

Ricerca Operativa

Esercizi sul metodo del simplesso

Luigi De Giovanni, Laura Brentegani

0) Risolvere il seguente problema di programmazione lineare (“contadino”).

$$\begin{array}{rcl}
 \max & 3000x_L + 5000x_P & \\
 \text{s.t.} & x_L + x_P & \leq 12 \\
 & 7x_L & \leq 70 \\
 & & 3x_P \leq 18 \\
 & 10x_L + 20x_P & \leq 160
 \end{array}$$

Soluzione. Possiamo in questo caso preliminarmente semplificare i valori numerici in gioco, trasformando il problema in un problema equivalente come segue:

$$\begin{array}{rcl}
 \max & 3x_L + 5x_P & \\
 \text{s.t.} & x_L + x_P & \leq 12 \\
 & x_L & \leq 10 \\
 & & x_P \leq 6 \\
 & x_L + 2x_P & \leq 16
 \end{array}$$

Inizializzazione: forma standard

Riscriviamo quindi il problema in forma standard ($\min \{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$):

$$\begin{array}{rcl}
 \min & -3x_L - 5x_P & \\
 \text{s.t.} & x_L + x_P + s_1 & = 12 \\
 & x_L + + s_2 & = 10 \\
 & + x_P + s_3 & = 6 \\
 & x_L + 2x_P + s_4 & = 16 \\
 & x_L, x_P, s_1, s_2, s_3, s_4 & \geq 0
 \end{array}$$

Abbiamo quindi $A = [A_L \ A_P \ A_1 \ A_2 \ A_3 \ A_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Inizializzazione: base ammissibile

Avendo aggiunto le variabili di slack s_1, s_2, s_3 e s_4 , disponiamo di una base ammissibile di partenza $B = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ e il problema è già in forma canonica rispetto alla base B . Organizziamo i dati in forma tableau.

	x_L	x_P	s_1	s_2	s_3	s_4	z	\bar{b}
$-z$	-3	-5	0	0	0	0	-1	0
s_1	1	1	1	0	0	0	0	12
s_2	1	0	0	1	0	0	0	10
s_3	0	1	0	0	1	0	0	6
s_4	1	2	0	0	0	1	0	16

Iterazione 1

Notiamo che il tableau è in forma canonica rispetto alla base B , quindi possiamo usarlo per applicare i passi del simplesso.

Al momento, la situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_L \\ x_P \end{bmatrix} \quad B = [A_1 \ A_2 \ A_3 \ A_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_L, x_P, s_1, s_2, s_3, s_4) = (0, 0, 12, 10, 6, 16)$ di valore $z = 0$.

All'iterazione 1, siamo quindi sul vertice $(0, 0)$ della regione ammissibile.

Per valutare l'ottimalità di tale soluzione controlliamo i costi ridotti ricordando che, se tutti i costi ridotti rispetto alla base B sono non negativi (≥ 0), allora la soluzione di base associata a B è ottima. Come si osserva dalla prima riga del tableau, sono presenti alcuni costi ridotti negativi (-3 e -5), quindi la condizione di ottimalità non è rispettata. Procediamo dunque con l'operazione di cambio base. Scegliamo come variabile che entra nella nuova base, una variabile x_h con $\bar{c}_h < 0$, ad esempio x_P . Il quoziente minimo che individua la variabile uscente è

$$\theta = \min_{i=1,2,3,4} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{iL}} : \bar{a}_{iL} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{12}{1}, \frac{10}{0}, \frac{6}{1}, \frac{16}{2} \right\} = \frac{6}{1} = 6$$

che corrisponde alla variabile s_3 che dunque esce di base.

Iterazione 2

Consideriamo la nuova base $B = \{s_1, s_2, x_P, s_4\}$. Dobbiamo **riportare il tableau alla forma canonica rispetto alla nuova base**. Eseguiamo pertanto l'operazione di pivot sull'elemento in riga 3 e colonna 2 (elemento riquadrato nel tableau precedente). Per riportare il tableau alla forma canonica rispetto alla nuova base eseguiamo le seguenti operazioni sulle righe.

	x_L	x_P	s_1	s_2	s_3	s_4	z	\bar{b}	
$-z$	-3	0	0	0	5	0	-1	30	$R_0 \leftarrow R_0 + 5R_3$
s_1	1	0	1	0	-1	0	0	6	$R_1 \leftarrow R_1 - R_3$
s_2	1	0	0	1	0	0	0	10	$R_2 \leftarrow R_2$
x_P	0	1	0	0	1	0	0	6	$R_3 \leftarrow R_3$
s_4	1	0	0	0	-2	1	0	4	$R_4 \leftarrow R_4 - 2R_3$

Ora, la situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ x_P \\ s_4 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_L \\ s_3 \end{bmatrix} \quad B = [A_1 \quad A_2 \quad A_P \quad A_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_L, x_P, s_1, s_2, s_3, s_4) = (0, 6, 6, 10, 0, 4)$ di valore $z = -30$.

All'iterazione 2, siamo quindi sul vertice $(0, 6)$ della regione ammissibile, adiacente al precedente vertice $(0, 0)$.

Avendo dei costi ridotti negativi nella riga R_0 , non abbiamo raggiunto la condizione di ottimalità e procediamo dunque con l'operazione di cambio base. Poiché l'unico costo ridotto negativo corrisponde alla variabile x_L , x_L entra nella nuova base.

Dato che $h = 3$, il quoziente minimo è

$$\theta = \min_{i=1,2,3,4} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{iP}} : \bar{a}_{iP} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{6}{1}, \frac{10}{1}, \frac{6}{0}, \frac{4}{1} \right\} = \frac{4}{1} = 4$$

che corrisponde alla variabile s_4 , e dunque s_4 esce di base.

Iterazione 3

Consideriamo la nuova base $B = \{s_1, s_2, x_P, x_L\}$ e riportiamo il tableau alla forma canonica rispetto alla nuova base B , eseguendo l'operazione di pivot sull'elemento in riga 4 e colonna 1 (elemento riquadrato nel tableau precedente).

	x_L	x_P	s_1	s_2	s_3	s_4	z	\bar{b}	
$-z$	0	0	0	0	-1	3	-1	42	$R_0 \leftarrow R_0 + 3R_4$
s_1	0	0	1	0	1	-1	0	2	$R_1 \leftarrow R_1 - R_4$
s_2	0	0	0	1	2	-1	0	6	$R_2 \leftarrow R_2 - R_4$
x_P	0	1	0	0	1	0	0	6	$R_3 \leftarrow R_3$
x_L	1	0	0	0	-2	1	0	4	$R_4 \leftarrow R_4$

Ora, la situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ x_P \\ x_L \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} s_4 \\ s_3 \end{bmatrix} \quad B = [A_1 \quad A_2 \quad A_P \quad A_L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_L, x_P, s_1, s_2, s_3, s_4) = (4, 6, 2, 6, 0, 0)$ di valore $z = -42$.

All'iterazione 3, siamo quindi sul vertice $(4, 6)$ della regione ammissibile, adiacente al precedente vertice $(0, 6)$.

Avendo dei costi ridotti negativi nella riga R_0 , non abbiamo raggiunto la condizione di ottimalità e procediamo dunque con l'operazione di cambio base. Poiché l'unico costo ridotto negativo corrisponde alla variabile s_3 , s_3 entra nella nuova base.

Dato che $h = 3$, il quoziente minimo è

$$\theta = \min_{i=1,2,3,4} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i3}} : \bar{a}_{i3} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{2}{1}, \frac{6}{2}, \frac{6}{1}, \frac{4}{2} \right\} = \frac{2}{1} = 2$$

che corrisponde alla variabile s_1 , e dunque s_1 esce di base.

Iterazione 4

Consideriamo la nuova base $B = \{s_3, s_2, x_P, x_L\}$ e riportiamo il tableau alla forma canonica rispetto alla nuova base B , eseguendo l'operazione di pivot sull'elemento in riga 1 e colonna 5 (elemento riquadrato nel tableau precedente).

	x_L	x_P	s_1	s_2	s_3	s_4	z	\bar{b}	
$-z$	0	0	1	0	0	2	-1	44	$R_0 \leftarrow R_0 + R_1$
s_3	0	0	1	0	1	-1	0	2	$R_1 \leftarrow R_1$
s_2	0	0	-2	1	0	1	0	2	$R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$
x_P	0	1	-1	0	0	1	0	4	$R_3 \leftarrow R_3 - R_1$
x_L	1	0	2	0	0	-1	0	8	$R_4 \leftarrow R_4 + 2R_1$

Ora, la situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} s_3 \\ s_2 \\ x_P \\ x_L \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} s_4 \\ s_1 \end{bmatrix} \quad B = [A_3 \ A_2 \ A_P \ A_L] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_L, x_P, s_1, s_2, s_3, s_4) = (8, 4, 0, 2, 2, 0)$ di valore $z = -44$.

All'iterazione 4, siamo quindi sul vertice $(8, 4)$ della regione ammissibile, adiacente al precedente vertice $(4, 6)$.

Osserviamo che tutti i costi ridotti nella riga R_0 del tableau sono non negativi e quindi la soluzione di base corrente è ottima. La soluzione ottima del problema in forma standard è $x = (x_L, x_P, s_1, s_2, s_3, s_4) = (8, 4, 0, 2, 2, 0)$, con valore ottimo della funzione obiettivo $z_{MIN} = -44$. Riguardo al problema di partenza, abbiamo che la soluzione ottima si trova per $(x_L, x_P) = (8, 4)$ con valore della funzione obiettivo pari a $z_{MAX} = -z_{MIN} = 44$. Ricordando che avevamo diviso per 1000 la funzione obiettivo, abbiamo che il valore per la funzione obiettivo prima della semplificazione è pari a 44000.

1) Risolvere il seguente problema di programmazione lineare.

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Soluzione. Riscriviamo il problema in forma standard ($\min \{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$).

$$\begin{aligned} \min \quad & -3x_1 - x_2 - 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 5 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

Avendo aggiunto le variabili di slack x_4, x_5 e x_6 , disponiamo di una base ammissibile di partenza $B = \{x_4, x_5, x_6\}$ e il problema è già in forma canonica rispetto alla base B . Organizziamo i dati in forma tableau.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	\bar{b}
$-z$	-3	-1	-3	0	0	0	-1	0
x_4	2	1	1	1	0	0	0	2
x_5	1	2	3	0	1	0	0	5
x_6	2	2	1	0	0	1	0	6

Al momento, la situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad B = [A_4 \ A_5 \ A_6] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 0, 0, 2, 5, 6)$ di valore $z = 0$.

Per valutare l'ottimalità di tale soluzione controlliamo i costi ridotti ricordando che, se tutti i costi ridotti rispetto alla base B sono non negativi (≥ 0), allora la soluzione di base associata a B è ottima. Come si osserva dalla prima riga del tableau, sono presenti alcuni costi ridotti negativi ($-3, -1$ e -3), quindi la soluzione di base B non è ottima¹. Procediamo dunque con l'operazione di cambio base. Seguendo la regola di Bland, scegliamo come variabile che entra nella nuova base, la variabile x_h con $h = \min \{j : \bar{c}_j < 0\} = \min \{1, 2, 3\} = 1$, quindi x_1 entra in base. Dato che $h = 1$, il quoziente minimo è $\theta = \min_{i=1,2,3} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i1}} : \bar{a}_{i1} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{2}{2}, \frac{5}{1}, \frac{6}{2} \right\} = \frac{2}{2} = 1$, che corrisponde alla variabile x_4 e dunque x_4 esce di base.

Consideriamo la nuova base $B = \{x_1, x_5, x_6\}$ ed eseguiamo l'operazione di pivot sull'elemento in riga 1 e colonna 1 (elemento riquadrato nel tableau precedente). Per riportare il tableau alla forma canonica rispetto alla nuova base eseguiamo le seguenti operazioni sulle righe.

Operazioni: $R_1 \leftarrow R_1/2, R_2 \leftarrow R_2 - R_1/2, R_3 \leftarrow R_3 - R_1, R_0 \leftarrow R_0 + 3/2R_1$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	\bar{b}
$-z$	0	1/2	-3/2	3/2	0	0	-1	3
x_1	1	1/2	1/2	1/2	0	0	0	1
x_5	0	3/2	5/2	-1/2	1	0	0	4
x_6	0	1	0	-1	0	1	0	4

Ora, la situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad B = [A_1 \ A_5 \ A_6] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (1, 0, 0, 0, 4, 4)$ di valore $z = -3$.

Osserviamo che nella prima riga del tableau è presente un costo ridotto negativo, $-3/2$, quindi la soluzione di base corrente non è ottima. Procediamo dunque con

¹Si tratta di un piccolo abuso di linguaggio di cui faremo uso in tutta la trattazione. Ricordiamo, infatti, che "costi ridotti tutti positivi o nulli" è condizione sufficiente ma non necessaria di ottimalità, pertanto, se sono presenti uno o più costi ridotti negativi, non possiamo dire nulla sull'ottimalità della base corrente. In realtà, l'unico caso in cui la base corrente potrebbe essere ottima, anche in presenza di costi ridotti negativi, si verifica quando il valore del minimo rapporto θ vale 0, tuttavia, anche in questo caso, diremo che la base "non è ottima" in quanto, se esiste una base ottima con costi ridotti tutti positivi o nulli, il metodo del simplesso permette di individuarla con i passi successivi.

l'operazione di cambio base. Poiché il costo ridotto negativo corrisponde alla variabile x_3 , x_3 entra nella nuova base.

Dato che $h = 3$, il quoziente minimo è $\theta = \min_{i=1,2,3} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i3}} : \bar{a}_{i3} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{1}{1/2}, \frac{4}{5/2}, \frac{4}{0} \right\} = \frac{4}{5/2} = \frac{8}{5}$, che corrisponde alla variabile x_5 e dunque x_5 esce di base.

Consideriamo la nuova base $B = \{x_1, x_3, x_6\}$ ed eseguiamo l'operazione di pivot sull'elemento in riga 2 e colonna 3 (elemento riquadrato nel tableau precedente). Per riportare il tableau alla forma canonica rispetto alla nuova base eseguiamo le seguenti operazioni sulle righe.

Operazioni: $R_2 \leftarrow R_2 \cdot 2/5$, $R_1 \leftarrow R_1 - R_2/5$, $R_0 \leftarrow R_0 + 3/5 R_2$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	\bar{b}
$-z$	0	7/5	0	6/5	3/5	0	-1	27/5
x_1	1	1/5	0	3/5	-1/5	0	0	1/5
x_3	0	3/5	1	-1/5	2/5	0	0	8/5
x_6	0	1	0	-1	0	1	0	4

Ora, la situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad B = [A_1 \quad A_3 \quad A_6] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (1/5, 0, 8/5, 0, 0, 4)$ di valore $z = -27/5$.

Osserviamo che tutti i costi ridotti nella prima riga del tableau sono non negativi e quindi la soluzione di base corrente è ottima. Il problema di programmazione lineare originale ammette dunque una soluzione ottima $x = (x_1, x_2, x_3) = (1/5, 0, 8/5)$ di valore $z_{MAX} = -z_{MIN} = 27/5$.

Osservazione: Avremmo potuto risolvere l'esercizio senza applicare la regola anti-ciclo di Bland, come mostrato di seguito. Tuttavia, ricordiamo che tale regola assicura la convergenza del metodo del simplesso anche in presenza di soluzioni di base degeneri, situazioni nelle quali si potrebbe tornare a visitare soluzioni di base già considerate con il rischio di ciclare.

Ritorniamo al tableau iniziale:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	\bar{b}
$-z$	-3	-1	-3	0	0	0	-1	0
x_4	2	1	1	1	0	0	0	2
x_5	1	2	3	0	1	0	0	5
x_6	2	2	1	0	0	1	0	6

Avendo aggiunto le variabili di slack (x_4, x_5 e x_6), disponiamo di una base ammissibile di partenza $B = \{x_4, x_5, x_6\}$ e il tableau è già in forma canonica rispetto a B . Osserviamo che i costi ridotti non sono tutti non negativi e quindi la base corrente non è ottima. Procediamo dunque con l'operazione di cambio di base. Se non seguiamo la regola di Bland, possiamo far entrare in base una qualsiasi variabile con costo ridotto strettamente negativo. Per esempio, scegliamo come variabile entrante, la variabile x_2 . Dato che $h = 2$, il quoziente minimo è $\theta = \min_{i=1,2,3} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i2}} : \bar{a}_{i2} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2} \right\} = \frac{2}{1} = 2$, che corrisponde alla variabile x_4 e dunque x_4 esce di base.

Consideriamo dunque la nuova base $B = \{x_2, x_5, x_6\}$ ed eseguiamo l'operazione di pivot sull'elemento in riga 1 e colonna 2 riquadrato nel tableau precedente.

Operazioni: $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1, R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1, R_0 \leftarrow R_0 + R_1$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	\bar{b}
$-z$	-1	0	-2	1	0	0	-1	2
x_2	2	1	1	1	0	0	0	2
x_5	-3	0	1	-2	1	0	0	1
x_6	-2	0	-1	-2	0	1	0	2

Ora, la situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad B = [A_2 \ A_5 \ A_6] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 2, 0, 0, 1, 2)$ di valore $z = -2$.

Osserviamo che i costi ridotti non sono tutti non negativi e quindi la base corrente non è ottima. Tra le variabili con costo ridotto negativo, scegliamo come variabile che entra in base (senza seguire la regola di Bland), la variabile x_3 .

Dato che $h = 3$, il quoziente minimo è $\theta = \min_{i=1,2,3} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i3}} : \bar{a}_{i3} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{2}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{-1} \right\} = \frac{1}{1} = 1$, che corrisponde alla variabile x_5 e dunque x_5 esce di base.

Consideriamo la nuova base $B = \{x_2, x_3, x_6\}$ ed eseguiamo l'operazione di pivot sull'elemento riquadrato nel tableau precedente.

Operazioni: $R_1 \leftarrow R_1 - R_2$, $R_3 \leftarrow R_3 + R_2$, $R_0 \leftarrow R_0 + 2R_2$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	\bar{b}
$-z$	-7	0	0	-3	2	0	-1	4
x_2	5	1	0	3	-1	0	0	1
x_3	-3	0	1	-2	1	0	0	1
x_6	-5	0	0	-4	1	1	0	3

Ora, la situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad B = [A_2 \ A_3 \ A_6] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 1, 1, 0, 0, 3)$ di valore $z = -4$.

Osserviamo che i costi ridotti non sono tutti non negativi e quindi la base corrente non è ottima. Tra le variabili con costo ridotto negativo, scegliamo come variabile che entra in base, la variabile x_1 . Dato che $h = 1$, il quoziente minimo è $\theta = \min_{i=1,2,3} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i1}} : \bar{a}_{i1} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{1}{5}, \frac{1}{-3}, \frac{3}{-5} \right\} = \frac{1}{5}$, che corrisponde alla variabile x_2 e dunque x_2 esce di base.

Consideriamo dunque la nuova base $B = \{x_1, x_3, x_6\}$ ed eseguiamo l'operazione di pivot sull'elemento in riga 1 e colonna 1 riquadrato nel tableau precedente.

Operazioni: $R_1 \leftarrow R_1/5$, $R_2 \leftarrow R_2 + 3/5R_1$, $R_3 \leftarrow R_3 + R_1$, $R_0 \leftarrow R_0 + 7/5R_1$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	\bar{b}
$-z$	0	7/5	0	6/5	3/5	0	-1	27/5
x_1	1	1/5	0	3/5	-1/5	0	0	1/5
x_3	0	3/5	1	-1/5	2/5	0	0	8/5
x_6	0	1	0	-1	0	1	0	4

Ora, la situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad B = [A_1 \ A_3 \ A_6] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (1/5, 0, 8/5, 0, 0, 4)$ di valore $z = -27/5$.

Osserviamo che tutti i costi ridotti sono non negativi e quindi la base corrente è ottima. Quindi, la soluzione $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (1/5, 0, 8/5, 0, 0, 4)$ di valore $z = -27/5$ è una soluzione ottima e $x = (x_1, x_2, x_3) = (1/5, 0, 8/5)$ è una soluzione ottima per il problema originale, di valore ottimo $z = 27/5$ (ovviamente, lo stesso valore trovato precedentemente).

2) Risolvere il seguente problema di programmazione lineare.

$$\begin{aligned} \min \quad & 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 \\ \text{s.t.} \quad & 4x_1 + 3x_2 + 2x_4 \leq 2 \\ & x_1 - 3x_2 - x_3 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_4 \geq 0 \\ & x_3 \leq 0 \end{aligned}$$

Soluzione. Riscriviamo il problema in forma standard. Poiché $x_3 \leq 0$, introduciamo una nuova variabile $\hat{x}_3 = -x_3$ con $\hat{x}_3 \geq 0$.

$$\begin{aligned} \min \quad & 7x_1 + 2x_2 - 5\hat{x}_3 - x_4 \\ \text{s.t.} \quad & 4x_1 + 3x_2 + 2x_4 + x_5 = 2 \\ & x_1 - 3x_2 + \hat{x}_3 + x_6 = 1 \\ & x_1, x_2, \hat{x}_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

Avendo aggiunto le variabili di slack (x_5 e x_6), disponiamo di una base ammissibile di partenza $B = \{x_5, x_6\}$ e il problema è già in forma canonica rispetto alla base B . Organizziamo i dati in forma tableau.

	x_1	x_2	\hat{x}_3	x_4	x_5	x_6	z	\bar{b}
$-z$	7	2	-5	-1	0	0	-1	0
x_5	4	3	0	2	1	0	0	2
x_6	1	-3	1	0	0	1	0	1

La situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hat{x}_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad B = [A_5 \ A_6] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_1, x_2, \hat{x}_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 0, 0, 0, 2, 1)$ di valore $z = 0$.

Come si osserva dalla prima riga del tableau, sono presenti alcuni costi ridotti negativi (-5 e -1), quindi la base B non è ottima. Procediamo dunque con l'operazione di cambio base. Seguendo la regola di Bland, scegliamo come variabile che entra in base, la variabile con costo ridotto negativo di indice minimo, ovvero \hat{x}_3 . Il minimo rapporto è dunque $\theta = \min_{i=1,2} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i3}} : \bar{a}_{i3} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{2}{0}, \frac{1}{1} \right\} = \frac{1}{1} = 1$, che corrisponde alla variabile x_6 , quindi x_6 esce di base.

Consideriamo la nuova base $B = \{x_5, \hat{x}_3\}$ ed eseguiamo l'operazione di pivot sull'elemento in riga 2 e colonna 3 (elemento riquadrato nel tableau precedente). Per riportare il tableau alla forma canonica rispetto alla nuova base eseguiamo le seguenti operazioni sulle righe.

Operazioni: $R_0 \leftarrow R_0 + 5R_2$.

	x_1	x_2	\hat{x}_3	x_4	x_5	x_6	z	\bar{b}
$-z$	12	-13	0	-1	0	5	-1	5
x_5	4	3	0	2	1	0	0	2
\hat{x}_3	1	-3	1	0	0	1	0	1

Ora, la situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_5 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad B = [A_5 \ A_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_1, x_2, \hat{x}_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 0, 1, 0, 2, 0)$ di valore $z = -5$.

Osserviamo che nella prima riga del tableau sono presenti alcuni costi ridotti negativi ($-13, -1 < 0$), quindi la base corrente non è ottima. Seguendo la regola di Bland, scegliamo come variabile con costo ridotto negativo che entra in base, la variabile x_2 . Il quoziente minimo è, dunque, $\theta = \min_{i=1,2} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i2}} : \bar{a}_{i2} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{2}{3}, \frac{1}{-3} \right\} = \frac{2}{3}$, che corrisponde alla variabile x_5 , quindi x_5 esce di base.

Consideriamo la nuova base $B = \{x_2, \hat{x}_3\}$ ed eseguiamo l'operazione di pivot sull'elemento riquadrato nel tableau precedente. Per riportare il tableau alla forma canonica rispetto alla nuova base eseguiamo le seguenti operazioni sulle righe.

Operazioni: $R_1 \leftarrow R_1/3$, $R_2 \leftarrow R_2 + R_1$, $R_0 \leftarrow R_0 + 13/3R_1$.

	x_1	x_2	\hat{x}_3	x_4	x_5	x_6	z	\bar{b}
$-z$	88/3	0	0	23/3	13/3	5	-1	41/3
x_2	4/3	1	0	2/3	1/3	0	0	2/3
\hat{x}_3	5	0	1	2	1	1	0	3

Ora, la situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad B = [A_2 \quad A_3] = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_1, x_2, \hat{x}_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 2/3, 3, 0, 0, 0)$ di valore $z = -41/3$.

Osserviamo che tutti i costi ridotti nella prima riga sono non negativi, quindi la base corrente $B = \{x_2, \hat{x}_3\}$ è ottima e $x = (x_1, x_2, \hat{x}_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 2/3, 3, 0, 0, 0)$ è una soluzione ottima con valore ottimo $z = -41/3$. Il problema di programmazione lineare originale ammette dunque una soluzione ottima $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 2/3, -3, 0)$ di valore $z = -41/3$.

3) Risolvere il seguente problema di programmazione lineare.

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ & -2x_1 + x_2 - x_3 \geq -1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Soluzione. Riscriviamo il problema in forma standard.

$$\begin{aligned} \min \quad & -3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Avendo aggiunto le variabili di slack (x_4 e x_5), disponiamo di una base ammissibile di partenza $B = \{x_4, x_5\}$ e il problema è già in forma canonica rispetto a tale base. Procediamo organizzando i dati in forma tableau.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	\bar{b}
$-z$	-3	-2	5	0	0	-1	0
x_4	4	-2	2	1	0	0	4
x_5	2	-1	1	0	1	0	1

La situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad B = [A_4 \ A_5] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 0, 4, 1)$ di valore $z = 0$.

Osserviamo che nella prima riga del tableau sono presenti alcuni costi ridotti negativi (-3 e -2), quindi la base B non è ottima.

Attenzione: Potremmo già concludere che il problema è illimitato osservando la colonna A_2 . In ogni caso, arriveremo alla stessa conclusione seguendo pedissequamente l'algoritmo del simplesso e applicando la regola di Bland, che ci fa considerare una colonna diversa.

Procediamo con l'operazione di cambio base. Seguendo la regola di Bland, scegliamo come variabile con costo ridotto negativo che entra in base, la variabile x_1 . Per scegliere la variabile che esce di base calcoliamo il minimo rapporto $\theta = \min_{i=1,2} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i1}} : \bar{a}_{i1} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{4}{4}, \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2}$. Poiché il minimo rapporto $\theta = \frac{1}{2}$ corrisponde alla variabile x_5 , x_5 esce di base.

Consideriamo dunque la nuova base $B = \{x_4, x_1\}$ ed eseguiamo l'operazione di pivot sull'elemento riquadrato nel tableau precedente. Per riportare il tableau alla forma canonica rispetto alla nuova base eseguiamo le seguenti operazioni sulle righe.

Operazioni: $R_2 \leftarrow R_2/2$, $R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2$, $R_0 \leftarrow R_0 + 3/2R_2$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	\bar{b}
$-z$	0	$-7/2$	$13/2$	0	$3/2$	-1	$3/2$
x_4	0	0	0	1	-2	0	2
x_1	1	$-1/2$	$1/2$	0	$1/2$	0	$1/2$

Ora, la situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_1 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad B = [A_4 \ A_1] = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1/2, 0, 0, 2, 0)$ di valore $z = -3/2$.

Osserviamo che nella prima riga del tableau è presente un costo ridotto negativo, $-7/2 < 0$, quindi la base B non è ottima. Osserviamo inoltre che le restanti entrate della colonna relativa a tale costo ridotto negativo sono tutte non positive, possiamo quindi concludere che il problema è illimitato.

4) Risolvere il seguente problema di programmazione lineare.

$$\begin{array}{ll} \min & -x_1 - 3x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 6 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Soluzione. Riscriviamo il problema in forma standard.

$$\begin{array}{ll} \min & -x_1 - 3x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1 + x_2 + 3x_3 + x_5 = 6 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_6 = 8 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

Avendo aggiunto le variabili di slack (x_4 , x_5 e x_6), disponiamo di una base ammissibile di partenza $B = \{x_4, x_5, x_6\}$ e il problema è già in forma canonica rispetto alla base B . Organizziamo i dati in forma tableau.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	\bar{b}
$-z$	-1	-3	1	0	0	0	-1	0
x_4	2	1	0	1	0	0	0	3
x_5	1	1	3	0	1	0	0	6
x_6	2	1	3	0	0	1	0	8

La situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad B = [A_4 \ A_5 \ A_6] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 0, 0, 3, 6, 8)$ di valore $z = 0$.

Osserviamo che nella prima riga del tableau sono presenti alcuni costi ridotti negativi (-1 e -3), quindi la base B non è ottima. Procediamo dunque con l'operazione di cambio base. Seguendo la regola di Bland, scegliamo come variabile con costo ridotto negativo che entra in base, la variabile x_1 . Per scegliere la variabile che esce di base calcoliamo $\theta = \min_{i=1,2,3} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i1}} : \bar{a}_{i1} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{3}{2}, \frac{6}{1}, \frac{8}{2} \right\} = \frac{3}{2}$. Poiché il minimo rapporto $\theta = \frac{3}{2}$ corrisponde alla variabile x_4 , x_4 esce di base.

Consideriamo dunque la nuova base $B = \{x_1, x_5, x_6\}$ ed eseguiamo l'operazione di pivot sull'elemento riquadrato nel tableau precedente. Per riportare il tableau alla forma canonica rispetto alla nuova base eseguiamo le seguenti operazioni sulle righe.

Operazioni: $R_1 \leftarrow R_1/2$, $R_2 \leftarrow R_2 - R_1/2$, $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$, $R_0 \leftarrow R_0 + R_1/2$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	\bar{b}
$-z$	0	$-5/2$	1	$1/2$	0	0	-1	$3/2$
x_1	1	$1/2$	0	$1/2$	0	0	0	$3/2$
x_5	0	$1/2$	3	$-1/2$	1	0	0	$9/2$
x_6	0	0	3	-1	0	1	0	5

Ora, la situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad B = [A_1 \ A_5 \ A_6] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (3/2, 0, 0, 0, 9/2, 5)$ di valore $z = -3/2$.

Osserviamo che nella prima riga del tableau è presente un costo ridotto negativo, $-5/2 < 0$, quindi la base B non è ottima. Poiché il costo ridotto negativo, $-5/2$, corrisponde alla variabile x_2 , scegliamo x_2 come variabile che entra in base e poiché il minimo rapporto $\theta = \min_{i=1,2,3} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i2}} : \bar{a}_{i2} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{3/2}{1/2}, \frac{9/2}{1/2}, \frac{5}{0} \right\} = \frac{3/2}{1/2} = 3$ corrisponde a x_1 , scegliamo come variabile uscente, la variabile x_1 .

Consideriamo dunque la nuova base $B = \{x_2, x_5, x_6\}$ ed eseguiamo l'operazione di pivot sull'elemento riquadrato nel tableau precedente. Per riportare il tableau alla forma canonica rispetto alla nuova base eseguiamo le seguenti operazioni sulle righe.

Operazioni: $R_1 \leftarrow R_1 \cdot 2$, $R_2 \leftarrow R_2 - R_1$, $R_0 \leftarrow R_0 + 5R_1$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	\bar{b}
$-z$	5	0	1	3	0	0	-1	9
x_2	2	1	0	1	0	0	0	3
x_5	-1	0	3	-1	1	0	0	3
x_6	0	0	3	-1	0	1	0	5

Ora, la situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad B = [A_2 \ A_5 \ A_6] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 3, 0, 0, 3, 5)$ di valore $z = -9$.

Osserviamo che i costi ridotti nella prima riga del tableau sono tutti positivi o nulli e quindi la base corrente, $B = \{x_2, x_5, x_6\}$, è ottima. La soluzione ottima è $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 3, 0, 0, 3, 5)$ di valore $z = -9$. Il problema originale ammette dunque una soluzione ottima $x = (x_1, x_2, x_3) = (0, 3, 0)$ di valore $z = -9$.

5) Risolvere il seguente problema di programmazione lineare.

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_2 \leq 7 \\ & 2x_1 + 1/2x_2 \leq 10 \\ & 3/2x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Soluzione. Riscriviamo il problema in forma standard.

$$\begin{array}{rcll}
 \min & -3x_1 & - & 2x_2 \\
 s.t. & & & x_2 + x_3 = 7 \\
 & 2x_1 + & 1/2x_2 & + x_4 = 10 \\
 & 3/2x_1 + & x_2 & + x_5 = 10 \\
 & x_1 & , & x_2 , x_3 , x_4 , x_5 \geq 0
 \end{array}$$

Avendo aggiunto le variabili di slack (x_3, x_4 e x_5), disponiamo di una base ammissibile di partenza $B = \{x_3, x_4, x_5\}$ e il problema è già in forma canonica rispetto alla base B . Organizziamo i dati in forma tableau.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	\bar{b}
$-z$	-3	-2	0	0	0	-1	0
x_3	0	1	1	0	0	0	7
x_4	2	1/2	0	1	0	0	10
x_5	3/2	1	0	0	1	0	10

La situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad B = [A_3 \quad A_4 \quad A_5] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 7, 10, 10)$ di valore $z = 0$.

Osserviamo che nella prima riga del tableau sono presenti alcuni costi ridotti negativi (-3 e -2), quindi la base B non è ottima. Procediamo dunque con l'operazione di cambio base. Seguendo la regola di Bland, scegliamo come variabile con costo ridotto negativo che entra in base, la variabile x_1 e scegliamo come variabile uscente dalla

base la variabile che corrisponde al minimo rapporto $\theta = \min_{i=1,2,3} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i1}} : \bar{a}_{i1} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{7}{0}, \frac{10}{2}, \frac{10}{3/2} \right\} = \frac{10}{2} = 5$, quindi la variabile x_4 esce di base.

Consideriamo dunque la nuova base $B = \{x_3, x_1, x_5\}$ ed eseguiamo l'operazione di pivot sull'elemento riquadrato nel tableau precedente. Per riportare il tableau alla forma canonica rispetto alla nuova base eseguiamo le seguenti operazioni sulle righe.

Operazioni: $R_2 \leftarrow R_2/2, R_3 \leftarrow R_3 - 3/4R_2, R_0 \leftarrow R_0 + 3/2R_2$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	\bar{b}
$-z$	0	$-5/4$	0	$3/2$	0	-1	15
x_3	0	1	1	0	0	0	7
x_1	1	$1/4$	0	$1/2$	0	0	5
x_5	0	$5/8$	0	$-3/4$	1	0	$5/2$

La situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad B = [A_3 \ A_1 \ A_5] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (5, 0, 7, 0, 5/2)$ di valore $z = -15$.

Nella prima riga del tableau è presente un costo ridotto negativo in corrispondenza della variabile x_2 , $-5/4 < 0$, quindi la base B non è ottima. Scegliamo come variabile che entra in base, la variabile x_2 e poiché il minimo quoziente $\theta = \min_{i=1,2,3} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i2}} : \bar{a}_{i2} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{7}{1}, \frac{5}{1/4}, \frac{5/2}{5/8} \right\} = \frac{5/2}{5/8} = 4$ corrisponde alla variabile x_5 , scegliamo x_5 come variabile che esce di base.

Consideriamo dunque la nuova base $B = \{x_3, x_1, x_2\}$ ed eseguiamo l'operazione di pivot sull'elemento riquadrato nel tableau precedente. Eseguiamo le seguenti operazioni sulle righe per riportare il tableau alla forma canonica rispetto alla nuova base.

Operazioni: $R_3 \leftarrow R_3 \cdot 8/5$, $R_1 \leftarrow R_1 - 8/5R_3$, $R_2 \leftarrow R_2 - 2/5R_3$, $R_0 \leftarrow R_0 + 2R_3$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	\bar{b}
$-z$	0	0	0	0	2	-1	20
x_3	0	0	1	$6/5$	$-8/5$	0	3
x_1	1	0	0	$4/5$	$-2/5$	0	4
x_2	0	1	0	$-6/5$	$8/5$	0	4

La situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad B = [A_3 \ A_1 \ A_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1/2 \\ 0 & 3/2 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (4, 4, 3, 0, 0)$ di valore $z = -20$.

I costi ridotti nella prima riga sono tutti non negativi e quindi la base corrente $B = \{x_3, x_1, x_2\}$ è ottima. La soluzione ottima è $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (4, 4, 3, 0, 0)$ di valore $z = -20$. Il problema di programmazione lineare originale ammette dunque una soluzione ottima $x = (x_1, x_2) = (4, 4)$ di valore $z_{MAX} = -z_{MIN} = 20$.

6) Risolvere il seguente problema di programmazione lineare.

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \geq -2 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 4 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ & x_4 \leq 0 \end{aligned}$$

Soluzione. Riscriviamo il problema in forma standard. Poiché $x_4 \leq 0$ introduciamo una nuova variabile $\hat{x}_4 = -x_4$ con $\hat{x}_4 \geq 0$

$$\begin{aligned} \min \quad & -2x_1 - 3x_2 + x_3 + 3\hat{x}_4 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 - 2x_3 + \hat{x}_4 + x_5 = 2 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 4\hat{x}_4 + x_6 = 4 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 + x_7 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, \hat{x}_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{aligned}$$

Avendo aggiunto le variabili di slack (x_5, x_6 e x_7), disponiamo di una base ammissibile di partenza $B = \{x_5, x_6, x_7\}$ e il problema è già in forma canonica rispetto alla base B . Organizziamo i dati in forma tableau.

	x_1	x_2	x_3	\hat{x}_4	x_5	x_6	x_7	z	\bar{b}
$-z$	-2	-3	1	3	0	0	0	-1	0
x_5	-1	1	-2	1	1	0	0	0	2
x_6	2	2	1	-4	0	1	0	0	4
x_7	1	-1	2	0	0	0	1	0	2

La situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \hat{x}_4 \end{bmatrix} \quad B = [A_5 \ A_6 \ A_7] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_1, x_2, x_3, \hat{x}_4, x_5, x_6, x_7) = (0, 0, 0, 0, 2, 4, 2)$ di valore $z = 0$.

La base B non è ottima in quanto nella prima riga del tableau sono presenti alcuni costi ridotti negativi (-2 e -3). Procediamo dunque con l'operazione di cambio base. Seguendo la regola di Bland, scegliamo come variabile con costo ridotto negativo che entra in base, la variabile x_1 e, come variabile uscente, la variabile che

corrisponde al minimo rapporto $\theta = \min_{i=1,2,3} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i1}} : \bar{a}_{i1} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{2}{-1}, \frac{4}{2}, \frac{2}{1} \right\} = 2$.

Poiché sia x_6 che x_7 corrispondono al minimo rapporto $\theta = 2$, per la regola di Bland, fra le due, scegliamo come variabile uscente quella con indice minore, quindi x_6 esce di base.

Consideriamo dunque la nuova base $B = \{x_5, x_1, x_7\}$ ed eseguiamo l'operazione di pivot sull'elemento riquadrato nel tableau precedente. Per riportare il tableau alla forma canonica rispetto alla nuova base eseguiamo le seguenti operazioni sulle righe.

Operazioni: $R_2 \leftarrow R_2/2, R_1 \leftarrow R_1 + R_2/2, R_3 \leftarrow R_3 - R_2/2, R_0 \leftarrow R_0 + R_2$.

	x_1	x_2	x_3	\hat{x}_4	x_5	x_6	x_7	z	\bar{b}
$-z$	0	-1	2	-1	0	1	0	-1	4
x_5	0	2	-3/2	-1	1	1/2	0	0	4
x_1	1	1	1/2	-2	0	1/2	0	0	2
x_7	0	-2	3/2	2	0	-1/2	1	0	0

Ora, la situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_1 \\ x_7 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \hat{x}_4 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad B = [A_5 \ A_1 \ A_7] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_1, x_2, x_3, \hat{x}_4, x_5, x_6, x_7) = (2, 0, 0, 0, 4, 0, 0)$ di valore $z = -4$.

Osserviamo che nella prima riga del tableau sono presenti alcuni costi ridotti negativi (-1 e -1), quindi la base B non è ottima. Procediamo dunque con l'operazione di cambio base. Seguendo la regola di Bland, scegliamo come variabile con costo

ridotto negativo che entra in base, la variabile x_2 . Per scegliere la variabile che esce di base calcoliamo $\theta = \min_{i=1,2,3} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i2}} : \bar{a}_{i2} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{4}{2}, \frac{2}{1}, \frac{0}{-2} \right\} = 2$. Poiché sia x_5 che x_1 corrispondono al minimo rapporto $\theta = 2$, per la regola di Bland, scegliamo come variabile uscente quella con indice minore, ovvero x_1 esce di base.

Consideriamo dunque la nuova base $B = \{x_5, x_2, x_7\}$ ed eseguiamo l'operazione di pivot sull'elemento riquadrato nel tableau precedente. Per riportare il tableau alla forma canonica rispetto alla nuova base eseguiamo le seguenti operazioni sulle righe.

Operazioni: $R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2$, $R_3 \leftarrow R_3 + 2R_2$, $R_0 \leftarrow R_0 + R_2$.

	x_1	x_2	x_3	\hat{x}_4	x_5	x_6	x_7	z	\bar{b}
$-z$	1	0	5/2	-3	0	3/2	0	-1	6
x_5	-2	0	-5/2	3	1	-1/2	0	0	0
x_2	1	1	1/2	-2	0	1/2	0	0	2
x_7	2	0	5/2	-2	0	1/2	1	0	4

Ora, la situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_7 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ \hat{x}_4 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad B = [A_5 \quad A_2 \quad A_7] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_1, x_2, x_3, \hat{x}_4, x_5, x_6, x_7) = (0, 2, 0, 0, 0, 0, 4)$ di valore $z = -6$.

Osserviamo che nella prima riga del tableau è presente un costo ridotto negativo, $-3 < 0$, quindi la base B non è ottima. Procediamo dunque con l'operazione di cambio base. Scegliamo come variabile che entra in base, la variabile corrispondente a tale costo ridotto negativo, ovvero \hat{x}_4 e, come variabile uscente dalla base, la variabile che corrisponde al minimo rapporto $\theta = \min_{i=1,2,3} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i4}} : \bar{a}_{i4} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{0}{3}, \frac{2}{-2}, \frac{4}{-2} \right\} = 0$, ossia la variabile x_5 .

Consideriamo dunque la nuova base $B = \{\hat{x}_4, x_2, x_7\}$ ed eseguiamo l'operazione di pivot sull'elemento riquadrato nel tableau precedente. Per riportare il tableau alla forma canonica rispetto alla nuova base eseguiamo le seguenti operazioni sulle righe.

Operazioni: $R_1 \leftarrow R_1/3$, $R_2 \leftarrow R_2 + 2/3R_1$, $R_3 \leftarrow R_3 + 2/3R_1$, $R_0 \leftarrow R_0 + R_1$.

	x_1	x_2	x_3	\hat{x}_4	x_5	x_6	x_7	z	\bar{b}
$-z$	-1	0	0	0	1	1	0	-1	6
\hat{x}_4	-2/3	0	-5/6	1	1/3	-1/6	0	0	0
x_2	-1/3	1	-7/6	0	2/3	1/6	0	0	2
x_7	2/3	0	5/6	0	2/3	1/6	1	0	4

Ora, la situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} \hat{x}_4 \\ x_2 \\ x_7 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad B = [A_4 \ A_2 \ A_7] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_1, x_2, x_3, \hat{x}_4, x_5, x_6, x_7) = (0, 2, 0, 0, 0, 0, 4)$ di valore $z = -6$. (Si osservi che è la stessa soluzione del passo precedente.)

Osserviamo che nella prima riga del tableau è presente un costo ridotto negativo, $-1 < 0$, quindi la base B non è ottima. Procediamo dunque con l'operazione di cambio base. Scegliamo come variabile che entra in base, la variabile corrispondente a tale costo ridotto negativo, ovvero x_1 e, come variabile che esce di base, la variabile che corrisponde al minimo rapporto $\theta = \min_{i=1,2,3} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i1}} : \bar{a}_{i1} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{0}{-2/3}, \frac{2}{-1/3}, \frac{4}{2/3} \right\} = \frac{4}{2/3}$, quindi la variabile x_7 esce di base.

Consideriamo la nuova base $B = \{\hat{x}_4, x_2, x_1\}$ ed eseguiamo l'operazione di pivot sull'elemento riquadrato nel tableau precedente. Per riportare il tableau alla forma canonica rispetto alla nuova base eseguiamo le seguenti operazioni sulle righe.

Operazioni: $R_3 \leftarrow R_3 \cdot 3/2$, $R_1 \leftarrow R_1 + R_3$, $R_2 \leftarrow R_2 + R_3/2$, $R_0 \leftarrow R_0 + 3/2R_3$.

	x_1	x_2	x_3	\hat{x}_4	x_5	x_6	x_7	z	\bar{b}
$-z$	0	0	5/4	0	2	5/4	3/2	-1	12
\hat{x}_4	0	0	0	1	1	0	1	0	4
x_2	0	1	-3/4	0	1	1/4	1/2	0	4
x_1	1	0	5/4	0	1	1/4	3/2	0	6

Ora, la situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} \hat{x}_4 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} \quad B = [A_4 \ A_2 \ A_1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_1, x_2, x_3, \hat{x}_4, x_5, x_6, x_7) = (6, 4, 0, 4, 0, 0, 0)$ di valore $z = -12$.

Osserviamo che tutti i costi ridotti nella prima riga sono non negativi e quindi la base corrente $B = \{x_1, x_2, \hat{x}_4\}$ è ottima. La soluzione ottima è $x = (x_1, x_2, x_3, \hat{x}_4, x_5, x_6, x_7) = (6, 4, 0, 4, 0, 0, 0)$ di valore $z = -12$. Il problema di programmazione lineare originale ammette dunque una soluzione ottima $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (6, 4, 0, -4)$ di valore $z_{MAX} = -z_{MIN} = 12$.

7) Risolvere il seguente problema di programmazione lineare.

$$\begin{array}{ll} \max & -2x_1 + x_2 - 3x_3 \\ \text{s.t.} & x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2 \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_3 \leq 0 \end{array}$$

Soluzione. Riscriviamo il problema in forma standard. Poiché $x_3 \leq 0$ introduciamo una nuova variabile $\hat{x}_3 = -x_3$ con $\hat{x}_3 \geq 0$

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_1 - x_2 - 3\hat{x}_3 \\ \text{s.t.} & x_1 + 2x_2 + \hat{x}_3 + x_4 \leq 2 \\ & 2x_1 + x_2 + \hat{x}_3 + x_5 \leq 3 \\ & x_1, x_2, \hat{x}_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

Avendo aggiunto le variabili di slack (x_4 e x_5), disponiamo di una base ammissibile di partenza $B = \{x_4, x_5\}$ e il problema è già in forma canonica rispetto alla base B . Organizziamo i dati in forma tableau.

	x_1	x_2	\hat{x}_3	x_4	x_5	z	\bar{b}
$-z$	2	-1	-3	0	0	-1	0
x_4	1	2	1	1	0	0	2
x_5	2	1	1	0	1	0	3

La situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} \quad B = [A_4 \ A_5] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_1, x_2, \hat{x}_3, x_4, x_5) = (0, 0, 0, 2, 3)$ di valore $z = 0$.

Osserviamo che nella prima riga del tableau sono presenti alcuni costi ridotti negativi (-1 e -3), quindi la base B non è ottima. Procediamo dunque con l'operazione di cambio base. Seguendo la regola di Bland, scegliamo come variabile con costo ridotto negativo che entra in base, la variabile x_2 e per scegliere la variabile che esce di base calcoliamo il minimo quoziente $\theta = \min_{i=1,2} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i2}} : \bar{a}_{i2} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{2}{2}, \frac{3}{1} \right\} = \frac{2}{2} = 1$.

Poiché il minimo rapporto θ corrisponde a x_4 , scegliamo x_4 come variabile uscente.

Consideriamo dunque la nuova base $B = \{x_2, x_5\}$ ed eseguiamo l'operazione di pivot sull'elemento riquadrato nel tableau precedente. Per riportare il tableau alla forma canonica rispetto alla nuova base eseguiamo le seguenti operazioni sulle righe.

Operazioni: $R_1 \leftarrow R_1/2$, $R_2 \leftarrow R_2 - R_1/2$, $R_0 \leftarrow R_0 + R_1/2$.

	x_1	x_2	\hat{x}_3	x_4	x_5	z	\bar{b}
$-z$	$5/2$	0	$-5/2$	$1/2$	0	-1	1
x_2	$1/2$	1	$1/2$	$1/2$	0	0	1
x_5	$3/2$	0	$1/2$	$-1/2$	1	0	2

La situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_1 \\ \hat{x}_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad B = [A_2 \ A_5] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_1, x_2, \hat{x}_3, x_4, x_5) = (0, 1, 0, 0, 2)$ di valore $z = -1$.

Nella prima riga del tableau è presente un costo ridotto negativo in corrispondenza della variabile \hat{x}_3 , $-5/2 < 0$, quindi la base B non è ottima. Procediamo dunque cambiando base. Scegliamo come variabile che entra in base, la variabile corrispondente al costo ridotto negativo, ovvero \hat{x}_3 e, come variabile uscente, la variabile che corrisponde al minimo rapporto $\theta = \min_{i=1,2} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i3}} : \bar{a}_{i3} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{1}{1/2}, \frac{2}{1/2} \right\} = \frac{1}{1/2} = 2$, ovvero la variabile x_2 .

Consideriamo dunque la nuova base $B = \{\hat{x}_3, x_5\}$ ed eseguiamo l'operazione di pivot sull'elemento riquadrato nel tableau precedente. Per riportare il tableau alla forma canonica rispetto alla nuova base eseguiamo le seguenti operazioni sulle righe.

Operazioni: $R_1 \leftarrow 2R_1, R_2 \leftarrow R_2 - R_1, R_0 \leftarrow R_0 + 5R_1$.

	x_1	x_2	\hat{x}_3	x_4	x_5	z	\bar{b}
$-z$	5	5	0	3	0	-1	6
\hat{x}_3	1	2	1	1	0	0	2
x_5	1	-1	0	-1	1	0	1

La situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} \hat{x}_3 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad B = [A_3 \ A_5] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_1, x_2, \hat{x}_3, x_4, x_5) = (0, 0, 2, 0, 1)$ di valore $z = -6$.

Osserviamo che tutti i costi ridotti nella prima riga sono non negativi e quindi la base corrente $B = \{\hat{x}_3, x_5\}$ è ottima $x = (x_1, x_2, \hat{x}_3, x_4, x_5) = (0, 0, 2, 0, 1)$ è una soluzione ottima di valore ottimo $z = -6$. Il problema di programmazione lineare originale ammette dunque una soluzione ottima $x = (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, -2)$ di valore $z_{MAX} = -z_{MIN} = 6$.

8) Risolvere il seguente problema di programmazione lineare.

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 3x_2 - 12x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 + 4x_3 \geq -2 \\ & 2x_1 + 2x_2 - 6x_3 \leq 4 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_3 \leq 0 \end{aligned}$$

Soluzione. Riscriviamo il problema in forma standard. Poiché $x_3 \leq 0$ introduciamo una nuova variabile $\hat{x}_3 = -x_3$ con $\hat{x}_3 \geq 0$

$$\begin{aligned} \min \quad & -2x_1 - 3x_2 - 12\hat{x}_3 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + 4\hat{x}_3 + x_4 = 2 \\ & 2x_1 + 2x_2 + 6\hat{x}_3 + x_5 = 4 \\ & x_1 - x_2 + x_6 = 2 \\ & x_1, x_2, \hat{x}_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

Avendo aggiunto le variabili di slack (x_4 , x_5 e x_6), disponiamo di una base ammissibile di partenza $B = \{x_4, x_5, x_6\}$ e il problema è già in forma canonica rispetto a B . Organizziamo i dati in forma tableau.

	x_1	x_2	\hat{x}_3	x_4	x_5	x_6	z	\bar{b}
$-z$	-2	-3	-12	0	0	0	-1	0
x_4	-1	1	4	1	0	0	0	2
x_5	2	2	6	0	1	0	0	4
x_6	1	-1	0	0	0	1	0	2

La situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} \quad B = [A_4 \ A_5 \ A_6] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_1, x_2, \hat{x}_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 0, 0, 2, 4, 2)$ di valore $z = 0$.

Nella prima riga del tableau sono presenti alcuni costi ridotti negativi (-2 , -3 e -12), quindi la base B non è ottima. Procediamo dunque con l'operazione di cambio base. Seguendo la regola di Bland, scegliamo come variabile con costo ridotto negativo che entra in base, la variabile x_1 e, come variabile che esce dalla base, la variabile che corrisponde al minimo rapporto $\theta = \min_{i=1,2,3} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i1}} : \bar{a}_{i1} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{2}{-1}, \frac{4}{2}, \frac{2}{1} \right\} = 2$. Poiché sia x_5 che x_6 corrispondono al minimo rapporto $\theta = 2$, per la regola di Bland, scegliamo come variabile uscente quella di indice minimo, ovvero x_5 .

La nuova base è dunque $B = \{x_4, x_1, x_6\}$. Eseguiamo l'operazione di pivot sull'elemento riquadrato nel tableau precedente. Per riportare il tableau alla forma canonica rispetto alla nuova base eseguiamo le seguenti operazioni sulle righe.

Operazioni: $R_2 \leftarrow R_2/2$, $R_1 \leftarrow R_1 + R_2/2$, $R_3 \leftarrow R_3 - R_2/2$, $R_0 \leftarrow R_0 + R_2$.

	x_1	x_2	\hat{x}_3	x_4	x_5	x_6	z	\bar{b}
$-z$	0	-1	-6	0	1	0	-1	4
x_4	0	2	7	1	1/2	0	0	4
x_1	1	1	3	0	1/2	0	0	2
x_6	0	-2	-3	0	-1/2	1	0	0

La situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_2 \\ \hat{x}_3 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad B = [A_4 \ A_1 \ A_6] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_1, x_2, \hat{x}_3, x_4, x_5, x_6) = (2, 0, 0, 4, 0, 0)$ di valore $z = -4$.

Osserviamo che nella prima riga del tableau sono presenti alcuni costi ridotti negativi (-1 e -6), quindi la base B non è ottima. Procediamo quindi con l'operazione di cambio base. Seguendo la regola di Bland, scegliamo come variabile con costo ridotto negativo che entra in base, la variabile x_2 e per scegliere la variabile che esce di base calcoliamo $\theta = \min_{i=1,2,3} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i2}} : \bar{a}_{i2} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{4}{2}, \frac{2}{1}, \frac{0}{-2} \right\} = 2$. Poiché sia x_4 che x_1 corrispondono al minimo rapporto $\theta = 2$, per la regola di Bland, scegliamo come variabile uscente quella di indice minimo, ovvero x_1 .

Consideriamo la nuova base $B = \{x_4, x_2, x_6\}$ ed eseguiamo l'operazione di pivot sull'elemento riquadrato nel tableau precedente. Per riportare il tableau alla forma canonica rispetto alla nuova base eseguiamo le seguenti operazioni sulle righe.

Operazioni: $R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2$, $R_3 \leftarrow R_3 + 2R_2$, $R_0 \leftarrow R_0 + R_2$.

Attenzione: Dato che nella colonna A_2 , l'entrata che corrisponde alla variabile uscente, x_1 , è già 1 e in corrispondenza di R_1 e R_2 abbiamo entrate 2 e -2 rispettivamente, si potrebbe eseguire l'operazione $R_1 \leftarrow R_1 - R_3$. Tale operazione è lecita, tuttavia si osservi che non è conveniente in quanto con questa operazione si andrebbe a modificare anche la colonna A_6 , ottenendo un -1 nella prima riga, posizione nella quale dovrebbe trovarsi uno 0 affinché il tableau sia in forma canonica rispetto alla base $B = \{x_4, x_2, x_6\}$. Tale operazione comporterebbe, dunque, a dover risistemare la colonna A_6 e, inoltre, l'unica operazione possibile per risistemare tale entrata sarebbe esattamente l'operazione opposta: $R_1 \leftarrow R_1 + R_3$, che ricondurrebbe al tableau precedente. Si osservi, quindi, che è sempre conveniente riferire le operazioni sulle righe alla riga che corrisponde alla variabile uscente, in questo caso R_2 .

	x_1	x_2	\hat{x}_3	x_4	x_5	x_6	z	\bar{b}
$-z$	1	0	-3	0	3/2	0	-1	6
x_4	-2	0	1	1	-1/2	0	0	0
x_2	1	1	3	0	1/2	0	0	2
x_6	2	0	3	0	1/2	1	0	4

La situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_1 \\ \hat{x}_3 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad B = [A_4 \ A_2 \ A_6] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_1, x_2, \hat{x}_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 2, 0, 0, 0, 4)$ di valore $z = -6$.

Osserviamo che nella prima riga del tableau è presente un costo ridotto negativo, $-3 < 0$, quindi la base corrente B non è ottima. Procediamo dunque con l'operazione di cambio base. Scegliamo come variabile che entra in base, la variabile corrispondente al costo ridotto negativo, ovvero \hat{x}_3 e come variabile che esce di base, la variabile che corrisponde al minimo rapporto $\theta = \min_{i=1,2,3} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i3}} : \bar{a}_{i3} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{0}{1}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right\} = \frac{0}{1}$, quindi la variabile x_4 esce di base.

Consideriamo la nuova base $B = \{\hat{x}_3, x_2, x_6\}$ ed eseguiamo l'operazione di pivot sull'elemento riquadrato nel tableau precedente. Per riportare il tableau alla forma canonica rispetto alla nuova base eseguiamo le seguenti operazioni sulle righe.

Operazioni: $R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1$, $R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1$, $R_0 \leftarrow R_0 + 3R_1$.

	x_1	x_2	\hat{x}_3	x_4	x_5	x_6	z	\bar{b}
$-z$	-5	0	0	3	0	0	-1	6
\hat{x}_3	-2	0	1	1	-1/2	0	0	0
x_2	7	1	0	-3	2	0	0	2
x_6	8	0	0	-3	2	1	0	4

La situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} \hat{x}_3 \\ x_2 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad B = [A_3 \ A_2 \ A_6] = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_1, x_2, \hat{x}_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 2, 0, 0, 0, 4)$ di valore $z = -6$. (La stessa soluzione del passo precedente.)

Osserviamo che nella prima riga del tableau è presente un costo ridotto negativo, $-5 < 0$, quindi la base corrente B non è ottima. Procediamo dunque con l'operazione di cambio base e scegliamo come variabile che entra in base, la variabile che corrisponde al costo ridotto negativo, ovvero x_1 (nuovamente!) e, come

variabile che esce di base, la variabile che corrisponde al minimo rapporto $\theta = \min_{i=1,2,3} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i1}} : \bar{a}_{i1} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{0/2}{-2}, \frac{2}{7}, \frac{4}{8} \right\} = \frac{2}{7}$, ovvero la variabile x_2 .

Consideriamo dunque la nuova base $B = \{x_3, x_1, x_6\}$ ed eseguiamo l'operazione di pivot sull'elemento riquadrato nel tableau precedente. Per riportare il tableau alla forma canonica rispetto alla nuova base eseguiamo le seguenti operazioni sulle righe.

Operazioni: $R_2 \leftarrow R_2/7$, $R_1 \leftarrow R_1 + 2/7R_2$, $R_3 \leftarrow R_3 - 8/7R_2$, $R_0 \leftarrow R_0 + 5/7R_2$.

	x_1	x_2	\hat{x}_3	x_4	x_5	x_6	z	\bar{b}
$-z$	0	5/7	0	6/7	10/7	0	-1	52/7
\hat{x}_3	0	2/7	1	1/7	1/14	0	0	4/7
x_1	1	1/7	0	-3/7	2/7	0	0	2/7
x_6	0	-8/7	0	3/7	-2/7	1	0	12/7

La situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} \hat{x}_3 \\ x_1 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad B = [A_3 \quad A_1 \quad A_6] = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_1, x_2, \hat{x}_3, x_4, x_5, x_6) = (2/7, 0, 4/7, 0, 0, 12/7)$ di valore $z = -52/7$.

Osserviamo che i costi ridotti nella prima riga sono tutti non negativi, quindi la base corrente $B = \{\hat{x}_3, x_1, x_6\}$ è ottima. La soluzione ottima è $x = (x_1, x_2, \hat{x}_3, x_4, x_5, x_6) = (2/7, 0, 4/7, 0, 0, 12/7)$ di valore $z = -52/7$. Il problema di programmazione lineare originale ammette dunque una soluzione ottima $x = (x_1, x_2, x_3) = (2/7, 0, -4/7)$ di valore $z_{MAX} = -z_{MIN} = 52/7$.

- 9) Risolvere il seguente problema di programmazione lineare partendo dalla base $\{x_1, x_2\}$ oppure dalla base $\{x_1, x_4\}$.

$$\begin{aligned} \max \quad & -3x_1 + x_2 + 6x_3 - 2x_4 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \\ & 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 4 \\ & x_1, x_2, x_4 \geq 0 \\ & x_3 \leq 0 \end{aligned}$$

Soluzione. Riscriviamo il problema in forma standard. Poiché $x_3 \leq 0$ introduciamo una nuova variabile $\hat{x}_3 = -x_3$ con $\hat{x}_3 \geq 0$

$$\begin{array}{ll}
\min & 3x_1 - x_2 + 6\hat{x}_3 + 2x_4 \\
s.t. & 2x_1 + 3x_2 - \hat{x}_3 - 2x_4 = 3 \\
& 2x_1 - 2x_2 - 2\hat{x}_3 + 4x_4 = 4 \\
& x_1, x_2, \hat{x}_3, x_4 \geq 0
\end{array}$$

Consideriamo la base $B = \{x_1, x_2\}$ e verifichiamo se è una base ammissibile. Organizziamo i dati in forma tableau, tralasciando la funzione obiettivo.

	x_1	x_2	\hat{x}_3	x_4	\bar{b}
x_1	2	3	-1	-2	3
x_2	2	-2	-2	4	4

Per riportare il tableau alla forma canonica rispetto alla base $B = \{x_1, x_2\}$ eseguiamo per prima cosa l'operazione di pivot sull'elemento in riga 1 e colonna 1 riquadrato nel tableau precedente, applicando le seguenti operazioni sulle righe.

Operazioni: $R_1 \leftarrow R_1/2$, $R_2 \leftarrow R_2 - R_1$.

	x_1	x_2	\hat{x}_3	x_4	\bar{b}
x_1	1	3/2	-1/2	-1	3/2
x_2	0	-5	-1	6	1

Ora eseguiamo l'operazione di pivot sull'elemento in riga 2 e colonna 2 riquadrato nel tableau precedente, applicando le seguenti operazioni sulle righe.

Operazioni: $R_2 \leftarrow -R_2/5$, $R_1 \leftarrow R_1 + 3/10R_2$.

	x_1	x_2	\hat{x}_3	x_4	\bar{b}
x_1	1	0	-4/5	4/5	9/5
x_2	0	1	1/5	-6/5	-1/5

Allora, la soluzione associata alla base $B = \{x_1, x_2\}$ è $x = (x_1, x_2, \hat{x}_3, x_4) = (9/5, -1/5, 0, 0)$, ma $x_2 = -1/5 < 0$, quindi la base B non è una base ammissibile e pertanto il metodo del simplesso non può essere applicato a questa base.

Ora, consideriamo la base $B = \{x_1, x_4\}$ e ne verifichiamo l'ammissibilità. Consideriamo il tableau iniziale.

	x_1	x_2	\hat{x}_3	x_4	\bar{b}
x_1	2	3	-1	-2	3
x_4	2	-2	-2	4	4

Per riportare il tableau alla forma canonica rispetto alla base $B = \{x_1, x_4\}$ eseguiamo per prima cosa l'operazione di pivot sull'elemento in riga 1 e colonna 1 riquadrato nel tableau precedente, come nel caso precedente.

Operazioni: $R_1 \leftarrow R_1/2, R_2 \leftarrow R_2 - R_1$.

	x_1	x_2	\hat{x}_3	x_4	\bar{b}
x_1	1	$3/2$	$-1/2$	-1	$3/2$
x_4	0	-5	-1	6	1

Ora eseguiamo l'operazione di pivot sull'elemento in riga 2 e colonna 4, applicando le seguenti operazioni sulle righe.

Operazioni: $R_2 \leftarrow R_2/6, R_1 \leftarrow R_1 + R_2/6$.

	x_1	x_2	\hat{x}_3	x_4	\bar{b}
x_1	1	$2/3$	$-2/3$	0	$5/3$
x_4	0	$-5/6$	$-1/6$	1	$1/6$

Allora la soluzione associata alla base $B = \{x_1, x_4\}$ è $x = (x_1, x_2, \hat{x}_3, x_4) = (5/3, 0, 0, 1/6)$. Osserviamo che $x_1, x_2, \hat{x}_3, x_4 \geq 0$, quindi la base $B = \{x_1, x_4\}$ è una base ammissibile e possiamo risolvere il problema applicando il metodo del simplesso a partire da questa base.

Per testare l'ottimalità della base in oggetto, abbiamo bisogno dei costi ridotti. Completiamo dunque il tableau con la funzione obiettivo.

	x_1	x_2	\hat{x}_3	x_4	z	\bar{b}
$-z$	3	-1	6	2	-1	0
x_1	1	$2/3$	$-2/3$	0	0	$5/3$
x_4	0	$-5/6$	$-1/6$	1	0	$1/6$

Per riportare il tableau alla forma canonica rispetto alla base $B = \{x_1, x_4\}$, dobbiamo esprimere la funzione obiettivo unicamente in termini delle variabili fuori base. Eseguiamo, dunque, le seguenti operazioni sulla riga relativa alla funzione obiettivo.

Operazione: $R_0 \leftarrow R_0 - 3R_1$.

	x_1	x_2	\hat{x}_3	x_4	z	\bar{b}
$-z$	0	-3	8	2	-1	-5
x_1	1	2/3	-2/3	0	0	5/3
x_4	0	-5/6	-1/6	1	0	1/6

Operazione: $R_0 \leftarrow R_0 - 2R_2$.

	x_1	x_2	\hat{x}_3	x_4	z	\bar{b}
$-z$	0	-4/3	25/3	0	-1	-16/3
x_1	1	2/3	-2/3	0	0	5/3
x_4	0	-5/6	-1/6	1	0	1/6

La situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} \quad B = [A_1 \quad A_4] = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_1, x_2, \hat{x}_3, x_4) = (5/3, 0, 0, 1/6)$ di valore $z = 16/3$.

Osserviamo che nella prima riga del tableau è presente un costo ridotto negativo, $-4/3 < 0$, quindi la base B non è ottima. Procediamo dunque con l'operazione di cambio base. Scegliamo come variabile che entra in base, la variabile corrispondente a tale costo ridotto negativo, ovvero x_2 e, come variabile che esce di base, la variabile che corrisponde al minimo rapporto $\theta = \min_{i=1,2} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i2}} : \bar{a}_{i2} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{5/3}{2/3}, \frac{1/6}{-5/6} \right\} = \frac{5/3}{2/3}$, ovvero la variabile x_1 .

Consideriamo dunque la nuova base $B = \{x_2, x_4\}$ ed eseguiamo l'operazione di pivot sull'elemento in riga 1 e colonna 2 riquadrato nel tableau precedente. Per riportare il tableau alla forma canonica rispetto alla nuova base eseguiamo le seguenti operazioni sulle righe.

Operazioni: $R_1 \leftarrow R_1 \cdot 3/2$, $R_2 \leftarrow R_2 + 5/4R_1$, $R_0 \leftarrow R_0 + 2R_1$.

	x_1	x_2	\hat{x}_3	x_4	z	\bar{b}
$-z$	2	0	7	0	-1	-2
x_2	3/2	1	-1	0	0	5/2
x_4	5/4	0	-1	1	0	9/4

La situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_1 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} \quad B = [A_2 \quad A_4] = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_1, x_2, \hat{x}_3, x_4) = (0, 5/2, 0, 9/4)$ di valore $z = 2$.

Osserviamo che tutti i costi ridotti nella prima riga sono non negativi e quindi la base corrente $B = \{x_2, x_4\}$ è ottima. La soluzione ottima è $x = (x_1, x_2, \hat{x}_3, x_4) = (0, 5/2, 0, 9/4)$ di valore $z = 2$. Il problema di programmazione lineare originale ammette dunque una soluzione ottima $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 5/2, 0, 9/4)$ di valore $z_{MAX} = -z_{MIN} = -2$.

- 10) Risolvere il seguente problema di programmazione lineare partendo dalla base $\{x_4, x_5, x_6\}$ oppure dalla base $\{x_1, x_5, x_6\}$.

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 1 \\ & x_1 + 2x_3 \leq 2 \\ & -x_1 - 2x_2 - x_3 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Soluzione. Riscriviamo il problema in forma standard. Poiché $x_2 \leq 0$ introduciamo una nuova variabile $\hat{x}_2 = -x_2$ con $\hat{x}_2 \geq 0$.

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 + 2\hat{x}_2 - 2x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 - \hat{x}_2 - 2x_3 - x_4 = 1 \\ & x_1 + 2x_3 + x_5 = 2 \\ & -x_1 + 2\hat{x}_2 - x_3 + x_6 = 3 \\ & x_1, \hat{x}_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

Consideriamo la base $B = \{x_4, x_5, x_6\}$ e verifichiamo se è una base ammissibile. Organizziamo i dati in forma tableau tralasciando la funzione obiettivo.

	x_1	\hat{x}_2	x_3	x_4	x_5	x_6	\bar{b}
x_4	2	-1	-2	-1	0	0	1
x_5	1	0	2	0	1	0	2
x_6	-1	2	-1	0	0	1	3

Per riportare il tableau alla forma canonica rispetto alla base $B = \{x_4, x_5, x_6\}$ eseguiamo l'operazione di pivot sull'elemento in riga 1 e colonna 4 riquadrato nel tableau precedente, applicando la seguente operazione sulla prima riga.

Operazioni: $R_1 \leftarrow R_1 \cdot (-1)$.

	x_1	\hat{x}_2	x_3	x_4	x_5	x_6	\bar{b}
x_4	-2	1	2	1	0	0	-1
x_5	1	0	2	0	1	0	2
x_6	-1	2	-1	0	0	1	3

La soluzione associata alla base $B = \{x_4, x_5, x_6\}$ è $x = (x_1, \hat{x}_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 0, 0, -1, 2, 3)$. Osserviamo che $x_4 = -1 < 0$, quindi la base B non è una base ammissibile e il metodo del simplesso non può, dunque, essere applicato a questa base.

Consideriamo, ora, la base $B = \{x_1, x_5, x_6\}$ e riportiamo il tableau alla forma canonica rispetto a tale base per verificarne l'ammissibilità.

Consideriamo il tableau iniziale.

	x_1	\hat{x}_2	x_3	x_4	x_5	x_6	\bar{b}
x_1	2	-1	-2	-1	0	0	1
x_5	1	0	2	0	1	0	2
x_6	-1	2	-1	0	0	1	3

Eseguiamo l'operazione di pivot sull'elemento riquadrato nel tableau precedente, applicando le seguenti operazioni sulle righe.

Operazioni: $R_1 \leftarrow R_1/2$, $R_2 \leftarrow R_2 - R_1/2$, $R_3 \leftarrow R_3 + R_1/2$.

	x_1	\hat{x}_2	x_3	x_4	x_5	x_6	\bar{b}
x_1	1	-1/2	-1	-1/2	0	0	1/2
x_5	0	1/2	3	1/2	1	0	3/2
x_6	0	3/2	-2	-1/2	0	1	7/2

Ora il tableau è in forma canonica rispetto alla base $B = \{x_1, x_5, x_6\}$ e la soluzione associata a tale base è $x = (x_1, \hat{x}_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (1/2, 0, 0, 0, 3/2, 7/2)$. Osserviamo che $x_1, \hat{x}_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$, quindi la base B è una base ammissibile e possiamo risolvere il problema applicando il metodo del simplesso a partire da questa base.

Per testare l'ottimalità della base in oggetto, abbiamo bisogno dei costi ridotti. Completiamo dunque il tableau con la funzione obiettivo.

	x_1	\hat{x}_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	\bar{b}
$-z$	-1	2	-2	0	0	0	-1	0
x_1	1	-1/2	-1	-1/2	0	0	0	1/2
x_5	0	1/2	3	1/2	1	0	0	3/2
x_6	0	3/2	-2	-1/2	0	1	0	7/2

Per riportare tale tableau alla forma canonica rispetto alla base $B = \{x_1, x_5, x_6\}$, eseguiamo la seguente operazione sulla riga relativa alla funzione obiettivo.

Operazione: $R_0 \leftarrow R_0 + R_1$.

	x_1	\hat{x}_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	\bar{b}
$-z$	0	3/2	-3	-1/2	0	0	-1	1/2
x_1	1	-1/2	-1	-1/2	0	0	0	1/2
x_5	0	1/2	3	1/2	1	0	0	3/2
x_6	0	3/2	-2	-1/2	0	1	0	7/2

La situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad B = [A_1 \quad A_5 \quad A_6] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_1, \hat{x}_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (1/2, 0, 0, 0, 3/2, 7/2)$ di valore $z = -1/2$.

Osserviamo che nella prima riga del tableau sono presenti alcuni costi ridotti negativi (-3 e $-1/2$), quindi la base B non è ottima. Procediamo dunque con l'operazione di cambio base. Seguendo la regola di Bland, scegliamo come variabile con costo ridotto negativo che entra in base, la variabile x_3 e, come variabile che esce di base, la variabile che corrisponde al minimo rapporto $\theta = \min_{i=1,2,3} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i3}} : \bar{a}_{i3} > 0 \right\} =$

$$\min \left\{ \frac{1/2}{-1}, \frac{3/2}{3}, \frac{7/2}{-2} \right\} = \frac{3/2}{3}, \text{ ovvero la variabile } x_5.$$

Consideriamo dunque la nuova base $B = \{x_1, x_3, x_6\}$ ed eseguiamo l'operazione di pivot sull'elemento in riga 2 e colonna 3 riquadrato nel tableau precedente. Per riportare il tableau alla forma canonica rispetto alla nuova base eseguiamo le seguenti operazioni sulle righe.

Operazioni: $R_2 \leftarrow R_2/3, R_1 \leftarrow R_1 + R_2/3, R_3 \leftarrow R_3 + 2/3R_2, R_0 \leftarrow R_0 + R_2$.

	x_1	\hat{x}_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	\bar{b}
$-z$	0	2	0	0	1	0	-1	2
x_1	1	-1/3	0	-1/3	1/3	0	0	1
x_3	0	1/6	1	1/6	1/3	0	0	1/2
x_6	0	11/6	0	-1/6	2/3	1	0	9/2

La situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad B = [A_1 \quad A_3 \quad A_6] = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_1, \hat{x}_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (1, 0, 1/2, 0, 0, 9/2)$ di valore $z = -2$.

Osserviamo che tutti i costi ridotti nella prima riga sono non negativi e quindi la base corrente $B = \{x_1, x_3, x_6\}$ è ottima. La soluzione ottima è $x = (x_1, \hat{x}_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (1, 0, 1/2, 0, 0, 9/2)$ di valore $z = -2$. Il problema di programmazione lineare originale ammette dunque una soluzione ottima $x = (x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 1/2)$ di valore $z_{MAX} = -z_{MIN} = 2$.

11) Risolvere il seguente problema di programmazione lineare.

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 4x_2 - x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 2 \\ & -x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq 1 \\ & x_2 - 4x_3 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Soluzione. Riscriviamo il problema in forma standard.

$$\begin{aligned} \min \quad & -3x_1 - 4x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 2 \\ & -x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_5 = 1 \\ & x_2 - 4x_3 + x_6 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

Avendo aggiunto le variabili di slack (x_4, x_5 e x_6), disponiamo di una base ammissibile di partenza $B = \{x_4, x_5, x_6\}$ e il problema è già in forma canonica rispetto alla base B . Organizziamo i dati in forma tableau.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	\bar{b}
$-z$	-3	-4	1	0	0	0	-1	0
x_4	1	1	-3	1	0	0	0	2
x_5	-1	-2	2	0	1	0	0	1
x_6	0	1	-4	0	0	1	0	2

La situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad B = [A_4 \ A_5 \ A_6] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 0, 0, 2, 1, 2)$ di valore $z = 0$.

Nella prima riga del tableau sono presenti alcuni costi ridotti negativi (-3 e -4), quindi la base B non è ottima. Procediamo dunque con l'operazione di cambio base. Seguendo la regola di Bland, scegliamo come variabile con costo ridotto negativo che entra in base, la variabile x_1 e, come variabile che esce di base, la variabile che corrisponde al minimo rapporto $\theta = \min_{i=1,2,3} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i1}} : \bar{a}_{i1} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{2}{1}, \frac{1}{-1}, \frac{2}{0} \right\} = \frac{2}{1}$, ovvero la variabile x_4 .

Consideriamo dunque la nuova base $B = \{x_1, x_5, x_6\}$ ed eseguiamo l'operazione di pivot sull'elemento in riga 1 e colonna 1 riquadrato nel tableau precedente. Per riportare il tableau alla forma canonica rispetto alla nuova base eseguiamo le seguenti operazioni sulle righe.

Operazioni: $R_2 \leftarrow R_2 + R_1$, $R_0 \leftarrow R_0 + 3R_1$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	\bar{b}
$-z$	0	-1	-8	3	0	0	-1	6
x_1	1	1	-3	1	0	0	0	2
x_5	0	-1	-1	1	1	0	0	3
x_6	0	1	-4	0	0	1	0	2

La situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad B = [A_1 \ A_5 \ A_6] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (2, 0, 0, 0, 3, 2)$ di valore $z = -6$.

Osserviamo che nella prima riga del tableau sono presenti alcuni costi ridotti negativi (-1 e -8), quindi la base B non è ottima. Osserviamo inoltre che il costo ridotto relativo alla variabile x_3 è negativo e le restanti entrate della colonna A_3 , sono tutte non positive, quindi il problema è illimitato.

Si ricordi che è sufficiente che esista una colonna con costo ridotto negativo e con le restanti entrate tutte non positive, per poter immediatamente concludere che il problema è illimitato. (In questo caso, anche se avremmo potuto proseguire con il metodo del simplesso con la colonna A_2 , osservando la colonna A_3 , possiamo immediatamente concludere che il problema è illimitato.)

12) Risolvere il seguente problema di programmazione lineare.

$$\begin{array}{rcl} \max & 2x_1 & + \quad 3x_2 & - \quad x_3 & + \quad 3x_4 \\ s.t. & x_1 & - \quad x_2 & + \quad 2x_3 & - \quad 2x_4 & \geq & -2 \\ & 2x_1 & + \quad 2x_2 & + \quad x_3 & + \quad 4x_4 & \leq & 4 \\ & x_1 & - \quad x_2 & + \quad 2x_3 & & \leq & 2 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 \\ & & & & & x_4 & \leq & 0 \end{array}$$

Soluzione. Riscriviamo il problema in forma standard. Poiché $x_4 \leq 0$ introduciamo una nuova variabile $\hat{x}_4 = -x_4$ con $\hat{x}_4 \geq 0$.

$$\begin{aligned}
 \min \quad & -2x_1 - 3x_2 + x_3 + 3\hat{x}_4 \\
 \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 - 2x_3 - 2\hat{x}_4 + x_5 = 2 \\
 & 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 4\hat{x}_4 + x_6 = 4 \\
 & x_1 - x_2 + 2x_3 + x_7 = 2 \\
 & x_1, x_2, x_3, \hat{x}_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
 \end{aligned}$$

Avendo aggiunto le variabili di slack (x_5, x_6 e x_7), disponiamo di una base ammissibile di partenza $B = \{x_5, x_6, x_7\}$ e il problema è già in forma canonica rispetto alla base B . Organizziamo i dati in forma tableau.

	x_1	x_2	x_3	\hat{x}_4	x_5	x_6	x_7	z	\bar{b}
$-z$	-2	-3	1	3	0	0	0	-1	0
x_5	-1	1	-2	-2	1	0	0	0	2
x_6	2	2	1	-4	0	1	0	0	4
x_7	1	-1	2	0	0	0	1	0	2

La situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \hat{x}_4 \end{bmatrix} \quad B = [A_5 \ A_6 \ A_7] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (0, 0, 0, 0, 2, 4, 2)$ di valore $z = 0$.

Osserviamo che nella prima riga del tableau sono presenti alcuni costi ridotti negativi (-2 e -3), quindi la base B non è ottima. Procediamo dunque con l'operazione di cambio base. Seguendo la regola di Bland, scegliamo come variabile con costo ridotto negativo che entra in base, la variabile x_1 . Dato che $h = 1$, il quoziente minimo è $\theta = \min_{i=1,2,3} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i1}} : \bar{a}_{i1} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{2}{-1}, \frac{4}{2}, \frac{2}{1} \right\} = 2$. Poiché sia x_6 che x_7 corrispondono al minimo rapporto $\theta = 2$, per la regola di Bland, scegliamo come variabile uscente quella di indice minimo, ovvero x_6 .

Consideriamo dunque la nuova base $B = \{x_5, x_1, x_7\}$ ed eseguiamo l'operazione di pivot sull'elemento in riga 2 e colonna 1 riquadrato nel tableau precedente. Per riportare il tableau alla forma canonica rispetto alla nuova base eseguiamo le seguenti operazioni sulle righe.

Operazioni: $R_2 \leftarrow R_2/2$, $R_1 \leftarrow R_1 + R_2/2$, $R_3 \leftarrow R_3 - R_2/2$, $R_0 \leftarrow R_0 + R_2$.

	x_1	x_2	x_3	\hat{x}_4	x_5	x_6	x_7	z	\bar{b}
$-z$	0	-1	2	-1	0	1	0	-1	4
x_5	0	2	-3/2	-4	1	1/2	0	0	4
x_1	1	1	1/2	-2	0	1/2	0	0	2
x_7	0	-2	3/2	2	0	-1/2	1	0	0

La situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_1 \\ x_7 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \hat{x}_4 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad B = [A_5 \quad A_1 \quad A_7] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_1, x_2, x_3, \hat{x}_4, x_5, x_6, x_7) = (2, 0, 0, 0, 4, 0, 0)$ di valore $z = -4$.

Osserviamo che nella prima riga del tableau sono presenti alcuni costi ridotti negativi (-1 e -1), quindi la base B non è ottima. Procediamo dunque con l'operazione di cambio base. Seguendo la regola di Bland, scegliamo come variabile con costo ridotto negativo che entra in base, la variabile x_2 . Dato che $h = 2$, il quoziente minimo è $\theta = \min_{i=1,2,3} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i2}} : \bar{a}_{i2} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{4}{2}, \frac{2}{1}, \frac{0}{-2} \right\} = 2$. Poiché sia x_5 che x_1 corrispondono al minimo rapporto $\theta = 2$, per la regola di Bland, scegliamo come variabile uscente quella di indice minimo, ovvero x_1 .

Consideriamo dunque la nuova base $B = \{x_5, x_2, x_7\}$ ed eseguiamo l'operazione di pivot sull'elemento in riga 2 e colonna 2 riquadrato nel tableau precedente. Per riportare il tableau alla forma canonica rispetto alla nuova base eseguiamo le seguenti operazioni sulle righe.

Operazioni: $R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2$, $R_3 \leftarrow R_3 + 2R_2$, $R_0 \leftarrow R_0 + R_2$. (Si ricordi che non è conveniente eseguire l'operazione $R_1 \leftarrow R_1 + R_3$ in quanto modificherebbe anche la colonna A_7 .)

	x_1	x_2	x_3	\hat{x}_4	x_5	x_6	x_7	z	\bar{b}
$-z$	1	0	5/2	-3	0	3/2	0	-1	6
x_5	-2	0	-5/2	0	1	-1/2	0	0	0
x_2	1	1	1/2	-2	0	1/2	0	0	2
x_7	2	0	5/2	-2	0	1/2	1	0	4

La situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_7 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ \hat{x}_4 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad B = [A_5 \ A_2 \ A_7] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_1, x_2, x_3, \hat{x}_4, x_5, x_6, x_7) = (0, 2, 0, 0, 0, 0, 4)$ di valore $z = -6$.

Osserviamo che nella prima riga del tableau è presente un costo ridotto negativo, $-3 < 0$, quindi la base B non è ottima. Osserviamo inoltre che le restanti entrate della colonna relativa a tale costo ridotto negativo sono tutte non positive, possiamo quindi immediatamente concludere che il problema è illimitato.

13) Si consideri il tableau seguente

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	\bar{b}
$-z$	-2	0	0	-7	5	0	-1	-17
x_6	11	0	0	-28	-7	1	0	22
x_3	28	0	1	1	0	0	0	14
x_2	36	1	0	5	8	0	0	18

e si risponda alle seguenti domande (senza svolgere calcoli):

- Scrivere la soluzione di base corrente e dire se è ottima.
- Su quali elementi è possibile eseguire l'operazione di pivot secondo il *metodo* del simplesso?
- Dire su quale elemento verrà fatto il pivot alla prossima iterazione del metodo del simplesso usando la regola di Bland.
- Giustificare perché non viene fatto il pivot sull'elemento in riga 1 e colonna 1 (elemento riquadrato).
- Stabilire, senza effettuare l'operazione di pivot, quale sarà il valore della funzione obiettivo alla fine della prossima iterazione del simplesso.
- Alla fine della prossima iterazione del simplesso sarà cambiata la base corrente: sarà cambiato anche il vertice del poliedro associato alla nuova base?
- Che caratteristica avrà la soluzione di base ottenuta applicando la regola di Bland?

Soluzione.

- a) Osserviamo che il tableau è in forma canonica rispetto alla base $B = \{x_6, x_3, x_2\}$. La situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_6 \\ x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad B = [A_6 \ A_3 \ A_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e la soluzione di base corrente è $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 18, 14, 0, 0, 22)$ di valore $z = 17$.

Osserviamo che nella prima riga del tableau sono presenti alcuni costi ridotti negativi, $(-2, -7 < 0)$, quindi la soluzione di base corrente non è detto sia ottima (ricordiamo che “costi ridotti tutti positivi o nulli” è condizione SUFFICIENTE e non necessaria di ottimalità)².

- b) Ricordiamo che il metodo del simplesso cerca cambi base che tendano a migliorare il valore della funzione obiettivo (quindi si fa entrare in base una qualsiasi colonna con costo ridotto negativo) preservando l'ammissibilità della nuova base (si fa uscire dalla base una qualsiasi variabile che soddisfi la regola del quoziente minimo). Pertanto, i possibili elementi pivot sono 28 (entra x_1 e esce x_3), 36 (entra x_1 e esce x_2) e 5 (entra x_4 e esce x_2).

- c) Seguendo la regola di Bland, l'operazione di pivot viene eseguita sull'elemento in riga t e in colonna h dove $h = \min \{j : \bar{c}_j < 0\}$ e $t = \arg \min_{i=1,2,3} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ih}} : \bar{a}_{ih} > 0 \right\}$ e nel caso di più variabili attualmente in base che corrispondono al minimo quoziente θ , $t = \min \left\{ B_i : \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ih}} = \theta \right\}$. Dal tableau osserviamo che i costi ridotti negativi $(-2, -7 < 0)$ corrispondono alle variabili x_1 e x_4 , quindi $h = \min \{1, 4\} = 1$. Allora il quoziente minimo corrisponde a $\theta = \min_{i=1,2,3} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i1}} : \bar{a}_{i1} > 0 \right\} = \min_{i=1,2,3} \left\{ \frac{22}{11}, \frac{14}{28}, \frac{18}{36} \right\} = \frac{1}{2}$. Ci sono due variabili corrispondenti a questo minimo rapporto, ovvero x_3 ($t = 2$) e x_2 ($t = 3$). Pertanto, applicando la regola di Bland, si sceglie come variabile uscente x_2 (che ha l'indice minimo), dunque $t = 3$ e alla prossima iterazione del metodo del simplesso, l'operazione di pivot verrà eseguita sull'elemento 36 in riga $t = 3$ e in colonna $h = 1$.

- d) L'operazione di pivot non può essere effettuata sull'elemento in riga 1 e colonna 1 in quanto questa operazione porterebbe ad una soluzione non ammissibile,

²In ogni caso, possiamo osservare anche che, essendo tutti i termini noti (colonna \bar{b}) strettamente positivi, allora sicuramente, aumentando il valore delle variabili corrispondenti a tali costi ridotti negativi, ovvero aumentando il valore di x_1 o x_4 , è possibile trovare una soluzione ammissibile con valore della funzione obiettivo strettamente minore e quindi possiamo escludere che la base considerata sia ottima.

visto che l'elemento non soddisfa la regola del quoziente minimo. In altre parole, effettuando questo pivot, la variabile x_1 (che entra in base) assumerebbe un valore (che corrisponde al rapporto non minimo $\frac{22}{11}$) tale da portare a 0 la variabile x_6 (che uscirebbe dalla base), ma troppo alto, in quanto, per soddisfare i restanti vincoli, le altre variabili dovrebbero assumere valori negativi.

- e) Con l'operazione di pivot sull'elemento in riga 3 e colonna 1, la variabile x_1 , il cui costo ridotto è $\bar{c}_1 = -2$, entra in base con un valore pari al quoziente minimo $\theta = \frac{1}{2}$ e pertanto, si avrà una variazione del valore della funzione obiettivo pari a $\bar{c}_1 \cdot \theta = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1$, quindi il valore della funzione obiettivo alla fine della prossima iterazione del simplesso sarà $-(-17) - 1 = 16$.
- f) Alla fine della prossima iterazione del simplesso la base sarà $\widehat{B} = \{x_6, x_3, x_1\}$ e sarà cambiato anche il vertice del poliedro associato alla nuova base, in quanto la soluzione di base corrente è non degenere e quindi ci sarà sicuramente una variazione del valore delle variabili (in sintesi, sarà sicuramente $\theta \neq 0$): per esempio, la prima componente della nuova soluzione (ovvero la prima componente del vettore che individua il nuovo vertice), che nella soluzione corrente vale $x_1 = 0$, come abbiamo visto, sarà $\widehat{x}_1 = \frac{1}{2}$.
- g) La regola di Bland impone l'operazione di pivot sulla prima colonna, dove due variabili x_3 e x_2 corrispondono al rapporto minimo. Pertanto, sia x_2 sia x_3 assumeranno il valore 0 nella nuova base: x_2 esce dalla base e x_3 rimane in base al valore 0, rendendo la nuova base DEGENERARE.