Ricerca Operativa

Modelli di Programmazione Lineare

Luigi De Giovanni, Laura Brentegani

AVVERTENZA: le note presentate di seguito non hanno alcuna pretesa di completezza, né hanno lo scopo di sostituirsi alle spiegazioni del docente. Il loro scopo è quello di fissare alcuni concetti presentati in classe. Le note contengono un numero limitato di esempi ed esercizi svolti. Questi rappresentano una parte fondamentale nella comprensione della materia e sono presentati in aula.

Contents

1 Modelli di programmazione lineare

I *modelli di programmazione matematica* sono modelli che descrivono le caratteristiche della soluzione ottima di un problema di ottimizzazione attraverso relazioni matematiche. Un modello di programmazione matematica è composto dai seguenti elementi:

- **Insiemi**: raggruppano gli elementi del sistema;
- **Parametri**: sono i dati del problema e rappresentano delle quantità fissate che dipendono dai diversi elementi del sistema;
- **Variabili decisionali o di controllo**: sono le grandezze del sistema di cui non conosciamo il valore (assimilabili a delle incognite) e sulle quali possiamo agire per determinare diverse soluzioni alternative del problema;
- **Vincoli**: sono delle relazioni matematiche che descrivono le condizioni di ammissibilità delle soluzioni. Servono quindi per discriminare le combinazioni di valori delle variabili decisionali che rappresentano soluzioni accettabili del problema, da quelle che non lo sono;
- **Funzione obiettivo**: è la quantità da massimizzare o minimizzare, espressa come funzione delle variabili decisionali.

Un modello di programmazione matematica *dichiara* le caratteristiche della soluzione cercata (*che cosa*), piuttosto che definire la strategia per la ricerca della soluzione stessa (*come*). Un modello di programmazione matematica potrebbe essere paragonato ad un linguaggio dichiarativo, che indica cosa si vuole ottenere, piuttosto che a un linguaggio procedurale, che indica i passi per ottenere il risultato cercato.

La *risoluzione* di un problema di ottimizzazione formulato con un modello di programmazione matematica consiste nella determinazione dei valori delle variabili che soddisfano tutti i vincoli e massimizzano o minimizzano il valore della funzione obiettivo. Come nei linguaggi dichiarativi, una volta messo a punto il modello matematico, la ricerca della soluzione ottima può essere effettuata da appositi *motori di ottimizzazione*, pertanto un modello di programmazione matematica non ha solo valenza descrittiva, ma anche operativa.

I *modelli di programmazione lineare* sono una particolare classe di modelli di programmazione matematica in cui:

- la funzione obiettivo è un'espressione lineare delle variabili decisionali;
- i vincoli sono determinati da un sistema di equazioni e/o disequazioni lineari.

Attenzione: In questo corso si richiedono MODELLI LINEARI: le variabili, di qualsiasi natura esse siano, possono essere solamente moltiplicate per una costante e sommate fra loro.

La formulazione generale di un modello di Programmazione Lineare è la seguente:

$$
\begin{array}{lccccccccccccl}
\min\ (\max)\ z\ = & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & ... & + & c_jx_j & + & ... & + & c_nx_n & & (+cost.) \\
\textit{soggetto a (s.t.)} & & & & & & & & & & & & & \\
 & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ... & + & a_{1j}x_j & + & ... & + & a_{1n}x_n & \geq\ (=,\ \leq) & b_1 \\
 & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & ... & + & a_{2j}x_j & + & ... & + & a_{2n}x_n & \geq\ (=,\ \leq) & b_2 \\
 & ... & & & & & & & & & & & & \\
 & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & ... & + & a_{mj}x_j & + & ... & + & a_{mn}x_n & \geq\ (=,\ \leq) & b_m \\
 & & & & & & & x_j\ \in\ \mathbb{R}_+\ (x_j\ \in\ \mathbb{Z}_+)\ \ \forall\ j = 1, ..., n & & & & & &
\end{array}
$$

dove:

- z è la funzione obiettivo da minimizzare (*min*) o massimizare (*max*);
- x_j $\forall\ j = 1, ..., n$, sono le variabili decisionali (incognite) che possono essere reali (eventualmente non negative), intere (eventualmente non negative) o binarie ($x_j \in \{0, 1\}$);
- c_j $\forall\ j = 1, ..., n$, sono i coefficienti di costo (*min*) o profitto (*max*) e sono costanti note del problema (parametri);
- a_{ij} $\forall\ i = 1, ..., m$ e $\forall\ j = 1, ..., n$, sono i coefficienti tecnologici (parametri);
- b_i $\forall\ i = 1, ..., m$, sono i termini noti (parametri).

In base alla natura o dominio delle variabili decisionali, si parla di

- *modelli di Programmazione Lineare* (in senso stretto, PL) se tutte le variabili possono assumere valori reali;
- *modelli di Programmazione Lineare Intera* (PLI) se tutte le variabili possono assumere valori interi;
- *modelli di Programmazione Lineare Intera Mista* (PLIM) se alcune variabili possono assumere valori reali e altre valori interi.

L'importanza dei modelli di programmazione *lineare* risiede nella loro notevole valenza operativa (a scapito a volte della potenza descrittiva), grazie alla disponibilità di motori di ottimizzazione particolarmente efficienti.

Per il momento, ci concentriamo sulla formulazione di modelli di programmazione lineare, e non sulla loro risoluzione. Diciamo solo che i modelli così formulati possono essere facilmente implementati su calcolatore (ad esempio con fogli di calcolo o con linguaggi di modellazione algebrica) per ottenere la soluzione ottima.

2 Costruzione di un modello

Vediamo su un semplice esempio quali sono i passi da seguire per formulare un problema come un modello di programmazione lineare.

Testo del problema

Un coltivatore ha a disposizione 12 ettari di terreno da coltivare a lattuga o a patate. Le risorse a sua disposizione, oltre al terreno, sono: 70 kg di semi di lattuga, 18 t di tuberi, 160 metri cubi (mc) di fertilizzante. Supponendo che il mercato sia in grado di assorbire tutta la produzione e che i prezzi siano stabili, la resa stimata per la coltivazione di lattuga è di 3000 €/ettaro e quella delle patate è di 5000 €/ettaro. L'assorbimento delle risorse per ogni tipo di coltivazione è di 7 kg di semi e 10 mc di fertilizzante per ettaro di lattuga, e 3 t di tuberi e 20 mc di fertilizzante per le patate. Stabilire quanto terreno destinare a lattuga e quanto a patate in modo da massimizzare la resa economica e sfruttando al meglio le risorse disponibili.
Costruzione del modello

Passo 1. Per prima cosa dobbiamo individuare quali sono le decisioni da prendere per risolvere il problema, ossia dobbiamo definire le variabili decisionali (incognite).

In questo caso le decisioni da prendere riguardano la quantità di terreno da destinare a lattuga e la quantità di terreno da destinare a patate. Definiamo dunque le variabili:

x_L: quantità di terreno, in ettari, da coltivare a lattuga;

x_P: quantità di terreno, in ettari, da coltivare a patate.

Passo 2. Ora che abbiamo definito le variabili, dobbiamo determinare qual è l'obiettivo, ossia dobbiamo formulare la funzione obiettivo da ottimizzare.

Nell'esempio, l'obiettivo è massimizzare il profitto, sapendo che la resa stimata per la coltivazione di lattuga è di 3000 €/ettaro e quella delle patate è di 5000 €/ettaro. Servendoci delle variabili definite nel passo precedente, la funzione obiettivo può essere espressa nel seguente modo:

$$\max \quad z \;=\; 3000x_L + 5000x_P$$

Passo 3. Infine dobbiamo descrivere le condizioni di ammissibilità delle soluzioni, ovvero costruire un sistema di equazioni e/o disequazioni lineari che esprimono i vincoli che le variabili devono soddisfare per essere soluzioni ammissibili del problema.

In questo caso, sappiamo che:

– il coltivatore ha a disposizione 12 ettari di terreno da coltivare a lattuga e a patate. Quindi la somma degli ettari di terreno da destinare a lattuga (variabile

x_L) e degli ettari di terreno da destinare a patate (variabile x_P) non deve superare i 12 ettari di terreno a disposizione. Questo primo vincolo può essere espresso nel modo seguente:

$$x_L + x_P \leq 12 \text{ (ettari disponibili)}$$

- il coltivatore ha a disposizione 70 kg di semi di lattuga e sappiamo che per coltivare un ettaro di terreno a lattuga sono necessari 7 kg di semi. Quindi la quantità di semi necessaria per coltivare x_L ettari di terreno a lattuga non deve eccedere i 70 kg di semi a disposizione. Questo secondo vincolo può essere espresso nel modo seguente:

$$7x_L \leq 70 \text{ (semi disponibili)}$$

- il coltivatore ha a disposizione 18 t di tuberi e, per coltivare un ettaro di terreno a patate sono necessarie 3 t di tuberi. Quindi la quantità di tuberi necessaria per coltivare x_P ettari di terreno a patate non deve eccedere le 18 t di tuberi a disposizione. Questo terzo vincolo può essere espresso nel modo seguente:

$$3x_P \leq 18 \text{ (tuberi disponibili)}$$

- il coltivatore ha a disposizione 160 mc di fertilizzante e la coltivazione di un ettaro di terreno a lattuga richiede 10 mc di fertilizzante mentre la coltivazione di un ettaro di terreno a patate richiede 20 mc di fertilizzante. Quindi, la somma della quantità di fertilizzante necessaria per coltivare x_L ettari di terreno a lattuga e della quantità di fertilizzante necessaria per coltivare x_P ettari di terreno a patate, non deve superare le 160 mc di fertilizzante a disposizione. Questo quarto vincolo può essere espresso nel modo seguente:

$$10x_T + 20x_P \leq 160 \text{ (fertilizzante disponibile)}$$

Infine, dobbiamo specificare il dominio delle variabili scelte. In questo caso le variabili decisionali sono x_L e x_P che rappresentano la quantità di terreno, in ettari, da destinare a lattuga e patate rispettivamente. Trattandosi di ettari di terreno e non essendo presente nel testo del problema alcuna richiesta di interezza, tali variabili possono assumere valori reali. Tuttavia, poiché non è possibile coltivare una quantità negativa di ettari di terreno, x_L e x_P devono essere non negative:

$$x_T \geq 0,\ x_P \geq 0 \text{ (dominio)}$$

Riassumendo, il problema può essere formalizzato con il seguente modello di programmazione lineare:

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max & 3000x_L & + & 5000x_P & & \\
s.t. & & & & & \\
 & x_L & + & x_P & \leq & 12 \\
 & 7x_L & & & \leq & 70 \\
 & & & 3x_P & \leq & 18 \\
 & 10x_L & + & 20x_P & \leq & 160 \\
 & & & & & \\
 & x_L & , & x_P & \geq & 0
\end{array}
$$

3 Esempi di modellazione

Proponiamo alcuni esempi di problemi di ottimizzazione formulati tramite modelli di programmazione lineare.

1. **Un gioco di assemblaggio**

   Per l'assemblaggio di telecomandi, si hanno a disposizione 10 moduli display, 18 moduli di logica di controllo, 12 trasmettitori, 21 tastierini, 9 moduli di navigazione e 10 led. I telecomandi sono di due tipi. Il tipo A richiede un display, un modulo di navigazione, 2 tastierini, 2 moduli di logica, un trasmettitore e un led. Il tipo B richiede 2 display, 3 tastierini, 2 moduli di logica e 3 trasmettitori. Considerando che il tipo A permette un guadagno netto di 3 euro e il tipo B di 8 euro, determinare la produzione che massimizza il guadagno.

Formulazione

Variabili decisionali

x_A: quantità di telecomandi di tipo A da produrre;

x_B: quantità di telecomandi di tipo B da produrre.

Modello PLI

$$
\begin{array}{lrcrcrl}
\max & 3x_A & + & 8x_B & & & \text{(guadagno complessivo)} \\
s.t. & & & & & & \\
 & x_A & + & 2x_B & \leq & 10 & \text{(display)} \\
 & x_A & & & \leq & 9 & \text{(navigazione)} \\
 & 2x_A & + & 3x_B & \leq & 21 & \text{(tastierini)} \\
 & 2x_A & + & 2x_B & \leq & 18 & \text{(logica)} \\
 & x_A & + & 3x_B & \leq & 12 & \text{(trasmissione)} \\
 & x_A & & & \leq & 10 & \text{(led)} \\
 & & & & & & \\
 & x_A & , & x_B & \in & \mathbb{Z}_+ & \text{(dominio)}
\end{array}
$$

Esercizio. Risolvere il problema graficamente.

2. **Dieta economica**

Un dietologo deve preparare una dieta che garantisca un apporto giornaliero di proteine, ferro e calcio di almeno 20 mg, 30 mg e 10 mg, rispettivamente. Il dietologo è orientato su cibi a base di verdura (5 mg/kg di proteine, 6 mg/kg di ferro e 5 mg/kg di calcio, al costo di 4 €/kg), carne (15 mg/kg di proteine, 10 mg/kg di ferro e 3 mg/kg di calcio, al costo di 10 €/kg) e frutta (4 mg/kg di proteine, 5 mg/kg di ferro e 12 mg/kg di calcio, al costo di 7 €/kg). Determinare la dieta di costo minimo.

Formulazione

Variabili decisionali

x_1: quantità in kg di cibi a base di verdura da includere nella dieta;

x_2: quantità in kg di cibi a base di carne da includere nella dieta;

x_3: quantità in kg di cibi a base di frutta da includere nella dieta.

Modello PL

$$
\begin{array}{lrcrcrcrl}
\min & 4x_1 & + & 10x_2 & + & 7x_3 & & & \text{(costo giornaliero della dieta)} \\
s.t. & & & & & & & & \\
 & 5x_1 & + & 15x_2 & + & 4x_3 & \geq & 20 & \text{(proteine)} \\
 & 6x_1 & + & 10x_2 & + & 5x_3 & \geq & 30 & \text{(ferro)} \\
 & 5x_1 & + & 3x_2 & + & 12x_3 & \geq & 10 & \text{(calcio)} \\
 & & & & & & & & \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \in & \mathbb{R}_+ & \text{(dominio)}
\end{array}
$$

3. **Indagine di mercato**

Un'azienda pubblicitaria deve svolgere un'indagine di mercato per lanciare un nuovo prodotto. Si deve contattare telefonicamente un campione significativo di persone: almeno 150 donne sposate, almeno 110 donne non sposate, almeno 120 uomini sposati e almeno 100 uomini non sposati. Le telefonate possono essere effettuate al mattino (al costo operativo di 1.1 €) o alla sera (al costo di 1.6 €). Le percentuali di persone mediamente raggiunte sono riportate nella seguente tabella

	Mattino	Sera
Donne sposate	30%	30%
Donne non sposate	10%	20%
Uomini sposati	10%	30%
Uomini non sposati	10%	15%
Nessuno	40%	5%

Si noti come le telefonate serali sono più costose, ma permettono di raggiungere un maggior numero di persone: solo il 5% va a vuoto. Si vuole minimizzare il costo complessivo delle telefonate da effettuare (mattina/sera) in modo da raggiungere un campione significativo di persone.

Formulazione

Variabili decisionali

x_1: numero di telefonate da fare al mattino;

x_2: numero di telefonate da fare alla sera.

Modello PLI

$$
\begin{array}{llcrcrl}
\min & 1.1x_1 & + & 1.6x_2 & & & \text{(costo totale delle telefonate)} \\
s.t. & & & & & & \\
 & 0.3x_1 & + & 0.3x_2 & \geq & 150 & \text{(donne sposate)} \\
 & 0.1x_1 & + & 0.2x_2 & \geq & 110 & \text{(donne non sposate)} \\
 & 0.1x_1 & + & 0.3x_2 & \geq & 120 & \text{(uomini sposati)} \\
 & 0.1x_1 & + & 0.15x_2 & \geq & 100 & \text{(uomini non sposati)} \\
 & & & & & & \\
 & x_1 & , & x_2 & \in & \mathbb{Z}_+ & \text{(dominio)}
\end{array}
$$

4. **Trasporto di frigoriferi**

Una ditta di produzione di elettrodomestici produce dei frigoriferi in tre stabilimenti e li smista in quattro magazzini intermedi di vendita. La produzione settimanale nei tre stabilimenti A, B e C è rispettivamente di 50, 70 e 20 unità. La quantità richiesta dai 4 magazzini è rispettivamente di 10, 60, 30 e 40 unità. I costi per il trasporto di un frigorifero tra gli stabilimenti e i magazzini 1, 2, 3 e 4 sono i seguenti:

- dallo stabilimento A: 6, 8, 3, 4 euro;
- dallo stabilimento B: 2, 3, 1, 3 euro;
- dallo stabilimento C: 2, 4, 6, 5 euro.

La ditta vuole determinare il piano di trasporti di costo minimo.

Formulazione

Insiemi

$I = \{A, B, C\}$ stabilimenti;

$J = \{1, 2, 3, 4\}$ magazzini.

Variabili decisionali

x_{ij}: numero di frigoriferi prodotti nello stabilimento i e smistati nel magazzino j, $\forall\ i \in I$ e $\forall\ j \in J$.

Modello PLI

$$\begin{array}{ll} \min & 6x_{A1} + 8x_{A2} + 3x_{A3} + 4x_{A4} + \\ & 2x_{B1} + 3x_{B2} + 1x_{B3} + 3x_{B4} + \\ & 2x_{C1} + 4x_{C2} + 6x_{C3} + 5x_{C4} \end{array}$$

$s.t.$

$$\begin{array}{ll} x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4} \leq 50 & \text{(capacità produttiva stabilimento A)} \\ x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4} \leq 70 & \text{(capacità produttiva stabilimento B)} \\ x_{C1} + x_{C2} + x_{C3} + x_{C4} \leq 20 & \text{(capacità produttiva stabilimento C)} \\ & \\ x_{A1} + x_{B1} + x_{C1} \geq 10 & \text{(domanda magazzino 1)} \\ x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} \geq 60 & \text{(domanda magazzino 2)} \\ x_{A3} + x_{B3} + x_{C3} \geq 30 & \text{(domanda magazzino 3)} \\ x_{A4} + x_{B4} + x_{C4} \geq 40 & \text{(domanda magazzino 4)} \\ & \\ x_{ij} \in \mathbb{Z}_+, \forall\ i \in I,\ \forall\ j \in J & \text{(dominio)} \end{array}$$

5. **Turni in ospedale**

Si vogliono organizzare i turni degli infermieri in ospedale. Ogni infermiere lavora 5 giorni consecutivi, indipendentemente da come sono collocati all'interno della settimana, e poi ha diritto a due giorni consecutivi di riposo. Le esigenze di servizio per i vari giorni della settimana richiedono la presenza di 17 infermieri il lunedì, 13 il martedì, 15 il mercoledì, 19 il giovedì, 14 il venerdì, 16 il sabato e 11 la domenica. Organizzare il servizio in modo da minimizzare il numero totale di infermieri da impegnare.

Formulazione

Variabili decisionali

lun: numero di infermieri il cui turno inizia il lunedì;

mar: numero di infermieri il cui turno inizia il martedì;

...

dom: numero di infermieri il cui turno inizia la domenica.

Modello PLI

$$
\begin{array}{llllllllllllllll}
\min & lun & + & mar & + & mer & + & gio & + & ven & + & sab & + & dom & & \\
s.t. & & & & & & & & & & & & & & & \\
& lun & & & & & + & gio & + & ven & + & sab & + & dom & \geq & 17 \quad \text{(presenze lunedì)} \\
& lun & + & mar & & & & & + & ven & + & sab & + & dom & \geq & 13 \quad \text{(presenze martedì)} \\
& lun & + & mar & + & mer & & & & & + & sab & + & dom & \geq & 15 \quad \text{(presenze mercoledì)} \\
& lun & + & mar & + & mer & + & gio & & & & & + & dom & \geq & 19 \quad \text{(presenze giovedì)} \\
& lun & + & mar & + & mer & + & gio & + & ven & & & & & \geq & 14 \quad \text{(presenze venerdì)} \\
& & & mar & + & mer & + & gio & + & ven & + & sab & & & \geq & 16 \quad \text{(presenze sabato)} \\
& & & & & mer & + & gio & + & ven & + & sab & + & dom & \geq & 11 \quad \text{(presenze domenica)} \\
& & & & & & & & & & & & & & & \\
& lun & , & mar & , & mer & , & gio & , & ven & , & sab & , & dom & \in & \mathbb{Z}_+ \quad \text{(dominio)}
\end{array}
$$

6. **Localizzazione di servizi**

Una città è divisa in sei quartieri, dove si vogliono attivare dei centri unificati di prenotazione (CUP) per servizi sanitari. In ciascun quartiere è stata individuata una possibile località di apertura. Le distanze medie in minuti da ciascun quartiere a ciascuna delle possibili località è indicata in tabella.

	Loc. 1	Loc. 2	Loc. 3	Loc. 4	Loc. 5	Loc. 6
Quartiere 1	5	10	20	30	30	20
Quartiere 2	10	5	25	35	20	10
Quartiere 3	20	25	5	15	30	20
Quartiere 4	30	35	15	5	15	25
Quartiere 5	30	20	30	15	5	14
Quartiere 6	20	10	20	25	14	5

Si desidera che nessun utente abbia un tempo medio di spostamento superiore a 15 minuti per arrivare al CUP più vicino e si vuole minimizzare il numero di CUP attivati.

Formulazione

Insiemi

$I \ = \{1, 2, ..., 6\}$ località.

Variabili decisionali

$x_i \ = 1$ se viene aperto il CUP nella località i, 0 altrimenti, $\forall\ i \in I$.

Modello PLI

$$
\begin{array}{lcccccccccccccl}
\min & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & & & \\
s.t. & & & & & & & & & & & & & & \\
 & x_1 & + & x_2 & & & & & & & & & \geq & 1 & \text{(esigenze del quartiere 1)} \\
 & x_1 & + & x_2 & & & & & & & + & x_6 & \geq & 1 & \text{(esigenze del quartiere 2)} \\
 & & & & & x_3 & + & x_4 & & & & & \geq & 1 & \text{(esigenze del quartiere 3)} \\
 & & & & & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & & & \geq & 1 & \text{(esigenze del quartiere 4)} \\
 & & & & & & & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & \geq & 1 & \text{(esigenze del quartiere 5)} \\
 & & & x_2 & & & & & + & x_5 & + & x_6 & \geq & 1 & \text{(esigenze del quartiere 6)} \\
 & & & & & & & & & & & & & & \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_6 & \in & \{0,1\} & \text{(dominio)}
\end{array}
$$

4 Alcuni schemi base di modellazione

I modelli precedenti, in alcuni casi, presentano una struttura molto simile. In effetti, a partire dagli stessi esempi, si possono definire, in forma generale, alcuni schemi di modellazione, che possono essere utili come base per la costruzione di modelli più complessi.

Modelli di copertura di costo minimo

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{i \in I} C_i x_i & \\
s.t. & & \\
 & \sum_{i \in I} A_{ij} x_i \geq D_j & \forall\, j \in J \\
 & x_i \in \mathbb{R}_+ \ [\ \mathbb{Z}_+ \mid \{0,1\}\ ] & \forall\, i \in I
\end{array}
$$

dove

- I insieme delle risorse da acquistare;
- J insieme delle domande da coprire;
- C_i costo (unitario) per l'utilizzo della risorsa $i \in I$;
- D_j ammontare della domanda di $j \in J$;
- A_{ij} capacità (unitaria) della risorsa i di soddisfare la domanda j.

Considerando gli esempi sopra proposti, rientrano in questo schema i problemi della dieta economica, dell'indagine di mercato, dei turni in ospedale, della localizzazione di servizi.

Modelli di mix ottimo di produzione

$$
\begin{array}{lll}
\max & \sum_{i \in I} P_i x_i & \\
s.t. & & \\
& \sum_{i \in I} A_{ij} x_i \leq Q_j & \forall\, j \in J \\
& x_i \in \mathbb{R}_+ \; [\; \mathbb{Z}_+ \mid \{0,1\}\;] & \forall\, i \in I
\end{array}
$$

dove

- I insieme dei beni che possono essere prodotti;
- J insieme delle risorse disponibili;
- P_i profitto (unitario) per il bene $i \in I$;
- Q_j quantità disponibile della risorsa $j \in J$;
- A_{ij} quantità di risorsa j necessaria per la produzione di un'unità del bene i.

Considerando gli esempi sopra proposti, rientrano in questo schema i problemi di assemblaggio di telefonini e del contadino.

Modelli di trasporto

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} C_{ij} x_{ij} & \\
s.t. & & \\
& \sum_{j \in J} x_{ij} \leq O_i & \forall\, i \in I \\
& \sum_{i \in I} x_{ij} \geq D_j & \forall\, j \in J \\
& x_{ij} \in \mathbb{R}_+ \; [\; \mathbb{Z}_+ \mid \{0,1\}\;] & \forall\, i \in I, j \in J
\end{array}
$$

dove

- I insieme dei centri di offerta;
- J insieme dei centri di domanda;
- C_{ij} costo (unitario) per il trasporto da $i \in I$ a $j \in J$;
- O_i ammontare dell'offerta in $i \in I$;
- D_j ammontare della domanda in $j \in J$.

Considerando gli esempi sopra proposti, rientra in questo schema il problema del trasporto di frigoriferi.

> **Suggerimento.** Spesso (*ma non sempre!*) per modellare un problema reale, può essere utile individuare uno o più schemi generali che esprimono la situazione in esame e completare il modello con ulteriori vincoli e variabili.

Di seguito, presentiamo alcuni ulteriori esempi di modellazione.

7. **Produzione e forza lavoro**

Un'azienda produce i modelli I, II e III di un certo prodotto a partire dai materiali grezzi A e B, di cui sono disponibili 4000 e 6000 unità, rispettivamente. In particolare, ogni unità del modello I richiede 2 unità di A e 4 di B; un'unità del modello II richiede 3 unità di A e 2 di B; ogni unità del modello III richiede 5 unità di A e 7 di B. Il modello I richiede una forza lavoro doppia rispetto al modello II e tripla rispetto al modello III. La forza lavoro disponibile è in grado di produrre al massimo l'equivalente di 700 unità del modello I. Il settore marketing dell'azienda ha reso noto che la domanda minima per ciascun modello è rispettivamente di 200, 200 e 150 unità, al prezzo di 30, 20 e 50 euro. Si vuole massimizzare il profitto totale.

Formulazione

Variabili decisionali

x_i: numero di unità del modello i da produrre, $\forall\ i \in \{I, II, III\}$.

Modello PLI

$$\max \quad 30x_I + 20x_{II} + 50x_{III}$$

$$
\begin{array}{lll}
s.t. & & \\
& x_I \geq 200 & \text{(vincoli sulla domanda)} \\
& x_{II} \geq 200 & \\
& x_{III} \geq 150 & \\
& & \\
& 2x_I + 3x_{II} + 5x_{III} \leq 4000 & \text{(vincoli sui materiali)} \\
& 4x_I + 2x_{II} + 7x_{III} \leq 6000 & \\
& & \\
& x_I + \frac{1}{2}x_{II} + \frac{1}{3}x_{III} \leq 700 & \text{(vincoli sulla forza lavoro)} \\
& & \\
& x_i \in \mathbb{Z}_+, \forall\ i \in \{I, II, III\} & \text{(dominio)}
\end{array}
$$

Si noti come, in questo caso, il modello può essere individuato a partire dallo schema base del mix ottimo di produzione, al quale si aggiungono i vincoli specifici della situazione in esame.

8. **Produzione e capacità eccedente**

Una società ha tre impianti con capacità produttiva eccedente. Tutti e tre gli impianti sono in grado di produrre schiume di lattice e si è deciso di sfruttare in questo modo la capacità produttiva in eccesso. Le schiume possono essere realizzate in tre diverse densità (bassa, media e alta) che forniscono un profitto netto unitario di 9, 10 e 12 euro. Gli stabilimenti 1, 2 e 3 hanno manodopera e capacità produttiva in eccesso per produrre 500, 600 e 300 quintali al giorno, indipendentemente dalla densità delle schiume. Comunque, la disponibilità dello spazio destinato all'immagazzinamento durante il processo produttivo limita la produzione. Gli stabilimenti 1, 2 e 3 hanno, rispettivamente, 900, 800 e 350 mq di magazzino disponibile per questo prodotto. Ogni quintale di schiuma prodotta al giorno in densità bassa, media o alta richiede 2, 1.5 e 1 mq, rispettivamente. Le previsioni di vendita indicano che si possono vendere al massimo 600, 800 e 500 quintali delle schiume di densità bassa, media e alta, rispettivamente. I sindacati hanno chiesto di mantenere un carico di lavoro uniforme e la direzione ha concordato che sarà utilizzata la medesima percentuale della capacità produttiva in eccesso. La direzione ci chiede di determinare come suddividere la produzione per massimizzare il profitto totale.

Formulazione

Variabili decisionali

x_{ij}: quantità di schiuma di densità j prodotta nello stabilimento i, $\forall\, i \in \{1, 2, 3\}$, $\forall\, j \in \{b, m, a\}$.

Modello PLI

$$\begin{array}{ll} \max & 9(x_{1b}+x_{2b}+x_{3b})+ \\ & 10(x_{1m}+x_{2m}+x_{3m})+ \\ & 12(x_{1a}+x_{2a}+x_{3a}) \end{array}$$

$s.t.$

$$\begin{array}{ll}
x_{1b}+x_{1m}+x_{1a} \leq 500 & \text{(disponibilità manodopera)} \\
x_{2b}+x_{2m}+x_{2a} \leq 600 & \\
x_{3b}+x_{3m}+x_{3a} \leq 300 & \\
 & \\
2x_{1b}+1.5x_{1m}+1x_{1a} \leq 900 & \text{(disponibilità magazzini)} \\
2x_{2b}+1.5x_{2m}+1x_{2a} \leq 800 & \\
2x_{3b}+1.5x_{3m}+1x_{3a} \leq 350 & \\
 & \\
x_{1b}+x_{2b}+x_{3b} \leq 600 & \text{(previsioni di vendita)} \\
x_{1m}+x_{2m}+x_{3m} \leq 800 & \\
x_{1a}+x_{2a}+x_{3a} \leq 500 & \\
 & \\
\frac{1}{500}(x_{1b}+x_{1m}+x_{1a}) = \frac{1}{600}(x_{2b}+x_{2m}+x_{2a}) & \text{(uniformità del carico di lavoro)} \\
\frac{1}{500}(x_{1b}+x_{1m}+x_{1a}) = \frac{1}{300}(x_{3b}+x_{3m}+x_{3a}) & \\
 & \\
x_{ij} \in \mathbb{Z}_+, \forall\, i \in \{1,2,3\}, \forall\, j \in \{b,m,a\} & \text{(dominio)}
\end{array}$$

Anche in questo caso si poteva riconoscere nel problema in esame lo schema base del mix ottimo di produzione, ripetuto per i tre impianti (da cui le variabili a due indici).

9. **Piani di investimento**

Un finanziere ha due piani di investimento A e B disponibili all'inizio di ciascuno dei prossimi cinque anni. Ogni euro investito in A all'inizio di ogni anno garantisce, due anni più tardi, un profitto di 0,4 euro (e può essere immediatamente reinvesito). Ogni euro investito in B all'inizio di ogni anno dà, tre anni dopo, un profitto di 0,7 euro. In più, da un certo momento in avanti, sarà possibile sfruttare anche i piani di investimento C e D. Ogni euro investito in C all'inizio del secondo anno raddoppierà dopo 4 anni. Ogni euro investito in D all'inizio del quinto anno darà un profitto di 0,3 euro l'anno successivo. Anche per i piani B, C e D vale la possibilità di reinvestimento, come per il piano A. Il finanziere ha a disposizione 10000 euro e vuole sapere quale piano di investimento massimizza il capitale posseduto all'inizio del sesto anno.

Formulazione

Variabili decisionali

x_{ij}: capitale, in euro, investito nel piano i all'inizio dell'anno j, $\forall\, i \in \{A, B, C, D\}$, $\forall\, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Non sono considerate le variabili x_{A5}, x_{B4}, x_{B5}, x_{C1}, x_{C3}, x_{C4}, x_{C5}, x_{D1}, x_{D2}, x_{D3} e x_{D4}, corrispondenti a piani di investimento non disponibili o a investimenti che non rientrerebbero entro l'inizio del sesto anno.

Modello PL

$$
\begin{aligned}
\max\quad & 0.4(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}) + 0.7(x_{B1} + x_{B2} + x_{B3}) + x_{C2} + \\
& 0.3x_{D5} + 10000
\end{aligned}
$$

$s.t.$

$$
\begin{aligned}
& x_{A1} + x_{B1} \leq 10000 && \text{(anno 1)}\\
& x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} \leq 10000 - x_{A1} - x_{B1} && \text{(anno 2)}\\
& x_{A3} + x_{B3} \leq 10000 + 0.4x_{A1} - x_{B1} - x_{A2} - x_{B2} - x_{C2} && \text{(anno 3)}\\
& x_{A4} \leq 10000 + 0.4x_{A1} + 0.7x_{B1} + 0.4x_{A2} - x_{B2} - x_{C2} - x_{A3} - x_{B3} && \text{(anno 4)}\\
& x_{D5} \leq 10000 + 0.4x_{A1} + 0.7x_{B1} + 0.4x_{A2} + 0.7x_{B2} + 0.4x_{A3} + \\
& \qquad -x_{C2} - x_{B3} - x_{A4} && \text{(anno 5)}\\
& \\
& x_{ij} \in \mathbb{R}_+, \forall\, i \in \{A, B, C, D\}, \forall\, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\} && \text{(dominio)}
\end{aligned}
$$

In questo caso, la situazione descritta dal testo non è riconducibile direttamente ad uno degli schemi sopra proposti. Questo mostra come non sempre sia possibile ricondurre l'attività di modellazione a degli schemi precostituiti, sia per la natura del problema, sia per la conoscenza degli schemi stessi. In effetti, il problema potrebbe essere ricondotto allo schema *multi-periodale*, in cui uno stesso tipo di vincoli (nel nostro caso "la somma investita non deve superare la somma disponibile") viene ripetuto in diversi periodi (nel nostro caso i mesi). Questo schema, come altri possibili, non ci era noto.

5 Funzioni obiettivo del tipo min-max, max-min e min-abs

Nella formulazione di problemi sotto forma di modelli di programmazione lineare, potremmo incontrare problemi in cui, come obiettivo, si vuole minimizzare il massimo tra un insieme di valori (min-max). Sia $\{e_1, ..., e_n\}$ l'insieme di valori dei quali si vuole minimizzare il massimo, allora la funzione obiettivo sarà della forma

$$\min \max\{e_1, ..., e_n\}$$

che non è un'espressione lineare. Questo tipo di funzioni obiettivo può essere linearizzata introducendo una variabile y, maggiore o uguale a ciascun elemento dell'insieme $\{e_1, ..., e_n\}$. In questo modo y sarà maggiore o uguale al massimo dell'insieme $\{e_1, ..., e_n\}$ e minimizzando y in funzione obiettivo, si spingerà tale variabile ad assumere esattamente il valore del massimo e lo si minimizza.

Riassumendo, una funzione obiettivo della forma $\min \max\{e_1, ..., e_n\}$, può essere formulata come espressione lineare nel seguente modo:

$$\begin{gathered} \min\ y \\ y \geq e_1 \\ y \geq e_2 \\ ... \\ y \geq e_n \end{gathered}$$

Analogamente, una funzione obiettivo della forma $\max \min\{e_1, ..., e_n\}$, può linearizzata nel seguente modo:

$$\begin{gathered} \max\ y \\ y \leq e_1 \\ y \leq e_2 \\ ... \\ y \leq e_n \end{gathered}$$

Un altra classe di funzioni obiettivo che merita attenzione è quella in cui si vuole minimizzare il valore assoluto di una certa quantità (min-abs). La funzione obiettivo sarà della forma $\min\ |e|$, ma il valore assoluto non è un'espressione lineare. Sappiamo che $\min\ |e| \equiv \min\ \max\{e, -e\}$, quindi, riconducendoci al caso min-max, una funzione obiettivo della forma $\min\ |e|$, può essere formulata come espressione lineare nel seguente modo:

$$\min \; y$$
$$y \geq e$$
$$y \geq -e$$

Di seguito sono proposti alcuni esempi di modelli con funzioni obiettivo del tipo max-min e min-abs.

10. **Produzione su più linee**

Un mangime è ottenuto miscelando tre componenti che possono essere lavorate su quattro linee di produzione differenti. Ogni linea è dotata di una limitata capacità di ore di lavorazione e una diversa produttività (unità di componente per ogni ora), come indicato nella seguente tabella:

Linea	Capacità	Produttività		
		componente 1	componente 2	componente 3
1	100	10	15	5
2	150	15	10	5
3	80	20	5	10
4	200	10	15	20

Si vuole determinare il numero di ore di lavorazione di ciascuna componente su ciascuna linea di produzione in modo da massimizzare la quantità di mangime complessivamente prodotta.

Formulazione

Variabili decisionali

Nota - La quantità di mangime completata è condizionata dalla componente disponibile nella minore quantità. Se indichiamo con p_j la quantità di componente j prodotta complessivamente dalle 4 linee, la quantità di mangime ottenibile per miscelazione è il minimo tra p_1, p_2 e p_3. Di conseguenza, la funzione obiettivo prende la forma

$$\max \min\{p_1, p_2, p_3\}$$

che **non** è lineare, ma è facilmente linearizzabile con l'aggiunta di una variabile y. Le variabili sono quindi le seguenti:

x_{ij}: numero di ore di lavorazione della componente j sulla linea di lavorazione i, $\forall\, i \in \{1,2,3,4\}$, $\forall\, j \in \{1,2,3\}$;

y: variabile di comodo per la linearizzazione della funzione obiettivo di tipo max-min.

Modello PL

$$
\begin{array}{lll}
\max & y & \\
s.t. & & \\
& y \leq 10x_{11} + 15x_{21} + 20x_{31} + 10x_{41} & \text{(componente 1 disponibile)} \\
& y \leq 15x_{12} + 10x_{22} + 5x_{32} + 15x_{42} & \text{(componente 2 disponibile)} \\
& y \leq 5x_{13} + 5x_{23} + 10x_{33} + 20x_{43} & \text{(componente 3 disponibile)} \\
& & \\
& x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 100 & \text{(capacità oraria delle linee)} \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 150 & \\
& x_{31} + x_{42} + x_{53} \leq 80 & \\
& x_{31} + x_{42} + x_{53} \leq 200 & \\
& & \\
& x_{ij} \in \mathbb{R}_+, \forall\, i \in \{1,2,3,4\}, \forall\, j \in \{1,2,3\} & \text{(dominio)} \\
& y \in \mathbb{R} &
\end{array}
$$

11. **Schedulazione just-in-time**

Un server computazionale deve pianificare l'esecuzione di cinque batch su di una macchina mono-processore. I batch durano rispettivamente 5, 7, 4, 7 e 10 minuti. La sequenza di esecuzione 1-2-3-4-5 è data e non ci può essere sovrapposizione temporale tra i batch. Il primo batch ha come ora di consegna desiderata le 10.32, il secondo le 10.38, il terzo le 10.42, il quarto le 10.52 e il quinto le 10.57. La consegna dei batch elaborati deve essere il più puntuale possibile: si paga una penale di 750 euro per ogni minuto di anticipo o ritardo nella consegna. Organizzare i tempi di esecuzione (al minuto) per minimizzare la penale totale.

Formulazione

Variabili decisionali

Nota - La decisione riguarda l'ora in cui far finire ciascun batch o, equivalentemente, l'ora di inizio. Essendo l'ora non facilmente trattabile con gli operatori di somma e prodotto, trasformiamo tali variabili in minuti, facendo stabilire al modello il minuto dopo le 10:00 nel quale un batch deve essere preso in carico dalla macchina. Le variabili sono quindi le seguenti:

i_j: minuto dopo le 10:00 nel quale la macchina inizia il batch j, $\forall\, j \in \{1,2,3,4,5\}$;

y_j: minuti di anticipo/ritardo del job j, $\forall\, j \in \{1,2,3,4,5\}$.

Notare inoltre che, se i_j è il minuto di inizio del job j, p_j la sua durata e d_j il minuto di consegna desiderato, allora la penalità associata al job j è $y_j = |i_j + p_j - d_j|$ (la funzione obiettivo è del tipo "min-abs"). Ovviamente, anche le ore di consegna desiderata devo essere espresse come "minuti dopo le 10.00" (ad es. le 10:32 sono espresse come 32).

Modello PLIM

$$\min \quad 750(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5)$$

$s.t.$

$$\begin{array}{lll}
y_1 \geq i_1 + 5 - 32 & y_1 \geq 32 - 5 - i_1 & \text{(linearizzazione dei valori assolulti)} \\
y_2 \geq i_2 + 7 - 38 & y_2 \geq 38 - 7 - i_2 & \\
y_3 \geq i_3 + 4 - 42 & y_3 \geq 42 - 4 - i_3 & \\
y_4 \geq i_4 + 7 - 52 & y_4 \geq 52 - 7 - i_4 & \\
y_5 \geq i_5 + 10 - 57 & y_5 \geq 57 - 10 - i_5 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
i_2 \geq i_1 + 5 & \text{(precedenza e non sovrapposizione tra i batch)} \\
i_3 \geq i_2 + 7 & \\
i_4 \geq i_3 + 4 & \\
i_5 \geq i_4 + 7 & \\
 & \\
i_j \in \mathbb{Z}_+, \forall\, j \in \{1,2,3,4,5\} & \text{(dominio)} \\
y_j \in \mathbb{R}, \forall\, j \in \{1,2,3,4,5\} &
\end{array}$$

6 Modelli con vincoli di tipo logico

Le variabili decisionali possono essere soggette a vincoli di tipo logico, più o meno espliciti. Ad esempio:

- vincoli di incompatibilità tra varie alternative: *se* localizziamo un'antenna in certo sito, *allora* non possiamo installarne altre in altri siti che provocherebbero interferenze;
- investimenti con costi fissi: *se* la dimensione dell'investimento è maggiore di 0, *allora* si paga un costo fisso;
- vincoli di copertura: *se* vogliamo servire un certo quartiere, *allora* dobbiamo aprire almeno un centro unificato di prenotazione in un certo insieme;
- possiamo avere clienti a Torino *solo se* abbiamo un rapresentante in Italia;
- bisogna attivare un numero massimo di alternative;
- etc. etc.

In questi casi introduciamo delle *variabili logiche* il cui dominio è limitato ai soli due valori 0 e 1 (variabili binarie) e il cui valore è in relazione con il valore di altre variabili. Ricordiamo che vogliamo (dobbiamo) rappresentare *tutti* i vincoli in modo lineare, anche i vincoli che coinvolgono variabili logiche: dal punto di vista modellistico, le variabili logiche sono variabili come tutte le altre e, pertanto, possono essere combinate solo in modo *lineare*. Quindi, NON possiamo applicare alle variabili logiche gli operatori logici, o operatori linguistici ("if $y_1 = 0$ then $y_2 = 1$"), o moltiplicarle tra loro o per altre variabili: sarebbero tutte forme NON lineari.

Nella seguente tabella sono riportati in modo sintetico alcuni esempi di vincoli di tipo logico a cui possono essere soggette le variabili del problema (forniremo degli esempi nelle pagine successive). Nella prima colonna sono illustrate alcune formulazioni NON lineari, semanticamente corrette ma non accettabili in un modello di programmazione lineare. Nella seconda colonna, sono riportate le espressioni lineari che possono essere utilizzate per formulare in termini matematici corretti (sia semanticamente che dal punto di vista della linearità) tutte le relazioni logiche che intercorrono fra le variabili.

Si noti che nella tabella, le variabili logiche sono denotate con y, mentre le variabili x sono variabili di altro tipo (reali o intere).

SBAGLIATO formulazioni *NON LINEARI*!!!			**Corretto**	
			Vincoli	Domini
if $x_1 > 0$ then $x_2 = 0$ and if $x_2 > 0$ then $x_1 = 0$	$nand(y_1, y_2)$	$x_1x_2 = 0$ $y_1y_2 = 0$	$x_1 \leq My_1$ $x_2 \leq My_2$ $y_1 + y_2 \leq 1$	$x_1, x_2 \geq 0$ $y_1, y_2 \in \{0, 1\}$ $(M \to \infty)$
if $x > 0$ then $y = 1$	$(x > 0) \to (y = 1)$	$x(1 - y) = 0$	$x \leq My$	$x \geq 0, y \in \{0, 1\}$
$y_1 = 1$ or $y_2 = 1$	$y_1 \vee y_2$	$(1 - y_1)(1 - y_2) = 0$	$y_1 + y_2 \geq 1$	$y_1, y_2 \in \{0, 1\}$
$y_1 = 1$ and $y_2 = 1$	$y_1 \wedge y_2$	$y_1y_2 = 1$	$y_1 + y_2 = 2$	$y_1, y_2 \in \{0, 1\}$
$y_1 = 1$ only if $y_2 = 1$	$y_1 \to y_2$	$y_1(1 - y_2) = 0$	$y_1 \leq y_2$	$y_1, y_2 \in \{0, 1\}$
$y_1 = 1$ only if $y_2 = 0$	$y_1 \to \overline{y_2}$	$y_1y_2 = 0$	$y_1 \leq (1 - y_2)$	$y_1, y_2 \in \{0, 1\}$
$y_1 = 1$ xor $y_2 = 1$	$y_1 \neq y_2$		$y_1 + y_2 = 1$	$y_1, y_2 \in \{0, 1\}$
etc. etc. etc. Queste formulazioni sono semanticamente corrette ma **NON ACCETTABILI** in un modello di programmazione lineare			etc. etc. etc. Queste formulazioni sono corrette a patto di - SPECIFICARE I DOMINI - ATTIVARE le var. logiche	

Di seguito sono proposti alcuni esempi di modelli con vincoli di tipo logico.

12. **Localizzazione con costi fissi**

Una catena della Grande Distribuzione Organizzata (GDO) dispone di un budget W per l'apertura di nuovi ipermercati in Italia. Gli studi preliminari hanno individuato un insieme I di possibili localizzazioni. Per l'apertura di un ipermercato nella localizzazione i bisogna sostenere un costo fisso F_i (acquisto del terreno, oneri amministrativi etc.) e un costo variabile pari a C_i ogni 100 mq di ipermercato. Una volta aperto e entrato a regime, ciascun ipermercato localizzato in i produrrà entrate per R_i ogni 100 mq. Determinare l'insieme di localizzazioni in cui aprire dei nuovi ipermercati e dimensionare gli ipermercati stessi in modo da massimizzare i ricavi complessivi.

Formulazione semanticamente corretta ma sbagliata: NON lineare!

Insiemi

I: possibili localizzazioni.

Variabili decisionali

x_i: dimensione in centinaia di mq dell'ipermercato localizzato in i, $\forall\, i \in I$;

y_i: **variabile logica (binaria)** legata all'apertura di un ipermercato nella localizzazione i, $\forall\, i \in I$, cioè:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se viene aperto un ipermercato nella localizzazione } i \ (x_i > 0) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Modello non lineare(!!!)

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{i \in I} R_i\, x_i\, y_i \\ s.t. & \\ & \sum_{i \in I} C_i\, x_i\, y_i + F_i y_i \le W \qquad \text{(budget)} \\ & \\ & x_i \in \mathbb{R}_+,\ y_i \in \{0,1\} \quad \forall\, i \in I \end{array}$$

I possibili valori per y_i sono 2: se $y_i = 1$, allora si paga il costo fisso ed è possibile guadagnare R_i in funzione obiettivo e pagare il costo variabile, a seconda del valore di x_i. Se $y_i = 0$ non si paga il costo fisso e non si guadagna R_i in funzione obiettivo né si paga il costo variabile per la localizzazione i (indipendentemente dal valore di x_i, che sarà da ignorare in questo caso). Pertanto il modello rappresenta bene l'insieme delle soluzioni ammissibili, **ma non è lineare**, per la presenza del termine $x_i\, y_i$ che moltiplica due variabili tra loro (y_i, anche se binaria, è una variabile!). Pertanto, **il modello è sbagliato nel contesto dei modelli PL**.

Linearizzazione con ‘vincoli di Big-M’

È possibile linearizzare il modello precedente eliminando y_i dai termini quadratici e introducendo un vincolo esplicito che forzi $x_i = 0$ qualora $y_i = 0$, rendendo effettiva nel modello la descrizione data per le variabili y_i. Il vincolo da inserire, per ogni i è il seguente

$$x_i \leq M\, y_i$$

dove M è una costante (un numero) arbitrariamente grande (da cui ‘big-M’). Si osservi innanzitutto che il vincolo è lineare, visto che la variabile y_i è moltiplicata per un numero (parametro M). Se $y_i = 0$ allora $x_i = 0$, quindi non si paga il costo fisso e non è possibile guadagnare R_i (o pagare costo variabile). Se $y_i = 1$, il vincolo diviene $x_i \leq M$, quindi ridondante (non ci sono di fatto limiti su x_i, a parte quelli definiti da altri vincoli).

Il vincolo di ‘big-M’ sopra esposto serve a sancire nel modello, in forma lineare, la relazione che esiste tra x_i e y_i, che finora era rimasta solo nelle intenzioni enunciate nella descrizione delle variabili y_i. Diremo quindi, convenzionalmente, che serve a rendere effettiva (‘attivare’) la variabile binaria y_i.

Complessivamente, si ottiene il seguente modello lineare.

Modello PLIM

$$\begin{array}{lll}
\max & \sum_{i\in I} R_i x_i & \\
s.t. & & \\
 & \sum_{i\in I} C_i x_i + F_i y_i \leq W & \text{(budget)} \\
 & x_i \leq M\, y_i \quad \forall\, i \in I & \text{(attivazione delle variabili binarie)} \\
 & x_i \in \mathbb{R}_+,\ y_i \in \{0,1\} \quad \forall\, i \in I &
\end{array}$$

13. **Localizzazione con costi fissi (con vincoli aggiuntivi)**

Una catena della Grande Distribuzione Organizzata (GDO) dispone di un budget W per l'apertura di nuovi ipermercati in Italia. Gli studi preliminari hanno individuato un insieme I di possibili localizzazioni. Per l'apertura di un ipermercato nella localizzazione i bisogna sostenere un costo fisso F_i (acquisto del terreno, oneri amministrativi etc.) e un costo variabile pari a C_i ogni 100 mq di ipermercato. Per ogni localizzazione, è prevista una dimensione massima U_i e, nel caso di apertura, una dimensione minima pari a L_i. Una volta aperto e entrato a regime, ciascun ipermercato localizzato in i produrrà entrate per R_i ogni 100 mq. Determinare l'insieme di localizzazioni in cui aprire dei nuovi ipermercati e dimensionare gli ipermercati stessi in modo da massimizzare i ricavi complessivi, tenendo conto che non possono essere aperti più di K ipermercati.

Formulazione

Insiemi

I: possibili localizzazioni.

Variabili decisionali

x_i: dimensione in centinaia di mq dell'ipermercato localizzato in i, $\forall\, i \in I$;

y_i: **variabile logica (binaria)** legata all'apertura di un ipermercato nella localizzazione i, $\forall\, i \in I$, cioè:
$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se viene aperto un ipermercato nella localizzazione } i \ (x_i > 0) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Modello PLIM

$$\begin{array}{lll}
\max & \sum_{i\in I} R_i x_i & \\
s.t. & & \\
& \sum_{i\in I} C_i x_i + F_i y_i \le W & \text{(budget)} \\
& x_i \le U_i y_i \quad \forall\, i \in I & \text{(dimensione massima /} \\
& & \text{attivazione delle variabili binarie)} \\
& x_i \ge L_i y_i \quad \forall\, i \in I & \text{(dimensione minima dell'ipermercato)} \\
& \sum_{i\in I} y_i \le K & \text{(numero massimo di ipermercati)} \\
& x_i \in \mathbb{R}_+,\ y_i \in \{0,1\} \quad \forall\, i \in I &
\end{array}$$

14. **Portfolio Optimization**

Un cliente affida ad un'agenzia finanziaria 100 000 euro da impiegare in fondi di investimento. I fondi attualmente offerti dal mercato sono di cinque tipi, come riassunto in tabella:

Nome	**Tipo**	**Moody's rating**	**Durata (anni)**	**Rendita alla maturazione**
A	privato	Aa	9	4,5%
B	pubblico	A	15	5,4%
C	stato	Aaa	4	5,1%
D	stato	Baa	3	4,4%
E	privato	Ba	2	6,1%

Si sa che i fondi pubblici e dello stato sono tassati del 30% alla fine del periodo. Il cliente chiede di riservare almeno il 40% del capitale a fondi pubblici e dello stato e vuole che la durata media dell'investimento non superi i 5 anni.

Le regole del mercato impongono che l'investimento in C precluda la possibilità di investire in D, e viceversa. Inoltre, è possibile investire in E solo se si sono investiti almeno 10 000 euro in A. Infine, trasformando il Moody's rating in una scala numerica (Aaa = 1, Aa = 2, A = 3, Baa = 4 e Ba = 5), il valore medio del rischio dell'investimento non deve superare 1,5. Si vuole massimizzare la rendita finale dell'investimento.

Formulazione

Insiemi

$I = \{A, B, C, D, E\}$ fondi di investimento.

Variabili decisionali

x_i: ammontare in euro investito nel fondo i, $\forall\, i \in I$;

$y_{C,D,E}$: variabile binaria legata all'investimento in C, D, E, cioè:

$$y_{C,D,E} = \begin{cases} 1 & \text{se si decide di investire qualcosa in } C, D, E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Parametri

M: costante sufficientemente alta: poniamo $M = 100\,000$.

Modello PLIM

$$
\begin{array}{ll}
\max & 4,5x_A + 0,7 \cdot 5,4x_B + 0,7 \cdot 5,1x_C + 0,7 \cdot 4,4x_D + 6,1x_E \\
s.t. & \\
& x_A + x_B + x_C + x_D + x_E \leq M \qquad \text{(budget)} \\
& 2x_A + 3x_B + x_C + 4x_D + 5x_E \leq 1,5(x_A + x_B + x_C + x_D + x_E) \qquad \text{(Moody's medio)} \\
& 9x_A + 15x_B + 4x_C + 3x_D + 2x_E \leq 5(x_A + x_B + x_C + x_D + x_E) \qquad \text{(durata media)} \\
& x_B + x_C + x_D \geq 0,4 \cdot M \qquad \text{(minimo investimento pubblico/stato)} \\
& \\
& x_C \leq My_C \qquad \text{(attivazione variabili binarie)} \\
& x_D \leq My_D \\
& y_C + y_D \leq 1 \qquad \text{(vincolo logico C nand D)} \\
& \\
& x_E \leq My_E \qquad \text{(attivazione variabile binaria } y_E\text{)} \\
& x_A \geq 10000\ y_E \qquad \text{(vincolo logico E} \Rightarrow x_A \geq 10000\text{)} \\
& \\
& x_i \in \mathbb{R}_+,\ y_i \in \{0,1\} \qquad \forall\, i \in I
\end{array}
$$

Commenti sulle variabili logiche

"Attivazione" delle variabili logiche

La sola definizione delle variabili logiche non basta per la correttezza del modello. Infatti, la defizione

$$
y_i = \begin{cases} 1 & \text{se si decide di investire qualcosa in } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}
$$

NON fa parte del modello, ma è un semplice commento che ne facilita la lettura. Ogni volta che si usano delle variabili logiche legate ad altre variabili, è necessario introdurre dei vincoli (vincoli di "attivazione") che sanciscano la relazione tra le variabili binarie e la/le corrispondenti altre variabili. Si ribadisce che tali vincoli devono essere LINEARI.

Valori "spuri"

Si fa notare che il vincolo di attivazione delle variabili logiche y_C e y_D non esclude i casi $y_C = 1$ con $x_C = 0$ oppure $y_D = 1$ con $x_D = 0$. In altre parole, se $x_C = 0$ (risp. $x_D = 0$), la corrispondente variabile y_C (risp. y_D) può essere sia 0 che 1. Questo non inficia la validità della formulazione, in quanto l'eventualità di un valori 1 "spuri" per y_C o y_D si può verificare solo quando sia x_C che x_D sono a 0, e quindi solo in caso di soluzioni comunque ammissibili.

Analogamente, si possono verificare valori spuri per la variabile y_E ($y_E = 1$ con $x_E > 0$, oppure $x_A \geq 10000$ con $y_E = 0$) che non pregiudicano la validità del modello, in quanto corrispondono a casi comunque ammissibili.

15. **Babbo Natale**

Babbo Natale deve organizzare gli acquisti per le prossime festività. Sono arrivate richieste di 15000 bamboline, 17000 automobiline e 12000 libri. La crisi economica spinge Babbo Natale ad approfittare di alcuni stock di giocattoli, la cui composizione e il cui prezzo sono sintetizzati nella seguente tabella:

Stock	**bamboline**	**automobiline**	**libri**	**costo (euro)**
1	100	40	80	*90.00*
2	50	90	20	*75.00*
3	80	60	-	*80.00*
4	25	125	140	*100.00*

Babbo Natale farà i suoi acquisti da solo e, vista la vicinanza del Natale, non potrà acquistare sia pacchi dello stock 1 sia pacchi dello stock 2, perché i relativi punti di vendita sono molto distanti tra loro. Aiutiamo Babbo Natale ad effettuare gli acquisti nel modo più economico possibile, attraverso la formulazione di un modello di programmazione lineare del problema e tenendo anche conto che Babbo Natale riceve uno sconto di 2000 euro se il numero complessivo di stock 3 e stock 4 acquistati è superiore a 120.

Formulazione

Insiemi

$I \ = \{1, 2, 3, 4\}$ stock acquistabili.

Variabili decisionali

- x_i: numero di stock i acquistati, $\forall\ i \in I$;
- y_i: variabile binaria legata all'acquisto di stock i, cioé:
  $y_i = \begin{cases} 1 & \text{se si acquista stock } i \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$
- z: variabile binaria legata alla scelta di usufruire o meno dello sconto sugli stock 3 e 4, cioé:
  $z = \begin{cases} 1 & \text{se si decide di usufruire dello sconto} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

Parametri

M: costante sufficientemente alta.

Modello PLIM

$$
\begin{aligned}
&\min \quad 90x_1 + 75x_2 + 80x_3 + 100x_4 - 2000z \\
&s.t. \\
&100x_1 + 50x_2 + 80x_3 + 25x_4 \geq 15000 \qquad \text{(richiesta bamboline)} \\
&40x_1 + 90x_2 + 60x_3 + 125x_4 \geq 17000 \qquad \text{(richiesta automobiline)} \\
&80x_1 + 20x_2 + 140x_4 \geq 12000 \qquad \text{(richiesta libri)} \\
\\
&x_1 \leq My_1 \qquad \text{(attivazione variabili binarie legate a } x\text{)} \\
&x_2 \leq My_2 \\
&y_1 + y_2 \leq 1 \qquad \text{(vincolo logico stock 1 nand stock 2)} \\
\\
&x_3 + x_4 \geq 120z \qquad \text{(attivazione variabile binaria sullo sconto)} \\
\\
&x_i \in \mathbb{Z}_+, y_i \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

Commento sui valori spuri delle variabili logiche

I vincoli di attivazione delle variabili logiche non escludono i casi $y_i = 1$ con $x_i = 0$. Anche qui, per i requisiti espressi dal problema, i *valori "spuri" sono amessi*. Infatti, la formulazione rimane valida, in quanto l'eventualità di valore 1 "spurio" per y_i si può verificare solo in corrispondenza di soluzioni comunque ammissibili: in presenza di (e.g.) $y_1 = 1$ spurio, abbiamo almeno due stock non utilizzati, visto che y_2, e quindi x_2 deve essere 0, che è compatibile con i requisiti di ammissibilità.

Variante al problema

*E se il requisito fosse: "**Esattamente** uno tra gli stock 1 e 2 deve essere usato"?*

In questo caso, il vincolo logico corretto sarebbe stato

$$y_1 + y_2 = 1$$

e il valore spurio $y_i = 1$ con $x_i = 0$ non potrebbe essere tollerato, perché renderebbe ammissibile una soluzione con $x_1 = x_2 = 0$ (con, ad esempio, $y_1 = 0$ e $y_2 = 1$) che non rispetta i requisiti. Pertanto il modello sopra esposto dovrebbe essere completato con ulteriori vincoli che forzino $x_i > 0$ se $y_i = 1$ (e non solo $x_i = 0$ se $y_i = 0$). Essendo le variabili x_i intere, esiste un valore minimo per x_i, quando diversa da 0. Questo valore è 1, e lo possiamo usare per aggiungere i vincoli

$$
\begin{aligned}
&x_1 \geq 1 \cdot y_1 \qquad \text{(attivazione variabili binarie bis)} \\
&x_2 \geq 1 \cdot y_2
\end{aligned}
$$

7 Esempi notevoli

16. **Assunzione multiperiodale di personale**

Una ditta che si occupa di riparazioni deve pianificare le assunzioni per i prossimi 5 mesi. All'inizio, la ditta dispone di 20 operai esperti. Ogni operaio esperto fornisce 150 ore di lavoro al mese e percepisce uno stipendio di 1000 euro. Un operaio neoassunto, durante il primo mese di servizio, percepisce uno stipendio di 500 euro e non fornisce, in pratica, lavoro utile; per questo primo mese gli viene invece affiancato un operaio esperto che gli insegni il mestiere. Ogni operaio esperto che svolge affiancamento rende per 70 ore di lavoro al mese (anziché 150). Dopo il mese di apprendistato, gli operai neoassunti diventano esperti, con pari abilità lavorativa e stipendio. Le quantità di ore/lavoro da coprire nei prossimi 5 mesi sono rispettivamente pari a 2000, 4000, 7000, 3000 e 3500. Se si assumono almeno 10 persone nei primi due mesi, l'azienda può incassare un contributo statale di 10000 euro. Infine, l'ufficio del personale può supportare nuove assunzioni solo in uno degli ultimi tre mesi. Formulare il programma lineare che consenta di pianificare le assunzioni in modo da minimizzare i costi netti del personale nei prossimi 5 mesi.

Formulazione

Variabili decisionali

x_i: neoassunti nel mese i, $\forall\, i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

y_i: esperti disponibili nel mese i, $\forall\, i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

w_i: variabile logica legata alla scelta di assumere nel mese i, $\forall\, i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

$$w_i = \begin{cases} 1 & \text{se si decide di assumere nel mese } i \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

z: variabile logica legata alla scelta di ottenere o meno il contributo statale:

$$z = \begin{cases} 1 & \text{se si decide di ottenere il contributo statale} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Parametri

M: costante sufficientemente elevata (maggiore del numero massimo di apprendisti assumibili nei mesi 3, 4 o 5).

Modello PLI

$$\begin{array}{ll}\min & 500(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)+1000(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5)-10000z\\ \text{s.t.} & \end{array}$$

$$\begin{array}{rlrl}
\text{(Mese 1)} & y_1 = 20 & \text{(Mese 2)} & y_2 = y_1 + x_1\\
& x_1 \leq y_1 & & x_2 \leq y_2\\
& 150(y_1 - x_1) + 70x_1 \geq 2000 & & 150(y_2 - x_2) + 70x_2 \geq 4000\\
\\
\text{(Mese 3)} & y_3 = y_2 + x_2 & \text{(Mese 4)} & y_4 = y_3 + x_3\\
& x_3 \leq y_3 & & x_4 \leq y_4\\
& 150(y_3 - x_3) + 70x_3 \geq 7000 & & 150(y_4 - x_4) + 70x_4 \geq 3000\\
\\
\text{(Mese 5)} & y_5 = y_4 + x_4 & \text{(attiva } z\text{)} & x_1 + x_2 \geq 10z\\
& x_5 \leq y_5 & \text{(attiva } w\text{)} & x_i \leq M w_i,\ \forall\, i = 3,4,5\\
& 150(y_5 - x_5) + 70x_5 \geq 3500 & \text{(limiti)} & w_3 + w_4 + w_5 \leq 1\\
\\
& x_i, y_i \in \mathbb{Z}_+,\ \forall\, i \in \{1,2,3,4,5\} & & z \in \{0,1\}\\
& & & w_i \in \{0,1\},\ \forall\, i \in \{3,4,5\}
\end{array}$$

La costante M viene utilizzata per attivare le variabili binarie w_i, $\forall\, i = 3, 4, 5$. Se vogliamo dare un valore per M (non è richiesto all'esame, ma si apprezzano ragionamenti validi), possiamo procedere come segue. Sicuramente, tenendoci "larghi", un valore possibile per M è ottenuto considerando tutto il lavoro da fare, assumendo che sia fatto da soli apprendisti (una volta diventari esperti), e che sia fatto nel mentre si affianca un nuovo apprendista: $M \geq \left\lceil \frac{2000+4000+7000+3000+3500}{70} \right\rceil = 279$. Con qualche considerazione in più, possiamo affinare il valore di M, che, in generale, è bene sia il più basso possibile. Osserviamo che M è riferita agli ultimi tre mesi, nei quali non assumeremo più operai di quelli necessari per effettuare tutta la manutenzione dei mesi 4 e 5 (gli operai sono produttivi dal mese successivo). Pertanto, possiamo porre $M \geq \lceil \frac{3000+3500}{70} \rceil = 93$.

Nota: possiamo arguire che x_5 è a 0 in una soluzione ottima ed eliminare tale variabile.

Commento sull'attivazione delle variabili logiche

Analogamente a quanto osservato per l'esercizio "Portfolio Optimization", sono possibili dei valori 1 "spuri" per le variabili w_i. Tuttavia, anche in questo caso, tali valori spuri sono in corrispondenza di soluzioni comunque ammissibili: la presenza di una w_i pari a 1, con la corrispondente x_i pari a 0, esclude comunque che ci possano essere altre $x_i > 0$ (per $i \in \{3, 4, 5\}$), cioé la soluzione è comunque ammissibile.

Se si guardano i soli vincoli, sarebbero possibili anche valori "spuri" per la variabile z. Infatti, è possibile avere $z = 0$ con $x_1 + x_2 \geq 10$: ad esempio, se $x_1 + x_2 = 11$, il vincolo "(attiva z)" sarebbe soddisfatto anche con $z = 0$. Tale eventualità è però esclusa dalla funzione obiettivo: infatti, le soluzioni con $x_1 + x_2 \geq 10$ e $z = 0$, sebbene ammissibili secondo i vincoli, non sono ottime e, quindi, sono escluse dal modello complessivo. In altre parole, il caso $x_1 + x_2 \geq 10$ con $z = 0$ è escluso per ottimalità.

17. **Raffineria**

Una raffineria produce benzina verde e benzina super a partire da due tipi di greggio A e B, usando tre impianti. Il primo impianto può produrre 2 barili di verde e 3 di super a partire da 4 barili di greggio di tipo A e 3 barili di greggio di tipo B. Il secondo impianto può produrre 4 barili di verde e 2 di super a partire da 3 barili di greggio di tipo A e 4 barili di greggio di tipo B. Il terzo impianto può produrre 2 barili di verde e 2 di super a partire da 3 barili di greggio di tipo A e 3 barili di greggio di tipo B. Gli impianti lavorano sempre con le proporzioni specificate. La benzina verde viene venduta a 120 euro al barile, la super a 150 euro al barile. Sono disponibili, per questo mese, 5000 barili di greggio di tipo A e 6000 di tipo B. Per esigenze legate ad altre lavorazioni, almeno uno dei tre impianti deve produrre al massimo 1000 barili. Determinare la produzione che massimizza il profitto mensile.

Formulazione

Variabili decisionali

Essendo i mix di ingresso e uscita in rapporti costanti e ben determinati, possiamo utilizzare variabili legate al livello di produzione degli impianti.

x_i: livello di produzione dell'impianto i, $\forall\, i \in \{1, 2, 3\}$;

es. livello $x_1 = 1 \Rightarrow$ consumo 4 barili di A e 3 di B e produco 2 barili di verde e 3 di super;

es. livello $x_1 = 1,5 \Rightarrow$ consumo $(1,5 \cdot 4 =)$ 6 barili di A e 4,5 di B e produco 3 barili di verde e 4,5 di super;

z_i: variabile logica legata alla scelta degli impianti con produzione limitata, $\forall\, i \in \{1, 2, 3\}$, cioé

$$z_i = \begin{cases} 1 & \text{se si decide di limitare a 1000 la produzione di barili nell'impianto } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Parametri

M: costante sufficientemente elevata (maggiore o uguale al numero massimo di barili di verde o super ottenibili in un impianto).

Modello PLIM

$$
\begin{array}{ll}
\max & 120(2x_1 + 4x_2 + 2x_3) + 150(3x_1 + 2x_2 + 2x_3) \\
s.t. & \\
& 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 5000 \quad \text{(Disponibilità greggio)} \\
& 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 6000 \\
& \\
& z_1 + z_2 + z_3 \geq 1 \quad \text{(Vincolo logico)} \\
& 5x_1 \leq 1000 + M(1 - z_1) \\
& 6x_2 \leq 1000 + M(1 - z_2) \\
& 4x_3 \leq 1000 + M(1 - z_3) \\
& \\
& x_i \in \mathbb{R}_+, z_i \in \{0, 1\}, \forall\, i = 1, 2, 3
\end{array}
$$

Esercizio. Come si potrebbe dimensionare M?

Formulazione alternativa

Variabili decisionali

Una scelta più immediata delle variabili decisionali è la seguente. Si ottiene un modello corretto ma più complicato.

x_{ij}: numero di barili di benzina di tipo i prodotta (output) nell'impianto j, $\forall\, i \in \{v, s\}$, $\forall\, j \in \{1, 2, 3\}$;

y_{kj}: numero di barili di greggio di tipo i utilizzati (input) nell'impianto j, $\forall\, k \in \{A, B\}$, $\forall\, j \in \{1, 2, 3\}$;

z_j: variabile logica legata alla scelta degli impianti con produzione limitata, $\forall\, j \in \{1, 2, 3\}$, cioé
$z_j = \begin{cases} 1 & \text{se si decide di limitare a 1000 la produzione di barili nell'impianto } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$.

Parametri

M: costante sufficientemente elevata (maggiore o uguale al numero massimo di barili di verde o super ottenibili in un impianto).

Modello PLIM

$$\begin{array}{lll}
\max & 120(x_{v1}+x_{v2}+x_{v3})+150(x_{s1}+x_{s2}+x_{s3}) & \\
s.t. & & \\
& y_{A1}+y_{A2}+y_{A3} \leq 5000 & \text{(Disponibilità greggio)} \\
& y_{B1}+y_{B2}+y_{B3} \leq 6000 & \\
& & \\
& 3y_{A1}=4y_{B1} \quad \text{(input } y_{A1}:y_{B1}=4:3) & \text{(Bilanciamento impianto 1)} \\
& 3x_{v1}=2x_{s1} \quad \text{(output } x_{v1}:x_{s1}=2:3) & \\
& y_{A1}=2x_{v1} \quad \text{(input/output } y_{A1}:x_{v1}=4:2) & \\
& & \\
& 4y_{A2}=3y_{B2} \quad \text{(input)} & \text{(Bilanciamento impianto 2)} \\
& x_{v2}=2x_{s2} \quad \text{(output)} & \\
& 4y_{A2}=3x_{v2} \quad \text{(input/output)} & \\
& & \\
& y_{A3}=y_{B3} \quad \text{(input)} & \text{(Bilanciamento impianto 3)} \\
& x_{v3}=x_{s3} \quad \text{(output)} & \\
& 2y_{A3}=3x_{v3} \quad \text{(input/output)} & \\
& & \\
& z_1+z_2+z_3 \geq 1 & \text{(Vincolo logico)} \\
& x_{v1}+x_{s1} \leq 1000+M(1-z_1) & \\
& x_{v2}+x_{s2} \leq 1000+M(1-z_2) & \\
& x_{v3}+x_{s3} \leq 1000+M(1-z_3) & \\
& & \\
& x_{ij},\ y_{kj} \in \mathbb{R}_+, z_j \in \{0,1\}, \forall\, i \in \{v,s\}, \forall\, j \in \{1,2,3\}, \forall\, k \in \{A,B\} &
\end{array}$$

18. **Agricoltore CEE**

    Un'azienda agricola produce mais, soia e grano in tre tenute A, B e C. La tenuta A dispone di 600 ettari di terreno e di una riserva d'acqua di $8 \times 10^6 mc$. La tenuta B dispone di 700 ettari di terreno e di $5 \times 10^6 mc$ d'acqua. La tenuta C dispone di 450 ettari di terreno e di $6 \times 10^6 mc$ d'acqua. La resa economica di ogni ettaro di terreno è di 5, 6 e 7 migliaia di euro per le produzioni di mais, soia e grano, rispettivamente. Ogni ettaro di terreno consuma acqua per 20000, 10000 e 10000 mc se coltivato rispettivamente a mais, soia o grano. Le direttive della comunità europea impongono che almeno una tenuta lasci 200 ettari di terreno incolto e che l'estensione complessiva del terreno coltivato a soia dall'azienda non superi il 40% del totale del suolo coltivato. L'azienda vuole massimizzare la resa economica delle tre tenute.

Formulazione

Insiemi

$I = \{A, B, C\}$ tenute;

$J = \{M, S, G\}$ coltivazioni.

Variabili decisionali

x_{ij}: ettari della tenuta i da coltivare a j, $\forall\, i \in I$, $\forall\, j \in J$;

z_i: variabile logica legata alla scelta della tenuta con terreno incolto, $\forall\, i \in I$, cioé
$$z_i = \begin{cases} 1 & \text{se si decide di lasciare } 200ha \text{ di terreno incolto nella tenuta } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Modello PLIM

$$\begin{array}{lll}
\max & [5(x_{AM} + x_{BM} + x_{CM}) + 6(x_{AS} + x_{BS} + x_{CS}) & \\
& \qquad +7(x_{AG} + x_{BG} + x_{CG})] \times 10^3 & \\
s.t. & & \\
& 20x_{AM} + 10x_{AS} + 10x_{AG} \leq 8000 \quad (\times 10^3) & \text{(Disponibilità acqua)} \\
& 20x_{BM} + 10x_{BS} + 10x_{BG} \leq 5000 & \\
& 20x_{CM} + 10x_{CS} + 10x_{CG} \leq 6000 & \\
& & \\
& x_{AM} + x_{AS} + x_{AG} \leq 600 & \text{(Disponibilità terreno)} \\
& x_{BM} + x_{BS} + x_{BG} \leq 700 & \\
& x_{CM} + x_{CS} + x_{CG} \leq 450 & \\
& & \\
& x_{AS} + x_{BS} + x_{CS} \leq 0,4 \sum_{i \in I,\ j \in J} x_{ij} & \text{(Massimo 40\% a soia)} \\
& & \\
& z_A + z_B + z_C \geq 1 & \text{(terreno incolto)} \\
& x_{AM} + x_{AS} + x_{AG} \leq 600 - 200z_A & \\
& x_{BM} + x_{BS} + x_{BG} \leq 700 - 200z_B & \\
& x_{CM} + x_{CS} + x_{CG} \leq 450 - 200z_C & \\
& & \\
& x_{ij} \in \mathbb{R}_+, z_i \in \{0, 1\}, \forall\, i \in I, \forall\, j \in J & \text{(Dominio)}
\end{array}$$

Nota: I vincoli sul terreno incolto rendono superflui (*dominano*) i vincoli sulla disponibilità di terreno.