Ricerca Operativa

Laboratorio: utilizzo di solver per programmazione matematica

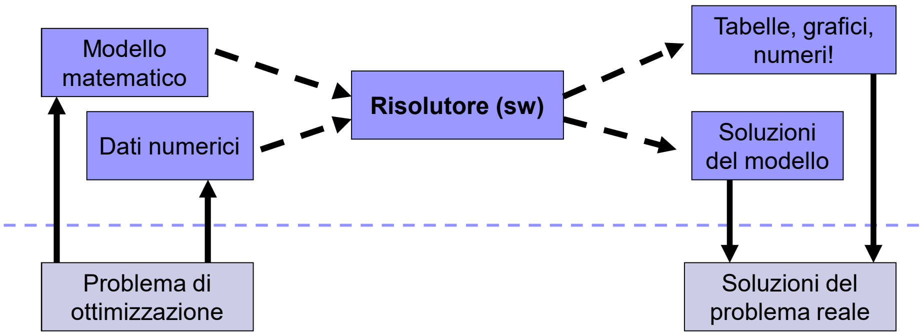
Elementi di un modello di Programmazione Matematica

- **Insiemi**: elementi del sistema;
- **Parametri**: dati del problema;
- **Variabili decisionali o di controllo**: grandezze sulle quali possiamo agire;
- **Vincoli**: relazioni matematiche che descrivono le condizioni di ammissibilità delle soluzioni.
- **Funzione obiettivo**: e la quantità da massimizzare o minimizzare.

Un modello **dichiara** le caratteristiche della soluzione ottima in linguaggio matematico

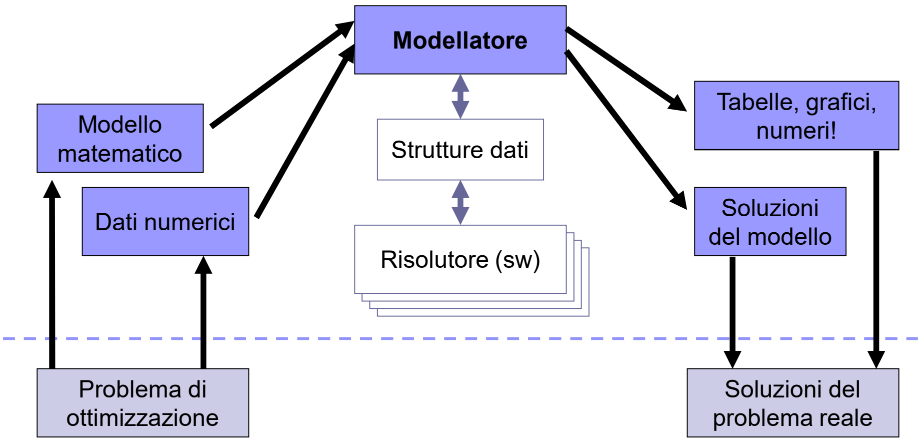
Utilizzo di solver

Un **solver** (o risolutore) è un software che riceve in input una descrizione di un problema di ottimizzazione e produce in output la soluzione ottima del modello e informazioni ad essa collegate.



Ruolo dei modellatori

Un **modellatore** fornisce un'interfaccia verso un risolutore.



Obiettivi dei modellatori

- Disporre di un **linguaggio** semplice:
  - ad alto livello;
  - simile a quello di modellazione (linguaggio matematico);
  - formalmente strutturato;
  - possibilità di commenti.
- Mantenere la **separazione tra modello e dati** del problema: per cambiare l'istanza basta cambiare i dati, non il modello.
- Dialogare con **diversi solver** (strutture di I/O standardizzate).
- Linguaggio per script.

Possibili configurazioni (alcune)

Modellatori:

- Foglio elettronico
- AMPL
- ZIMPL
- Lingo
- OPL
- Mosel
- …

Solver:

- Risolutore per fogli elettronici
- Cplex (PL, PLI, …)
- Gurobi
- SCIP
- XPress
- Minos (PNL)
- Lindo
- GPLK (librerie)
- Baron
- Lp_solve
- …

Risolutori in fogli elettronici

- Descrivono il modello sotto utilizzando le formule di un foglio elettronico
- Caratteristiche:
  - Facilità di utilizzo (diffusione, interfaccia «familiare»)
  - Integrazione con tool di presentazione
  - Rigidità di utilizzo (no separazione modello/dati)
  - Motori di ottimizzazione poco efficienti
- Esempi
  - Risolutore (solver) integrato in Microsoft Excel
    http://www.solver.com/excel-solver-help
  - Solver di LibreOffice
    https://help.libreoffice.org/Calc/Solver/it

Risolutore di Excel

- Procedura di attivazione:
  - File → Opzioni → Componenti Aggiuntivi → Risolutore → Vai
  - Il solver si trova negli strumenti «Dati»
- Interfaccia intuitiva per indicare
  - Funzione obiettivo
  - Variabili («by changing cells»)
  - Vincoli (inclusa non negatività)
- Motori di ottimizzazione disponibili
  - **Simplesso LP** (per modelli LINEARI): efficiente, esatto
  - GRG Non Lineare (per modelli «smooth», cioè funzioni «derivabili» per obiettivo e vincoli): meno efficiente, ottimi locali
  - Evolutionary (per modelli «qualsiasi»): metodo euristico (basato su algoritmi genetici)

Esempio

Un coltivatore ha a disposizione 11 ettari di terreno da coltivare a lattuga o a patate. Le risorse a sua disposizione, oltre al terreno, sono: 70 kg di semi di lattuga, 18 t di tuberi, 145 t di concime. Supponendo che il mercato sia in grado di assorbire tutta la produzione e che i prezzi siano stabili, la resa stimata per la coltivazione di lattuga è di 3000 €/ettaro e quella delle patate è di 5000 €/ettaro. L'assorbimento delle risorse per ogni tipo di coltivazione è di 7 kg di semi e 10 t di concime per ettaro di lattuga, e 3 t di tuberi e 20 di concime per le patate. Stabilire quanto terreno destinare a lattuga e quanto a patate in modo da massimizzare la resa economica e sfruttando al meglio le risorse disponibili.

Modello matematico

- **Variabili decisionali:**
  x_L : quantità in ettari da destinare a lattuga
  x_P : quantità in ettari da destinare a patate
- **Funzione obiettivo:**
  $max\ 3000\, x_L + 5000\, x_P$
- **Sistema dei vincoli:**

$x_L + x_P \leq 12$ (ettari disponibili)

$7\, x_L \leq 70$ (semi disponibili)

$3\, x_P \leq 18$ (tuberi disponibili)

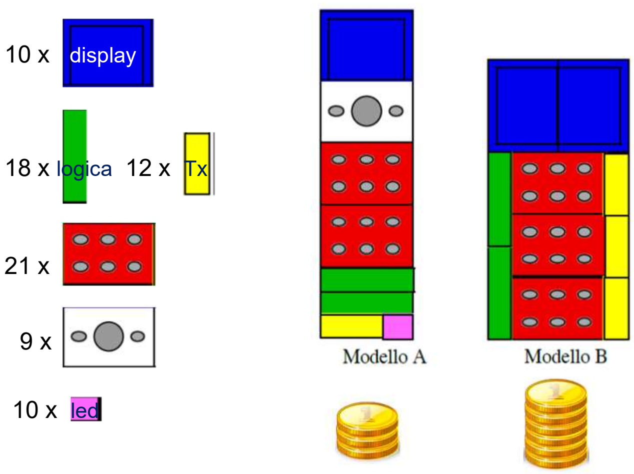
$10\, x_L + 20\, x_P \leq 160$ (concime disponibile)

$x_L \geq 0,\ x_P \geq 0$ (dominio)

Soluzione

- Soluzione empirica con foglio elettronico
- Soluzione con metodo grafico (modello lineare, due variabili)
- Soluzione ottima con il *Risolutore*
- [Risorse: *risolutore.xls*]

Problemi di ottimizzazione: un “gioco”



Obiettivo:

Quanti A?

Quanti B?

Esercizio 1.

Per l'assemblaggio di telecomandi, si hanno a disposizione 10 moduli display, 18 moduli di logica di controllo, 12 moduli di trasmissione, 21 tastierini, 9 moduli di navigazione e 10 moduli led. I telcomandi sono di due tipi. Il tipo A richiede un display, un modulo di navigazione, 2 tastierini, 2 moduli di logica, un modulo di trasmissione e un led. Il tipo B richiede 2 display, 3 tastierini, 2 moduli di logica e 3 moduli di trasmissione. Considerando che il tipo A premette un guadagno netto di 3 euro e il tipo B di 6 euro, determinare la produzione che massimizza il guadagno.

Risolvere il problema con il Risolutore di Excel

Modello PLI

Siano x_A e x_B le quantità di telefoni di tipo A e B

$$
\begin{array}{lrcrl}
\max & 3\,x_A + 6\,x_B & & & \text{(guadagno complessivo)} \\
s.t. & & & & \\
 & x_A + 2\,x_B & \leq & 10 & \text{(display)} \\
 & x_A & \leq & 9 & \text{(navigazione)} \\
 & 2\,x_A + 3\,x_B & \leq & 21 & \text{(tastierini)} \\
 & 2\,x_A + 2\,x_B & \leq & 18 & \text{(logica)} \\
 & x_A + 3\,x_B & \leq & 12 & \text{(trasmissione)} \\
 & x_A & \leq & 10 & \text{(led)}
\end{array}
$$

$$x_A\,,\,x_B \in \mathbb{Z}_+$$

Esercizi

Risolvere con il Risolutore di Excel i seguenti problemi visti a lezione:

- Problema della dieta
- Problema dei trasporti

[risorse: *risolutore.xls*]

AMPL

- **A** **M**athematicl **P**rogramming **L**anguage
- Linguaggio di modellazione algebrica
  - Esprime un problema di ottimizzazione in una forma comprensibile ad un solutore
  - Linguaggio algebrico: contiene diverse primitive per esprimere la notazione matematica normalmente utilizzata per problemi di ottimizzazione (es. sommatorie, funzioni matematiche, etc.)
- Caratteristiche:
  - Flessibilità: separazione modello / dati, script
  - Integrazione con motori di ottimizzazione allo stato dell'arte
  - Linguaggio «semplice»: traduzione del modello matematico
  - Nuovo linguaggio

Esempio base: contadino

```
#DICHIARAZIONE VARIABILI

var xL >= 0;        #ettari a lattuga
var xP >= 0;        #ettari a patate


#MODELLO

maximize     resa:        3000 * xL + 5000 * xP;

subject to   ettari:      xL + xP <= 12;
subject to   semi:        7 * xL <= 70;
s.t.         tuberi:      3 * xP <= 18;
s.t.         conc:        10 * xL + 20 * xP <= 160;
```


AMPL: comandi base

```
reset; # cancella dati memorizzati

model contadino.mod; # carica il modello
data contadino.dat; # carica i dati

option solver cplex; # scelta del motore di
                       ottimizzazione
solve; # risolve il modello

display xL, xP; # visualizza il valore
                  (ottimo) delle variabili
```

- **Script:** scrivere i comandi in un file « .run », invocare:
  `include contadino.run;`

Esempio base: contadino [risorse]

- **`contadino.mod`**
- **`contadino.dat`**
- **`contadino.run`**

Esercizio 2.

Risolvere il problema dei telecomandi con AMPL

Per le variabili intere:

```
var xA >=0 integer;
```

[Risorse]

- **`telecomandi.mod`**
- **`telecomandi.dat`**
- **`telecomandi.run`**

Esempio: sintassi comando **var**

- Dichiarazione di variabili:

```
var nomeVar  [>= LB] [, <= UB]
                        [integer/binary];
```

- Esercizio: … al massimo 5 telecomandi di tipo A.

```
var xA >=0 , <= 5 integer;
```


Modelli generali

- I modelli precedenti includono i «dati» del problema:
  - Se cambiano i dati bisogna cambiare il modello
  - Poca leggibilità
  - Difficile riportare modifiche del modello
- Separare modello e dati
  - File « .mod » con il modello «generale» e la definizione dei parametri del problema
  - File « .dat » con i dati attribuiti ai parametri
- Per uno stesso modello possiamo utilizzare diversi file dati (ad esempio «contadino» e «telecomandi»)

Modello generale: mix ottimo di produzione

I insieme dei beni che possono essere prodotti;

J insieme delle risorse disponibili;

P_i profitto (unitario) per il bene $i \in I$;

Q_j quantità disponibile della risorsa $j \in J$;

A_{ij} quantità di risorsa j necessaria per la produzione di un'unità del bene i.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in I} P_i x_i \\ s.t. \quad & \\ & \sum_{i \in I} A_{ij} x_i \leq Q_j & \forall\, j \in J \\ & x_i \in \mathbb{R}_+ \ [\,\mathbb{Z}_+ \mid \{0,1\}\,] & \forall\, i \in I \end{aligned}$$

Modello in AMPL: sintatti base

Espressioni indicizzanti

```
#DICHIARAZIONE INSIEMI
set Prodotti;
set Risorse;

#DICHIARAZIONE PARAMETRI
param maxNumProd;         # massimo numero prodotti
param P {Prodotti};       # profitto unitario
param Q {Risorse};        # disponibilità risorsa
param A {Prodotti,Risorse};
                          # risorsa per unità di pr.

var x {Prodotti} >=0 , <= maxNumProd;

maximize profitto: sum {i in Prodotti} P[i]*x[i];

subject to disponib {j in Risorse}:
         sum {i in Prodotti} A[i,j]*x[i] <= Q[j];
```

Dati in AMPL: sintatti base

```
set Prodotti := lattuga patata;
set Risorse := ettari semi tuberi concime;

param maxNumProd := 7;

param        P  :=
lattuga      3000
patata       5000
;
param        Q  :=
ettari        11
semi          70
tuberi        18
concime      145
;                    A{Prodotti=righe , Risorse=colonne}
param A :  ettari semi tuberi concime :=
lattuga    1      7    0      10
patata     1      0    3      20
;
```


Esercizio 3.

Risolvere il problema dei telecomandi con AMPL, usando il modello generale.

- … ogni prodotto ha uno specifico limite superiore!
- .mod

```
param maxNumProd {Prodotti};
var x {i in Prodotti} >=0,<= maxNumProd[i];
```

- .dat

```
    param MaxNumProd := telA 5 telB 999;
```

- [risorse]
  - mixOpt.mod – mixOpt.run
  - mixOpt.contadino.dat – mixOpt.telecomandi.dat
- Comando **expand** (visualizza modello esteso)

Definizione e dichiarazione di set e param

- Dichiarazione di insiemi

```
set nome;
```

- Dichiarazione di parametri

```
[i in] Set1, [j in] Set2, …
param nome [{index_expr}] [default value];
```

- Definizione generale di set e param

```
set nome := elem1 elem2 … elemN;
param nome := index1 index2 … indexN value;
```

- Riferimenti tramite indici (uso di [...]):

```
NomeSet[i] #i-esimo elemento di NomeSet
NomeParam[elem1,elem2, …,elemN]
```


Definizione sintetica di parametri

- Dichiarazioni sintetiche: più parametri con stessi indici

```
param : P   MaxNumProd := #notare i due punti dopo "param"
  telA  3   5
  telB  6   999;
```

- Dichiarazioni sintetiche: tabelle

```
param A :   ettari semi tuberi concime := #due punti dopo A
lattuga     1      7    0      10
patata      1      0    3      20;
```

- Dichiarazioni sintetiche: tabelle trasposte

```
param A (tr) :  lattuga patata :=
ettari          1       1
semi            7       0
tuberi          0       3
Concime         10      20;
```

AMPL: installazione

- AMPL è disponibile su http://ampl.com
  - Software commerciale [a pagamento, trial]
  - Full per scopi didattici (course edition) [a pagamento, trial]
  - **Demo version gratuita** con max 500 variabili e 500 vincoli
  - http://ampl.com/try-ampl/
    - Link Download free size-limited demos
    - Sezione “AMPL IDE download for [Windows | Linux | Mac]”
    - Ad esempio: http://ampl.com/demo/amplide.mswin64.zip
      https://ampl.com/demo/amplide.linux64.tgz

- Documentazione
  - Manuale sintetico sulla pagina del corso
  - The AMPL book:
    http://ampl.com/resources/the-ampl-book/chapter-downloads/

Esercizio 4. Dieta economica

Un dietologo deve preparare una dieta che garantisca un apporto giornaliero di proteine, ferro e calcio di almeno 20 mg, 30 mg e 10 mg, rispettivamente. Il dietologo è orientato su cibi a base di verdura (5 mg/kg di proteine, 6 mg/Kg di ferro e 5 mg/Kg di calcio, al costo di 4 €/Kg), carne (15 mg/kg di proteine, 10 mg/Kg di ferro e 3 mg/Kg di calcio, al costo di 10 €/Kg) e frutta (4 mg/kg di proteine, 5 mg/Kg di ferro e 12 mg/Kg di calcio, al costo di 7 €/Kg). Determinare la dieta di costo minimo.

Risolvere il problema con AMPL (file .mod e .dat separati)

Modello generale: dieta

I insieme delle risorse disponibili;
J insieme delle domande da coprire;
C_i costo (unitario) per l'utilizzo della risorsa $i \in I$;
D_j ammontare della domanda di $j \in J$;
A_{ij} capacità (unitaria) della risorsa i di soddisfare la domanda j.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i \in I} C_i x_i \\ s.t. \quad & \\ & \sum_{i \in I} A_{ij} x_i \geq D_j \qquad \forall\, j \in J \\ & x_i \in \mathbb{R}_+ \,[\, \mathbb{Z}_+ \mid \{0,1\} \,] \quad \forall\, i \in I \end{aligned}$$

Modello PL

- Siano x_1, x_2 e x_3 le quantità di cibi a base di verdura, carne e frutta, rispettivamente

$$\begin{aligned} & \min \quad 4\,x_1 + 10\,x_2 + 7\,x_3 && \text{(costo giornaliero dieta)} \\ & s.t. && \\ & \quad 5x_1 + 15x_2 + 4x_3 \geq 20 && \text{(proteine)} \\ & \quad 6x_1 + 10x_2 + 5x_3 \geq 30 && \text{(ferro)} \\ & \quad 5x_1 + 3x_2 + 12x_3 \geq 10 && \text{(calcio)} \end{aligned}$$

$$x_i \in \mathbb{R}_+, \;\; \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

Esercizio 5.

Il dietologo vuole inserire alimenti a base di pesce azzurro (10 mg/kg di proteine, 15 mg/kg di ferro e 2 mg/kg di calcio, al costo di 3 euro/kg) nella dieta.

Modificare opportunamente i file relativi al problema.

- [Risorse]
  - **diet.mod – diet.run – diet.1.dat – diet.2.dat**
- Comandi
  - `include diet.run;`
  - `reset data; data diet.2.dat;`
  - `solve; display x;`

Esercizio 6. Indagine di mercato

Un'azienda pubblicitaria deve svolgere un'indagine di mercato per lanciare un nuovo prodotto. Si deve contattare telefonicamente un campione significativo di persone: almeno 150 donne sposate, almeno 110 donne non sposate, almeno 120 uomini sposati e almeno 100 uomini non sposati. Le telefonate possono essere effettuate al mattino (al costo operativo di 1.1 euro) o alla sera (al costo di 1.6 euro). Le percentuali di persone mediamente raggiunte sono riportate in tabella.

	Mattino	Sera
Donne sposate	30%	30%
Donne non sposate	10%	20%
Uomini sposati	10%	30%
Uomini non sposati	10%	15%
Nessuno	40%	5%

Si noti come le telefonate serali sono più costose, ma permettono di raggiungere un maggior numero di persone: solo il 5% va a vuoto. Si vuole minimizzare il costo complessivo delle telefonate da effettuare (mattina/sera) in modo da raggiungere un campione significativo di persone

Risolvere il problema con AMPL (usare soluzione Es. 4)

Modello PLI

- Siano x_1 e x_2 il numero di telefonate da fare al mattino e alla sera, rispettivamente

$$
\begin{array}{lll}
min & 1.1\, x_1+1.6\, x_2 \text{ (costo totale telefonate)} & \\
s.t. & & \\
& 0.3x_1+0.3x_2 \geq 150 & \text{(donne sposate)} \\
& 0.1x_1+0.2x_2 \geq 110 & \text{(donne non sposate)} \\
& 0.1x_1+0.3x_2 \geq 120 & \text{(uomini sposati)} \\
& 0.1x_1+0.15x_2 \geq 100 & \text{(uomini non sposati)}
\end{array}
$$

$x_i \in \mathbb{Z}_+, \ \forall i \in \{1, 2\}$

[Risorse] `diet.indagine.dat`

Esercizio 7. Trasporto di frigoriferi

Una ditta di produzione di elettrodomestici produce dei frigoriferi in tre stabilimenti e li smista in quattro magazzini intermedi di vendita. La produzione settimanale nei tre stabilimenti A, B e C è rispettivamente di 50, 70 e 20 unità. La quantità richiesta dai 4 magazzini è rispettivamente di 10, 60, 30 e 40 unità. I costi per il trasporto di un frigorifero tra gli stabilimenti e i magazzini 1, 2, 3 e 4 sono i seguenti:

- dallo stabilimento A: 6, 8, 3, 4 euro;
- dallo stabilimento B: 2, 3, 1, 3 euro;
- dallo stabilimento C: 2, 4, 6, 5 euro.

Utilizzare AMPL per determinare il piano di trasporti di costo minimo, considerando che non sono ammesse rimanenze alla fine della settimana e che lo stesso modello dovrà essere utilizzato per diverse settimane.

Modello PLI

- Sia x_{ij} il numero di frigoriferi prodotti nello stabilimento i e smistati nel magazzino j

$$\begin{aligned}
\min \quad & 6\, x_{A1}+8\, x_{A2}+3\, x_{A3}+4\, x_{A4}+ \\
+ \quad & 2\, x_{B1}+3\, x_{B2}+1\, x_{B3}+3\, x_{B4}+ \\
+ \quad & 2\, x_{C1}+4\, x_{C2}+6\, x_{C3}+5\, x_{C4}
\end{aligned}$$

s.t.

$$\begin{aligned}
& x_{A1}+x_{A2}+x_{A3}+x_{A4} \le 50 && \text{(capacità produttiva stabilimento A)} \\
& x_{B1}+x_{B2}+x_{B3}+x_{B4} \le 70 && \text{(capacità produttiva stabilimento B)} \\
& x_{C1}+x_{C2}+x_{C3}+x_{C4} \le 20 && \text{(capacità produttiva stabilimento C)} \\
& x_{A1}+x_{B1}+x_{C1} \ge 10 && \text{(domanda magazzino 1)} \\
& x_{A2}+x_{B2}+x_{C2} \ge 60 && \text{(domanda magazzino 2)} \\
& x_{A3}+x_{B3}+x_{C3} \ge 30 && \text{(domanda magazzino 3)} \\
& x_{A4}+x_{B4}+x_{C4} \ge 40 && \text{(domanda magazzino 4)}
\end{aligned}$$

$x_{ij} \in \mathbb{Z}_+ \ \forall\, i \in \{A, B, C\}, j \in \{1, 2, 3, 4\}$

Modello generale: trasporti

I insieme dei centri di offerta; O_i ammontare dell'offerta in $i \in I$;

J insieme dei centri di domanda; D_j ammontare della domanda in $j \in J$.

C_{ij} costo (unitario) per il trasporto da $i \in I$ a $j \in J$;

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} C_{ij}x_{ij} \\
s.t. \quad & \\
& \sum_{j\in J} x_{ij} \le O_i && \forall\, i \in I \\
& \sum_{i\in I} x_{ij} \ge D_j && \forall\, j \in J \\
& x_{ij} \in \mathbb{R}_+ \ [\,\mathbb{Z}_+ \mid \{0,1\}\,] && \forall\, i \in I, j \in J
\end{aligned}$$

`display` e espressioni indicizzanti

- Visualizza elementi del modello e della soluzione

  ```
  display elemento1[, elemento2, …];
  display {ind_expr} elemento[indici]
  ```

- Esempi di espr. indicizzanti *ind_expr* (condizionate)
  - `display {i in I} C[i,"m3"];`
  - `display {i in I, j in J: C[i,j] >= 5} C[i,j];`
  - `display {i in I: origine[i].body - O[i] != 0} O[i]-origine[i].body;`
- Le espressioni indicizzanti possono essere usate anche per la definizione di variabili, parametri, vincoli etc.
- [Risorse]: `trasporto.mod` – `trasporto_frigo.dat` – `trasporto_frigo.run`

Esercizio: Localizzazione di servizi

Una città è divisa in sei quartieri, dove si vogliono attivare dei centri unificati di prenotazione (CUP) per servizi sanitari. In ciascun quartiere è stata individuata una possibile località di apertura. Le distanze medie in minuti da ciascun quartiere a ciascuna delle possibili località è indicata in tabella. Si desidera che nessun utente abbia un tempo medio di spostamento superiore a 15 minuti per arrivare al CUP più vicino e si vuole minimizzare il numero di CUP attivati.

	Loc. 1	Loc. 2	Loc 3	Loc. 4	Loc. 5	Loc. 6
Q.re 1	5	10	20	30	30	20
Q.re 2	10	5	25	35	20	10
Q.re 3	20	25	5	15	30	20
Q.re 4	30	35	15	5	15	25
Q.re 5	30	20	30	15	5	14
Q.re 6	20	10	20	25	14	5

Luigi De Giovanni - Ricerca Operativa – Laboratorio: utilizzo di solver per programmazione matematica

Modello PLI

Sia $x_i = 1$, se viene aperto il CUP nel quartiere *i*, 0 altrimenti

$$
\begin{array}{lllllllll}
min & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & & \\
s.t. & & & & & & & & \\
& x_1 & +x_2 & & & & & \geq 1 & \text{(esigenze q.re 1)} \\
& x_1 & +x_2 & & & & +x_6 & \geq 1 & \text{(esigenze q.re 2)} \\
& & & x_3 & +x_4 & & & \geq 1 & \text{(esigenze q.re 3)} \\
& & & x_3 & +x_4 & +x_5 & & \geq 1 & \text{(esigenze q.re 4)} \\
& & & & x_4 & +x_5 & +x_6 & \geq 1 & \text{(esigenze q.re 5)} \\
& & x_2 & & & +x_5 & +x_6 & \geq 1 & \text{(esigenze q.re 6)} \\
& x_i \in \{0,1\} & & & & & & &
\end{array}
$$

Esercizio: distribuzione di PC

Un'azienda assembla dei PC in tre diversi stabilimenti. Il costo di produzione varia a seconda dello stabilimento. I PC sono venduti a cinque diversi clienti bancari e si sopportano dei costi di trasporto (inclusi gli oneri di importazione) per spedire un PC da ciascuno stabilimento a ciascun cliente. La produzione di ciascuno stabilimento è limitata e sono definite le richieste di PC di ogni cliente. I dati sono riassunti nella tabella seguente.

Scrivere in AMPL un modello del problema e fornire la soluzione, in termini di costo complessivo di trasporto e di quantità trasportate tra stabilimenti e sedi bancarie.

Esercizio: distribuzione di PC (dati)

Produzione			Costi di trasporto				
Unità	**costo unit.**	**Capa-cità**	**Banca Intesa**	**Uni Credit**	**Anton Veneta**	**Credit Suisse**	**Banca Cina**
Italia	280	13500	5,5	7,5	6,9	8,0	10,3
Cina	130	10300	15,0	14,3	13,0	16,4	5,0
Francia	230	9200	6,0	7,8	6,3	6,8	11,0
		domanda	7100	3400	9700	5200	3050

Esercizio: distribuzione di PC (modello)

$$\min \sum_{i\in S, j\in B} (w_i + c_{ij}) x_{ij} \qquad \text{(f.o.)}$$

$$s.t.$$

$$\sum_{j\in B} x_{ij} \le a_i \qquad \forall i \in S \qquad \text{(capacità)}$$

$$\sum_{i\in S} x_{ij} \ge b_j \qquad \forall j \in B \qquad \text{(richiesta)}$$

$$\sum_{j\in B} x_{\text{Italia}j} \ge \alpha \sum_{i\in S, j\in B} x_{ij} \qquad \text{(bilanciamento complessivo)}$$

$$\sum_{j\in B} x_{\text{Italia}j} \ge \beta \sum_{j\in B} x_{ij} \qquad \forall i \in S\backslash\{Italia\} \qquad \text{(bilanciamento singolo)}$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}_+ \qquad \forall i \in S, j \in B \qquad \text{(dominio)}$$

Esercizio: distribuzione di PC (scenari)

- Per bilanciare la produzione, l'azienda richiede che nello stabilimento italiano si assemblino almeno il 40% dei PC
- Per bilanciare la produzione, l'azienda richiede che nello stabilimento italiano si assemblino almeno il 50% dei PC
- Per bilanciare la produzione, l'azienda richiede che nello stabilimento italiano si assemblino almeno l'80% dei PC prodotti negli altri stabilimenti.
- Conviene, nei diversi scenari, potenziare di 5000 unità la produzione in Cina, al costo di 500.000 euro?
- Studiare gli effetti della diminuzione (a intervalli di 3 euro) del costo di produzione in Italia (diminuzione massima di 20 euro), indicando in quali casi in Italia la produzione complessiva supera quella della Francia.