disponibilita{risorse};
param assorbimento{risorse,coltivazioni};

var x{coltivazioni}>=0;
maximize profitto: sum{j in coltivazioni} resa[j]*x[j];
subject to limite_risorse{i in risorse}:
    sum{j in coltivazioni} assorbimento[i,j]*x[j] <= disponibilita[i];
```

File coltivatore.mod

Si noti come sia stato possibile assegnare un nome alla funzione obiettivo (profitto) e a ciascun vincolo (limite\_risorse indicizzato sulle risorse).

Nello specificare i dati nel file coltivatore.dat bisogna indicare tutto quello che nel file coltivatore.mod è parametrico. Quindi gli elementi degli insiemi e i valori numerici dei parametri. Il file coltivatore.dat è il seguente

```
set coltivazioni:= lattuga patate;
set risorse:= ettari semi tuberi concime;

param resa:= lattuga 3000 patate 5000;
param disponibilita ettari 12 semi 70 tuberi 18 concime 160;
param assorbimento: lattuga patate:=
    ettari    1    1
    semi      7    0
    tuberi    0    3
    concime  10   20;
```

File coltivatore.dat

Per la sintassi esatta del linguaggio AMPL e la modalità di esecuzione del codice rimandiamo al libro di AMPL o alla sintesi del manuale reperibile sul sito del corso.

**Esercizio**

Fornire il codice AMPL per il problema dei telefonini e determinare la soluzione ottima per mezzo del solutore XPress-MP.