Programmazione a numeri interi: il metodo del Branch and Bound

L. De Giovanni G. Zambelli

Un *problema di programmazione lineare intera* è una problema della forma

$$\begin{aligned} z_I = \max c^T x & \\ Ax \leq b & \\ x \geq 0 & \\ x_i \in \mathbb{Z}, & \qquad i \in I. \end{aligned} \tag{1}$$

ove $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ e $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ è l'insieme degli indici delle *variabili intere*. Le variabili x_i, $i \notin I$ sono invece dette *variabili continue*. Se il problema ha sia variabili intere che variabili continue, allora è detto un *problema di programmazione lineare intera mista*, mentre se tutte le variabili sono intere, il problema è detto di *programmazione lineare intera pura*.

L'insieme

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b,\ x \geq 0,\ x_i \in \mathbb{Z} \text{ per ogni } i \in I\}$$

é la *regione ammissibile* del problema.

$$\begin{aligned} z_L = \max c^T x & \\ Ax \leq b & \\ x \geq 0 & \end{aligned} \tag{2}$$

é detto il *rilassamento lineare* di (1).

Si noti il seguente facile fatto:

$$z_I \leq z_L. \tag{3}$$

Infatti, se x^I è la soluzione ottima di (1) e x^L è la soluzione ottima di (2), allora x^I soddisfa i vincoli di (2), e dunque $z_I = c^T x^I \leq c^T x^L = z_L$.

1 Branch and Bound

Il metodo più comune per risolvere problemi di programmazione lineare è il metodo cosiddetto di *Branch and Bound*. Il metodo si basa sulla seguente semplice osservazione:

Data una partizione della regione ammissibile X in insiemi $X_1, \ldots, X_n$, sia $z_I^{(k)} = \max\{c^T x \mid x \in X_k\}$. Allora

$$z_I = \max_{k=1,\ldots,n} z_I^{(k)}.$$

Dunque il metodo di Branch and Bound procede partizionando X in sottoinsiemi più piccoli, e risolvendo il problema $\max c^T x$ su ogni sotto-insieme. Questo viene fatto ricorsivamente, dividendo a loro volta le regioni ammissibili dei sotto-problemi in sottoinsiemi. Se tale ricorsione venisse svolta completamente, alla fine enumereremmo tutte le possibili soluzioni intere del problema. Questo ovviamente presenta due problemi: prima di tutto, se il problema ha infinite soluzioni l'enumerazione completa non è possibile, e anche se la regione ammissibile contenesse un numero finito di punti, tale numero potrebbe essere esponenzialmente grande, e quindi enumerare richiederebbe un tempo eccessivo.

L'algoritmo di Branch and Bound cerca di esplorare solo aree promettenti della regione ammissibile, mantenendo upper e lower bounds al valore ottimo della soluzione in una certa area, e cercando di utilizzare tali bounds per escludere a priori certi sotto-problemi.

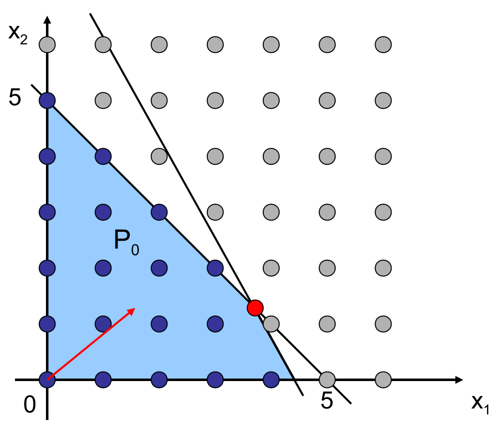
Esponiamo il metodo con un esempio.

Esempio.

Si consideri il problema (P_0):

$$\begin{array}{rrcl}
z_I^0 = \max & 5x_1 + \frac{17}{4}x_2 & & \\
& x_1 + x_2 & \leq & 5 \\
& 10x_1 + 6x_2 & \leq & 45 \qquad (P_0) \\
& x_1, x_2 & \geq & 0 \\
& x_1, x_2 & \in & \mathbb{Z}
\end{array}$$

La regione ammissibile di (P_0) e del suo rilassamento lineare è rappresentato nella figura successiva.

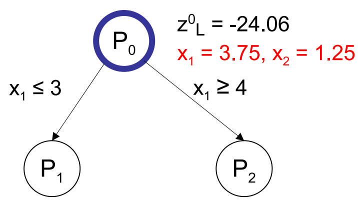


Risolvendo il rilassamento lineare di (P_0), otteniamo la soluzione ottima $x_1 = 3.75$, $x_2 = 1.75$, con valore $z_L^0 = 24.06$.

Dunque abbiamo ottenuto un upper bound per il valore ottimo z_I^0 di (P_0), ovvero $z_I^0 \leq 24. - 6$. Ora, poiché in una soluzione ottima di (P_0) x_1 avrà valore intero, allora la soluzione ottima soddisferà $x_1 \leq 3$ oppure $x_1 \geq 4$. Dunque la soluzione ottima di (P_0) sarà la soluzione migliore tra le due soluzioni dei problemi (P_1) e (P_2) così definiti:

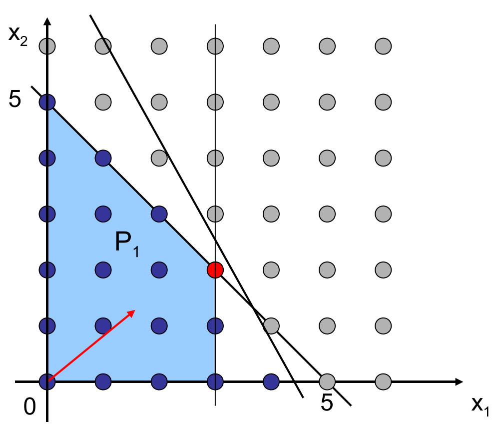
$$
\begin{array}{rrcl}
z_I^1 = \max & 5x_1 + \frac{17}{4}x_2 & & \\
& x_1 + x_2 & \leq & 5 \\
& 10x_1 + 6x_2 & \leq & 45 \\
& x_1, & \leq & 3 \\
& x_1, x_2 & \geq & 0 \\
& x_1, x_2 & \in & \mathbb{Z}
\end{array}
\quad (P_1) \quad , \quad
\begin{array}{rrcl}
z_I^2 = \max & 5x_1 + \frac{17}{4}x_2 & & \\
& x_1 + x_2 & \leq & 5 \\
& 10x_1 + 6x_2 & \leq & 45 \\
& x_1, & \geq & 4 \\
& x_1, x_2 & \geq & 0 \\
& x_1, x_2 & \in & \mathbb{Z}
\end{array}
\quad (P_2)
$$

Diremo che abbiamo fatto *branching sulla variabile* x_1. Si noti che in questo modo la soluzione $(3.75, 1.25)$ non appartiene al rilassamento lineare di (P_1) o (P_2). Possiamo rappresentare graficamente i sotto-problemi e i rispettivi bounds mediante un albero, detto albero di Branch-and-Bound.



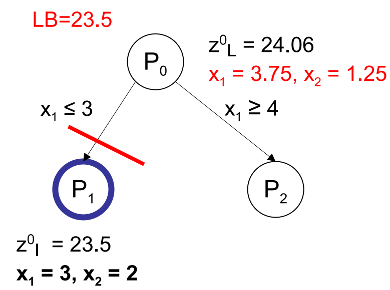
I *problemi attivi* sono le foglie dell'albero, nella fattispecie (P_1) e (P_2).

Consideriamo il problema (P_1), rappresentato in figura.

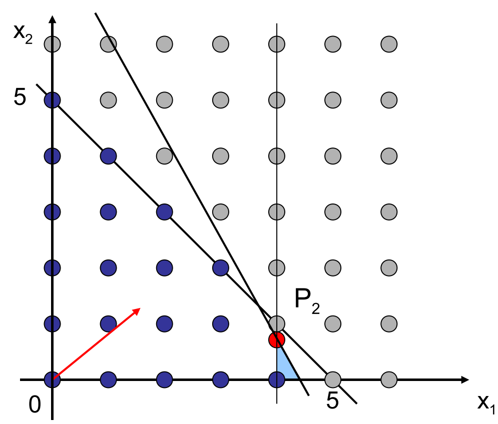


La soluzione ottima del rilassamento lineare di (P_1) è $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, con valore $z_L^1 = 23.5$. Si noti che tale soluzione è intera, e dunque, poiché $z_I^1 \leq z_L^1$, in tal caso $(3, 2)$ è anche la soluzione ottima intera. Dunque non occorre fare ulteriore branching per il nodo (P_1), che può dunque essere potato. Diciamo che (P_1) è *potato per ottimalità*. Si noti inoltre che la soluzione ottima di (P_0) avrà valore $z_I^0 \geq z_I^1 = 23.5$. Dunque $LB = 23.5$ è un lower-bound al valore ottimo, e $(3,2)$ è la *soluzione intera corrente*, ovvero la miglior soluzione intera trovata fino a questo punto.

L'albero di Branch-and-Bound è ora il seguente. L'unica foglia non potata è $(P2)$ che

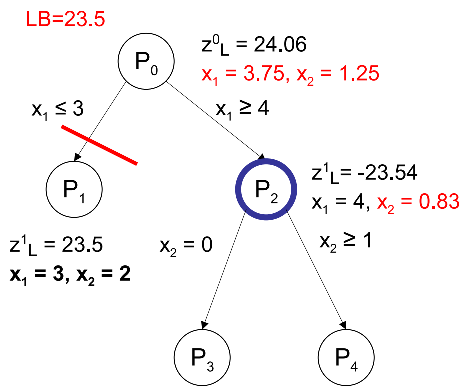


è l'unico problema attivo, ed è rappresentato nella figura successiva.

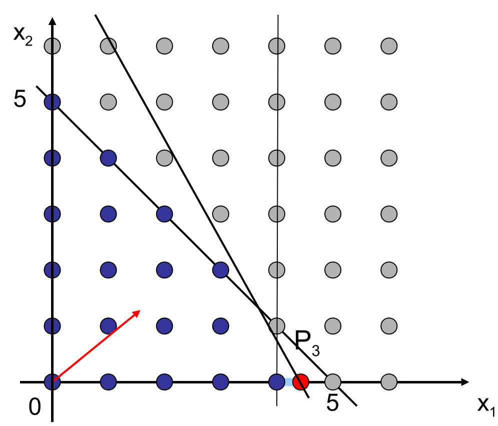


La soluzione ottima del rilassamento lineare di (P_2) è $x_1 = 4$, $x_2 = 0.83$, con valore $z_L^2 = 23.54$. Dunque $z_I^2 \leq 23.54$, e dunque 23.54 è un upper-bound al valore ottimo di (P_2). Si noti che $LB = 23.5 < 23.54$, dunque (P_1) potrebbe avere soluzione migliore della soluzione intera corrente. Poiché la componente x_2 della soluzione ottima di (P_2) ha valore 0.83, facciamo branching su x_2, ottenendo i seguenti due sotto-problemi (P_3) e (P_4) di (P_2).

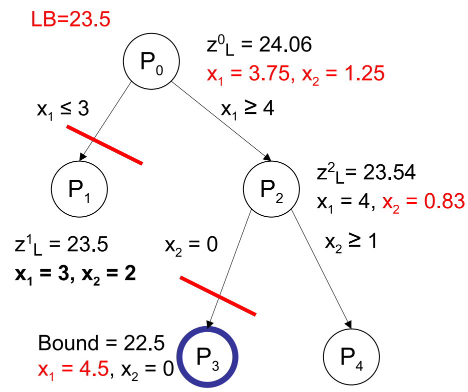
$$
\begin{array}{lrcl}
z_I^2 = \max & 5x_1 + \frac{17}{4}x_2 & & \\
 & x_1 + x_2 & \leq & 5 \\
 & 10x_1 + 6x_2 & \leq & 45 \\
 & x_1, & \geq & 4 \\
 & x_2, & \leq & 0 \\
 & x_1, x_2 & \geq & 0 \\
 & x_1, x_2 & \in & \mathbb{Z}
\end{array}
\quad (P_3) \quad , \quad
\begin{array}{lrcl}
z_I^2 = \max & 5x_1 + \frac{17}{4}x_2 & & \\
 & x_1 + x_2 & \leq & 5 \\
 & 10x_1 + 6x_2 & \leq & 45 \\
 & x_1, & \geq & 4 \\
 & x_2, & \geq & 1 \\
 & x_1, x_2 & \geq & 0 \\
 & x_1, x_2 & \in & \mathbb{Z}
\end{array}
\quad (P_4)
$$



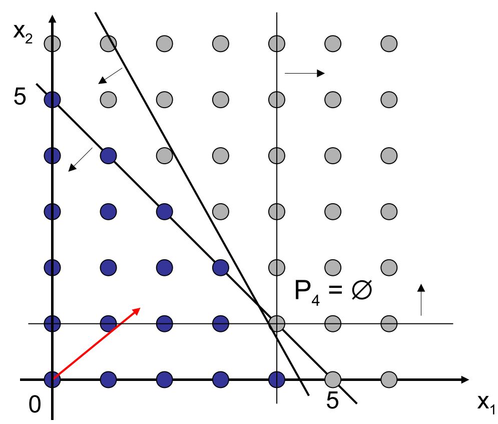
L'albero di Branch-and-Bound è ora il seguente.
I nodi attivi sono ($P3$) e (P_4). Risolviamo il rilassamento lineare di (P_3) (rappresentato in figura),



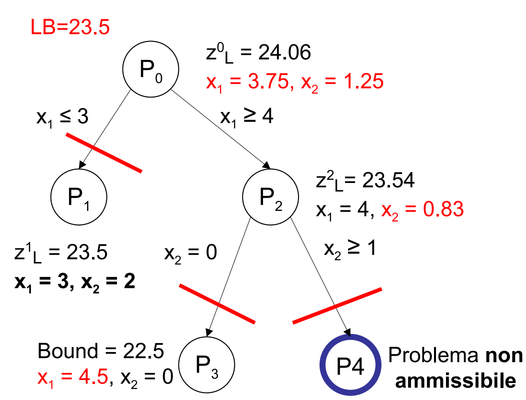
ottenendo soluzione ottima è $x_1 = 4.5$, $x_2 = 0$, con valore $z_L^3 = 22.5$. Dunque la soluzione ottima intera di (P_3) avrà valore $z_I^3 \leq 22.5$, ma poiché abbiamo già determinato una soluzione ottima intera con valore 23.5, è inutile esplorare ulteriormente la regione ammissibile di (P_3) poiché sappiamo che non vi sarà nessuna soluzione intera di valore maggiore di $22.5 < 23.5$. Possiamo dunque *potare il nodo* (P_3) *per bound*. L'albero di Branch-and-Bound corrente, rappresentato nella figura successiva, contiene un unico problema attivo, ovvero (P_4).



Risolvendo il rilassamento lineare di (P_4), si determina che tale rilassamento non ha alcuna soluzione ammissibile, e dunque (P_4) non ha neppure soluzioni intere.



Possiamo dunque *potare il nodo* (P_4) *per inammissibilità*. L'albero di Branch-and-Bound corrente, rappresentato nella figura successiva, non ha alcun problema attivo, e dunque la soluzione intera corrente è la migliore possibile. Dunque $(3, 2)$ è la soluzione ottima di (P_0)



In quanto segue, esponiamo il metodo di Branch-and-Bound in maniera formale. Vogliamo risolvere il problema (P_0)

$$\begin{aligned} z_I = \max c^T x & \\ Ax \le b & \\ x \ge 0 & \\ x_i \in \mathbb{Z}, & \qquad i \in I. \end{aligned}$$

ove I come al solito è l'insieme di indici delle variabili intere.

L'algoritmo manterrà un lower-bound LB sul valore ottimo z_I e manterrà la miglior soluzione ammissibile x^* per (P_0) trovata fino a questo punto (e dunque $x_i^* \in \mathbb{Z}$ per ogni $i \in I$, e $c^T x^* = LB$). Il metodo manterrà un albero di Branch-and-Bound $\mathcal{T}$ in cui le foglie non potate sono i *nodi attivi*. Denoteremo con ℓ l'indice massimo di un nodo (P_i) nell'albero di Branch-and-Bound.

Metodo di Branch-and-Bound

Inizializzazione: $\mathcal{T} := \{(P_0)\}$, $\ell := 0$, $LB := -\infty$, x^* non definita;

1. Se esiste un nodo attivo in $\mathcal{T}$, scegli un nodo attivo (P_k), altrimenti ritorna la soluzione ottima x^*, STOP;
2. Risolvi il rilassamento lineare di (P_k), determinando o una soluzione ottima $x^{(k)}$, di valore $z_L^{(k)}$, oppure che il rilassamento lineare di (P_k) è inammissibile.
   (a) Se il rilassamento lineare di (P_k) è inammissibile: pota (P_k) da $\mathcal{T}$ (*potatura per inammissibilità*);
   (b) Se $z_L^{(k)} \le LB$, allora (P_k) non può avere soluzioni migliori di quella corrente x^*: pota (P_k) da $\mathcal{T}$ (*potatura per bound*);
   (c) Se $x_i^{(k)} \in \mathbb{Z}$ per ogni $i \in I$, allora $x^{(k)}$ è una soluzione ottima per (P_k) (ed ammissibile per (P_0)), dunque
      - Se $c^T x^{(k)} > LB$, poni $x^* := x^{(k)}$ e $LB := c^T x^{(k)}$;
      - Pota (P_k) da $\mathcal{T}$ (*potatura per ottimialità*);
3. Se nessuno dei casi (a), (b), (c) si verifica, allora scegli un indice $h \in I$ tale che $x_h^{(k)} \notin \mathbb{Z}$, fai branching sulla variabile x_h, ponendo come figli di (P_k) in $\mathcal{T}$ i problemi

$$(P_{\ell+1}) := (P_\ell) \cap \{x_h \le \lfloor x_h^{(k)} \rfloor\} \quad , \quad (P_{\ell+2}) := (P_\ell) \cap \{x_h \ge \lceil x_h^{(k)} \rceil\}$$

Poni $\ell := \ell + 2$, torna ad 1.

Vi sono una miriade di dettagli fondamentali per rendere efficiente un metodo di Branch-and-Bound. Ci soffermiamo su due aspetti.

Scelta del nodo attivo Ci sono svariati obiettivi contrastanti che concorrono alla scelta del nodo attivo:

(*i*) Chiaramente, è fondamentale essere in grado di potare il maggior numero possibile di nodi, in modo da dover risolvere pochi sotto-problemi. A questo fine, è importante giungere il prima possibile ad una qualche soluzione intera, in modo da avere un lower bound. Questo suggerisce l'utilizzo di una strategia di *Depth-First Search*.

(*ii*) Per evitare di visitare nodi dove non vi siano buone soluzioni intere, una strategia è invece quella di scegliere un nodo attivo (P_k) con upper-bound z_L^k più grande possibile, ovvero $z_L^k = \max_t z_L^t$ ove il massimo è preso tra gli indici dei nodi attivi. In tal modo, siamo sicuri di non dividere un nodo il cui upper bound z_L^k è minore dell'ottimo valore z_I di (P_0). Questa è una strategia di *Best-Node*.

Scelta della variabile di branching Anche in questo caso, vi sono svariate strategie applicabili. Una strategia comune è quella di scegliere come variabile di branching quella *più frazionaria*. Ovvero, posto[1] $f_i = x_i^{(k)} - \lfloor x_i^{(k)} \rfloor$, scegliamo $h \in I$ tale che

$$h = \arg\min_{i \in I} \{\min\{f_i, 1 - f_i\}\}.$$

[1]Dato un numero a denotiamo con $\lfloor a \rfloor$ l'arrotondamento per difetto di a, ovvero $\lfloor a \rfloor$ è l'intero minore o uguale ad a più vicino ad a stesso.