Laboratorio: Ottimizzazione su reti

Luigi De Giovanni

Dipartimento di Matematica, Università di Padova

Cammino minimo: modello

Variabili decisionali: $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{l'arco } (i,j) \text{ è sul cammino minimo;} \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$

$$\min \quad \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$$

s.t.

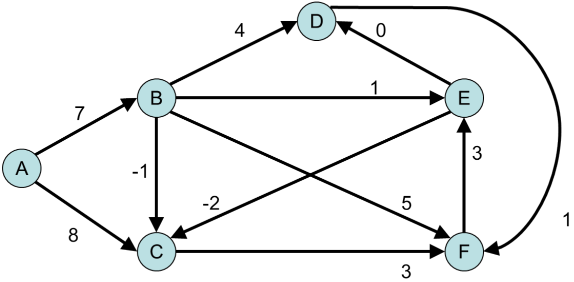
$$\sum_{(i,v)\in A} x_{iv} - \sum_{(v,j)\in A} x_{vj} = \begin{cases} -1, & v = s; \\ +1, & v = d; \\ 0, & v \in N \setminus \{s,d\}. \end{cases}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \equiv \mathbb{R}_+ \quad \forall\,(i,j) \in A$$

Caso **particolare MCF**: un nodo domanda s e un nodo offerta d

Cammino minimo: esempio

Si determini con AMPL il cammino minimo da A a F nel seguente grafo



Suggerimento: si considerino variabili x_{ij} per ogni coppia di nodi, assegnando un valore di c_{ij} molto alto per gli archi che non (utilizzare la parola chiave `default`)

Soluzioni e discussione

Cammini minimi

- `sp0.mod`, `sp0.dat`
- `sp.mod`, `sp.dat`

Max hop

- `spH.mod`, `sp.dat`

La soluzione del rilassamento continuo è intera!

Per calcolare il rilassamento continuo: `option relax_integrality 1`

Cammini minimi vincolati

Ad esempio, sono dati i consumi per tratta w_{ij} e la disponibilità di carburante nel serbatoio W

- `spW.mod`, `spW.dat`

La soluzione del rilassamento continuo potrebbe non essere intera:
si perde la totale unimodularità

Albero dei cammini minimi

Calcolare con AMPL l'albero dei cammini minimi da A verso gli altri nodi

- `sptree.mod`, `sptree.dat`

Suggerimento: usare il modello del flusso di costo minimo, con il nodo offerta A e tutti gli altri nodi domanda, con domanda unitaria.

Considerare un vincolo sul peso totale degli archi dell'albero (notare che si perde la totale unimodularità della matrice)

- `sptreeW.mod`, `sptreeW.dat`

Modello PL per flusso di costo minimo

- parametri b_i: bilanciamento al nodo i
  - $b_A = 5 = |N| - 1$
  - $b_{i \neq A} = 1$
- variabili: quantità x_{ij} da far fluire sull'arco $(i,j) \in A$

$$
\begin{array}{lrcll}
\min & \displaystyle\sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} & & & \\
s.t. & \displaystyle\sum_{(i,v)\in A} x_{iv} - \sum_{(v,j)\in A} x_{vj} & = & b_v & \forall \; v \in N \\
 & x_{ij} & \in & \{0,1\} &
\end{array}
$$

Esercizio

Si vogliono trasferire 50 unità da A a F: calcolare in che modo le unità devono essere distribuite sulla rete in modo da minimizzare il costo. Si sonsideri il trasferimento di un numero intero di unità.

Suggerimento: *si tratta da un problema di flusso di costo minimo, con un nodo offerta e un nodo domanda.*

- `mcf.mod`, `mcf.dat`

Domanda: cambierebbe la soluzione se le unità fossero frazionabili?

Esercizio (Max-Flow)

Si determini il massimo numero *maxf* di unità che possono essere trasferite da A a F.

Suggerimento: *il problema può essere modellato come flusso di costo minimo, introducendo una variabile relativa a maxf da trasferire da A (bilanciamento $-maxf$) a F (bilanciamento $+maxf$).*

- `maxf.mod`, `maxf.dat`

Domanda: cambierebbe la soluzione se le unità fossero frazionabili? [risposta: NO (si può dimostrare che la matrice dei vincoli resta totalmente unimodulare)]

Domanda: se si introduce un vincolo di budget, si mantiene l'interezza del rilassamento continuo? [risposta: NO (si può dimostrare che la matrice dei vincoli NON resta totalmente unimodulare con l'aggiunta del vincolo)]