Esercizio 1

Si noti che i costi sono dati per tonnellata, mentre molti vincoli riguardano il numero di navi. Si introducono pertanto DUE tipi di variabili, uno relativo al numero di tonnellate per tipo di nave e rotta, e uno relativo al numero di navi per tipo e per rotta. Ovviamente, tali variabili sono tra loro legate e tale legame deve risultare nei vincoli.

Variabili decisionali:

- x_{ij}: numero di tonnellate di merce trasportate da navi di tipo $i \in \{A, B, C\}$ sulla rotta $j \in \{1, 2, 3\}$ (le variabili x_{C1} e x_{A3} non sono definite, visto che le navi non sono impiegabili);
- y_{ij}: numero di navi di tipo $i \in \{A, B, C\}$ da utilizzare sulla rotta $j \in \{1, 2, 3\}$ (le variabili y_{C1} e y_{A3} non sono definite);
- z_{ij}: variabile logica che vale 1 se si utilizzano navi di tipo $i \in \{A, B, C\}$ sulla rotta $j \in \{1, 2, 3\}$ (definite per i necessari i e j);

Parametro M: costante sufficientemente grande (grande almeno quanto il massimo numero di navi di un determinato tipo su una determinata rotta, ad esempio $M = 150$).

Modello:

$$\min 60x_{A1} + 30x_{A2} + 45x_{B1} + 25x_{B2} + 30x_{B3} + 50x_{C2} + 35x_{C3}$$

subject to

$$\begin{array}{lll} x_{A1} + x_{B1} & \geq 20000 & //\text{(richiesta tonnellate su rotta 1)} \\ x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} & \geq 5000 & //\text{(richiesta tonnellate su rotta 2)} \\ x_{B3} + x_{C3} & \geq 15000 & //\text{(richiesta tonnellate su rotta 3)} \end{array}$$

//(legame tra le variabili x_{ij} e y_{ij}:
// si devono avere almeno y_{ij} navi per trasportare x_{ij} tonnellate)

$$\begin{array}{lll} x_{A1} \leq 150y_{A1} & x_{A2} \leq 120y_{A2} & \\ x_{B1} \leq 100y_{B1} & x_{B2} \leq 80y_{B2} & x_{B3} \leq 90y_{B3} \\ & x_{C2} \leq 60y_{C2} & x_{C3} \leq 140y_{C3} \end{array}$$

//(massimo numero di navi)

$$\begin{array}{lll} y_{A1} + y_{A2} & \leq 100 & //\text{(di tipo A)} \\ y_{B1} + y_{B2} + y_{B3} & \leq 80 & //\text{(di tipo B)} \\ y_{C2} + y_{C3} & \leq 150 & //\text{(di tipo C)} \\ y_{A1} & \leq 10 & //\text{(tipo A su rotta 1)} \end{array}$$

//(vincoli logici: un solo tipo di nave sulla rotta 2)
$z_{A2} + z_{B2} + z_{C2} \quad \leq 1$ //(vincolo logico)
$y_{A2} \leq M z_{A2} \quad y_{B2} \leq M z_{B2} \quad y_{C2} \leq M z_{C2}$ //(attivazione variabili logiche)
$(y_{A2} \geq z_{A2} \quad y_{B2} \geq z_{B2} \quad y_{C2} \geq z_{C2})$ //(controllo '1' spuri: non necessario)

//(vincoli logici: limitazioni uso tipo B)
$z_{B1} \leq 1 - z_{B2}$ //(vincolo logico per inibizione su rotta 1)
$z_{B3} \leq 1 - z_{B2}$ //(vincolo logico per inibizione su rotta 3)
$y_{B1} \leq M z_{B1} \quad y_{B3} \leq M z_{B3}$ //(attivazione ulteriori variabili logiche)
$(y_{B1} \geq z_{B1} \quad y_{B3} \geq z_{B3})$ //(controllo '1' spuri: non necessario)

[NOTA: In alternativa, i primi due vincoli in questo gruppo possono essere sostituiti da un unico vincolo: $z_{B1} + z_{B3} \leq 2\,(1 - z_{B2})$]

//(DOMINI:)
$x_{ij} \in \mathbb{R}_+ \quad \forall \quad i \in \{A, B, C\}, j \in \{1, 2, 3\}$
$y_{ij} \in \mathbb{Z}_+ \quad \forall \quad i \in \{A, B, C\}, j \in \{1, 2, 3\}$
$z_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall \quad i \in \{A, B, C\}, j \in \{1, 2, 3\}$

Esercizio 2

Passo alla forma standard:
1. Funzione obiettivo di minimo:
   $\min -x_1 - 5x_2$
2. vincoli di uguaglianza:

$$\begin{array}{rrrrrcr}
x_1 & & & +x_4 & & = & 5 \\
x_1 & +x_2 & & & -x_5 & = & -1 \\
 & x_2 & +2x_3 & & & = & -2
\end{array}$$

3. variabili non negative: effettuo la sostituzione $\hat{x}_2 = -x_2$, $\hat{x}_2 \geq 0$

$$\begin{array}{llrrrrrcr}
\min & -x_1 & +5\hat{x}_2 & & & & & & \\
\text{s.t.} & x_1 & & & +x_4 & & = & 5 \\
 & x_1 & -\hat{x}_2 & & & -x_5 & = & -1 \\
 & & -\hat{x}_2 & +2x_3 & & & = & -2 \\
 & x_1 & \hat{x}_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

4. termini noti non negativi

$$\begin{array}{llrrrrrcr}
\min & -x_1 & +5\hat{x}_2 & & & & & & \\
\text{s.t.} & x_1 & & & +x_4 & & = & 5 \\
 & -x_1 & +\hat{x}_2 & & & +x_5 & = & +1 \\
 & & +\hat{x}_2 & -2x_3 & & & = & +2 \\
 & x_1 & \hat{x}_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

Imposto il tableau del simplesso:

	$\downarrow$ x_1	$\hat{x}_2$	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
$-z$	-1	5	0	0	0	0
?	1	0	0	1	0	5
?	-1	1	0	0	1	1
?	0	1	-2	0	0	2

Procedo quindi mettendo il tableau in forma canonica rispetto alla base data: faccio entrare in base la variabile x_1 trasformando, con operazioni elementari, la colonna di x_1 nella prima colonna della matrice identità sormontata da 0;

	x_1	$\downarrow$ $\hat{x}_2$	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$	
$-z$	0	5	0	1	0	5	$R'_0 \leftarrow R_0 + R'_1$
x_1	1	0	0	1	0	5	$R'_1 \leftarrow R_1$
?	0	1	0	1	1	6	$R'_2 \leftarrow R_2 + R'_1$
?	0	1	-2	0	0	2	$R'_3 \leftarrow R_3$

faccio entrare in base la variabile $\hat{x}_2$ (corrispondente a x_2) trasformando, con operazioni elementari, la colonna di $\hat{x}_2$ nella seconda colonna della matrice identità sormontata da 0;

	x_1	$\hat{x}_2$	$\downarrow$ x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$	
$-z$	0	0	0	-4	-5	-25	$R'_0 \leftarrow R_0 - 5R'_2$
x_1	1	0	0	1	0	5	$R'_1 \leftarrow R_1$
$\hat{x}_2$	0	1	0	1	1	6	$R'_2 \leftarrow R_2$
?	0	0	-2	-1	-1	-4	$R'_3 \leftarrow R_3 - R'_2$

faccio entrare in base la variabile x_3 trasformando, con operazioni elementari, la colonna di x_3 nella terza colonna della matrice identità sormontata da 0.

				$\downarrow$			
	x_1	$\hat{x}_2$	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$	
$-z$	0	0	0	-4	-5	-25	$R_0' \leftarrow R_0$
x_1	1	0	0	1	0	5	$R_1' \leftarrow R_1$
$\hat{x}_2$	0	1	0	1	1	6	$R_2' \leftarrow R_2$
$\leftarrow x_3$	0	0	1	$\boxed{1/2}$	$1/2$	2	$R_3' \leftarrow -1/2 R_3$

Il tableau è ora in **forma canonica** rispetto alla base $x_1, \hat{x}_2, x_3$, come richiesto. Inoltre la base proposta è **ammissibile**, essendo tutte le variabili della forma standard ≥ 0 e, quindi, possiamo partire con il simplesso.

<u>Iterazione 1</u>
Ci sono due variabili candidate a entrare in base (x_4 e x_5) e, applicando la regola di Bland, *entra in base* x_4.
Esce dalla base $\arg\min\left\{\frac{5}{1}, \frac{6}{1}, \frac{2}{1/2}\right\} = \arg\{4\} = x_3$
Eseguo quindi l'operazione di pivot sull'elemento cerchiato (riquatrato per motivi tipografici, ndr) nella tabella precedente, ottenendo:

					$\downarrow$		
	x_1	$\hat{x}_2$	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$	
$-z$	0	0	8	0	-1	-9	$R_0' \leftarrow R_0 + 4R_3'$
x_1	1	0	-2	0	-1	1	$R_1' \leftarrow R_1 - R_3'$
$\hat{x}_2$	0	1	-2	0	0	2	$R_2' \leftarrow R_2 - R_3'$
$\leftarrow x_4$	0	0	2	1	$\boxed{1}$	4	$R_3' \leftarrow 2R_3$

<u>Iterazione 2</u>
C'è una sola variabile candidata a entrare in base: *entra in base* x_5.
Esce dalla base $\arg\min\left\{X, X, \frac{4}{1}\right\} = \arg\{4\} = x_4$
Eseguo quindi l'operazione di pivot sull'elemento cerchiato (riquatrato per motivi tipografici, ndr) nella tabella precedente, ottenendo:

$$
\begin{array}{c|ccccc|c|l}
 & x_1 & \hat{x}_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \bar{b} & \\
\hline
-z & 0 & 0 & 10 & 1 & 0 & -5 & R_0' \leftarrow R_0 + R_3' \\
\hline
x_1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & R_1' \leftarrow R_1 + R_3' \\
\hat{x}_2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 2 & R_2' \leftarrow R_2 \\
x_5 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 4 & R_3' \leftarrow R_3 \\
\hline
\end{array}
$$

Non essendoci costi ridotti negativi, abbiamo raggiunto la condizione di arresto del simplesso per ottimalità della base trovata. Abbiamo quindi la soluzione ottima, per il problema in forma standard:

$$x_1 = 5, \hat{x}_2 = 2, x_5 = 4, x_3 = x_4 = 0 \qquad z_{MIN} = -(-5) = 5$$

Per il problema originario, la soluzione è:

$$x_1 = 5, x_2 = -2, x_3 = 0 \qquad z = -5$$

con il primo vincolo soddisfatto all'uguaglianza ($x_4 = 0$) e il secondo vincolo lasco ($x_5 > 0$). Per verifica, i valori della funzione obiettivo e il modo di soddisfazione dei vincoli possono essere controllati sostituendo i valori delle variabili nella formulazione originaria.

Esercizio 3

Scelta dell'algoritmo: anche se tutti i costi sono positivi, posso applicare solo l'algoritmo di Bellman-Ford che è l'unico che dia la possibilità di calcolare i cammini minimi con il massimo numero di archi. Infatti, è possibile dimostrare che, all'iterazione k dell'algoritmo, le etichette corrispondono ai cammini minimi che utilizzano al più k archi. Applicheremo quindi Bellman-Ford fermandoci alla quarta iterazione, dopo l'inizializzazione.

Applicazione dell'algoritmo: si utilizza una tabella che riporta una riga per ogni iterazione dell'algoritmo. Ogni colonna della tabella è dedicata ad un nodo e riporta, iterazione dopo iterazione, l'evoluzione delle rispettive etichette. L'ultima colonna riporta i nodi aggiornati nel corso dell'iterazione: all'iterazione successiva è sufficiente controllare solo gli archi uscenti da questi nodi.

iter.	n. 1	nodo 2	nodo 3	nodo 4	nodo 5	nodo 6	nodo 7	nodo 8	`Aggior.`
init.	$0_{(\wedge)}$	$+\infty_{(\wedge)}$	$+\infty_{(\wedge)}$	$+\infty_{(\wedge)}$	$+\infty_{(\wedge)}$	$+\infty_{(\wedge)}$	$+\infty_{(\wedge)}$	$+\infty_{(\wedge)}$	1
$h = 1$	$0_{(\wedge)}$	$+\infty_{(\wedge)}/1_{(1)}$	$+\infty_{(\wedge)}/5_{(1)}$	$+\infty_{(\wedge)}/2_{(1)}$	$+\infty_{(\wedge)}$	$+\infty_{(\wedge)}$	$+\infty_{(\wedge)}$	$+\infty_{(\wedge)}$	$2, 3, 4$
$h = 2$	$0_{(\wedge)}$	$1_{(1)}$	$5_{(1)}/3_{(4)}$	$2_{(1)}$	$+\infty_{(\wedge)}/7_{(3)}$	$+\infty_{(\wedge)}/7_{(4)}$	$+\infty_{(\wedge)}/10_{(2)}$	$+\infty_{(\wedge)}/9_{(3)}$	$7, 5, 8, 3, 6$
$h = 3$	$0_{(\wedge)}$	$1_{(1)}$	$3_{(4)}$	$2_{(1)}$	$7_{(3)}/5_{(3)}$	$7_{(4)}$	$10_{(2)}$	$9_{(3)}/8_{(5)}/7_{(3)}$	$8, 5$
$h = 4$	$0_{(\wedge)}$	$1_{(1)}$	$3_{(4)}$	$2_{(1)}$	$5_{(3)}$	$7_{(4)}/6_{(5)}$	$10_{(2)}/9_{(8)}$	$7_{(3)}/6_{(5)}$	$7, 6, 8$

Le etichette di una riga sono ottenute controllando i vincoli duali su tutti gli archi uscenti dai nodi "aggiornati" della riga (iterazione) precedente secondo la regola

`if` $\pi_j > \pi'_i + c_{ij}$ `then` $\pi_j = \pi'_i + c_{ij}$ `and` $p(j) = i$

dove (i, j) è uno degli archi uscenti da un nodo i aggiornato all'iterazione precedente, π_j è l'etichetta corrente (sulla riga corrente) del nodo j, π'_i è l'etichetta del nodo i all'iterazione (riga) *precedente* e c_{ij} è il costo dell'arco (i, j). Nella tabella indico in rosso (anziché sbarrate perché non riesco a farlo in LaTeX, ndr) le etichette che sono migliorate durante la stessa iterazione [1].

Si fa notare che, grazie al fatto di utilizzare l'etichetta del nodo i all'iterazione precedente negli aggiornamenti, all'iterazione h garantiamo di considerare lunghezze di cammini con al più h archi. Ad esempio, per ottenere le etichette all'iterazione con $h = 4$, partendo dal nodo 8, la cui etichetta valeva 7 all'iterazione precedente, si aggiorna il nodo 7 al valore 9 ($10 > 7 + 2 = 9$) e non al valore $6 + 2 = 8$ (il valore 6 è relativo all'iterazione corrente e non a quella precedente e, infatti, l'etichetta 8 per il nodo 7 è ottenibile con 5 archi e non con 4).

Un cammino minimo con al massimo 4 archi da 1 a 7: seguo la catena dei predecessori a partire dal nodo 7 sulla riga con $h = 4$ e, ad ogni passo, considero la riga precedente (con h diminuito di 1). Ottengo $7 \leftarrow 8 \leftarrow 3 \leftarrow 4 \leftarrow 1$, cioè il cammino di 4 archi $1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 7$ il cui costo è effettivamente 9.

Esercizio 4

Prima di tutto, come richiesto, enunciare le condizioni complementarietà primale-duale, ad esempio fissando una forma per il problema primale [vedi enunciato del Teorema 5 delle dispense sulla dualità e le condizioni estese ai singoli vincoli, come alla fine di pagina 18 e/o all'inizio di pagina 19 delle stesse dispense].

Procediamo con la verifica dell'ottimalità della soluzione data per il problema di programmazione lineare proposto.

1. *Verifica dell'ammissibilità primale della soluzione data*:
   $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 + 12 - 8 = 4$ (OK)
   $x_1 + x_2 = 0 + 4 \leq 4$ (OK)
   $0 \leq 0, 4 \geq 0, 8 \geq 0$ (domini OK)

2. *Passaggio al duale*:

$$\begin{array}{llcccl}
\min & 4u_1 & + & 4u_2 & & \\
\text{s.t.} & 2u_1 & + & u_2 & \leq & 1 \\
 & 3u_1 & + & u_2 & \geq & 1 \\
 & -u_1 & + & & \geq & 0 \\
 & u_1 & & & & \text{libera} \\
 & & & u_2 & \geq & 0
\end{array}$$

[1] Le etichette sbarrate [in rosso, ndr] dipendono dall'ordine in cui si controllano gli archi che escono dai nodi aggiornati. Le etichette finali [in nero, ndr] invece devono essere le stesse, indipendentemente dall'ordine di controllo.

3. Applicazione delle condizioni:

- Il primo vincolo primale è di uguaglianza: non ci sono condizioni di complementarietà con la relativa variabile duale u_1
- $u_2(x_1 + x_2 - 4) = 0 \rightarrow u_2(0) = 0 \rightarrow //$

- $(2u_1 + u_2 - 1)x_1 = 0 \rightarrow (2u_1 + u_2 - 1)0 = 0 \rightarrow //$
- $(3u_1 + u_2 - 1)x_2 = 0 \rightarrow (3u_1 + u_2 - 1)4 = 0 \rightarrow 3u_1 + u_2 - 1 = 0$ (prima condizione)
- $(-u_1 - 0)x_3 = 0 \rightarrow (-u_1)8 = 0 \rightarrow u_1 = 0$ (seconda condizione)

Mettiamo a sistema le due condizioni trovate:

$$\begin{cases} 3u_1 + u_2 - 1 = 0 \\ u_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_2 = 1 \\ u_1 = 0 \end{cases}$$

La soluzione duale trovata:

- soddisfa i tre vincoli duali ($2u_1 + u_2 = 1 \leq 1$, $3u_1 + u_2 = 1 \geq 1$, $-u_1 = 0 \geq 0$);
- soddisfa i vincoli di dominio (u_1 libera, $u_2 = 1 \geq 0$)
- è in scarti complementari con la soluzione primale data (per costruzione).

Pertanto, le due soluzioni sono ottime per i rispettivi problemi primale e duale.

[Per verifica, i valori delle funzioni obiettivo sono uguali: $x_1 + x_2 = 4u_1 + 4u_2 = 4$, il ché verifica il Corollario 2 della dualità (all'ottimo, i valori delle funzioni obiettivo primale e duale coincidono).]

Esercizio 5

(a)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
$-z$	-12	0	0	0	-147	-239
x_3	$\boxed{75}$	0	1	0	-12	0
x_4	46	0	0	1	$\boxed{1}$	4/3
$\leftarrow x_2$	$\boxed{13}$	1	0	0	0	0

La regola di Bland impone il pivot sull'elemento "13" (entra in base x_1 che ha indice minore di x_5 e esce dalla base x_2 che ha indice minore di x_3).

(b) Il valore della funzione obiettivo rimane invariato in quanto si tratta di un'iterazione *degenere* del simplesso, visto che il minimo rapporto $\theta = 0$. Di conseguenza, il miglioramento atteso per la funzione obiettivo è $-12\theta = 0$.

(c) Anche se cambia la base corrente, non cambia il vertice del poliedro associato alla nuova base. Infatti, i nuovi valori delle variabili in base sono $x_2 = \theta = 0$, $x_3 = 0 - 75\theta = 0$ e $x_4 = 4/3 - 46\theta = 4/3$. Si passa quindi dalla soluzione base degenere $x_3 = 0, x_4 = 4/3, x_2 = 0$ ($x_1 = x_5 = 0$ fuori base) alla soluzione di base sempre degenere $x_3 = 0, x_4 = 4/3, x_1 = 0$ ($x_2 = x_5 = 0$ fuori base), che rappresenta lo stesso vertice del poliedro ammissibile.

Esercizio 6

Si consiglia di riportare i passi dell'algoritmo di Dijkstra e, quindi, discuterne la complessità come fatto nelle dimostrazione della Proprietà 10 alla fine del paragrafo 6.1 delle dispense sugli algoritmi per problemi di cammino minimo. Quindi si può approfondire con qualche dettaglio sull'influenza della scelta di opportune strutture dati per migliorare l'efficienza, come dal paragrafo 6.2 delle stesse dispense.