# Ricerca Operativa

2. Modelli di Programmazione Lineare

## Modelli di programmazione lineare

- Il metodo grafico è basato su
  - $\Rightarrow$ linearità della funzione obiettivo
  - $\Rightarrow$ linearità dei vincoli
- Sotto queste ipotesi (come vedremo meglio in seguito), una soluzione si trova su un vertice della regione ammissibile: l'ultimo toccato traslando le rette isoprofitto nella direzione del gradiente
- Si parla in questi casi di modelli di programmazione lineare (PL)

# Formulazione generale di un modello di programmazione lineare

$min\ (max)\ z = c_1x_1+ c_2x_2+ \ldots+c_jx_j+\ldots+ c_nx_n(+cost.)$

*subject to* (*s.t., soggetto a, s.a*)

$a_{11}x_1+ a_{12}x_2+ \ldots+a_{1j}x_j+\ldots+ a_{1n}x_n \geq (=, \leq)\ b_1$

$a_{21}x_1+ a_{22}x_2+ \ldots+a_{2j}x_j+\ldots+ a_{2n}x_n \geq (=, \leq)\ b_2$

$\ldots$

$a_{m1}x_1+ a_{m2}x_2+ \ldots+a_{mj}x_j+\ldots+ a_{mn}x_n \geq (=, \leq)\ b_m$

$x_j \in \Re_{(+)}$ ($x_j$ intere)

$z$ : funzione obiettivo da minimizzare (min) o massimizzare (max)

$x_j$ : variabili decisionali (incognite)

- reali (eventualmente non negative)
- intere (eventualmente non negative)
- binarie ($x_j \in \{0,1\}$)

} Programmazione lineare intera (PLI)

$c_j$ : coefficienti di costo (min) o profitto (max)

$a_{ij}$ : coefficienti tecnologici

$b_i$ : termini noti



# Dieta economica

Un dietologo deve preparare una dieta che garantisca un apporto giornaliero di proteine, ferro e calcio di almeno 20 mg, 30 mg e 10 mg, rispettivamente. Il dietologo è orientato su cibi a base di verdura (5 mg/kg di proteine, 6 mg/Kg di ferro e 5 mg/Kg di calcio, al costo di 4 €/Kg), carne (15 mg/kg di proteine, 10 mg/Kg di ferro e 3 mg/Kg di calcio, al costo di 10 €/Kg) e frutta (4 mg/kg di proteine, 5 mg/Kg di ferro e 12 mg/Kg di calcio, al costo di 7 €/Kg). Determinare la dieta di costo minimo.

# Modello PLI

- Siano $x_1$, $x_2$ e $x_3$ le quantità di cibi a base di verdura, carne e frutta, rispettivamente

$$
\begin{array}{lll}
\min & 4\,x_1+10\,x_2+7\,x_3 & \text{(costo giornaliero dieta)} \\
s.t. & & \\
& 5x_1+15x_2+4x_3 \geq 20 & \text{(proteine)} \\
& 6x_1+10x_2+5x_3 \geq 30 & \text{(ferro)} \\
& 5x_1+3x_2+12x_3 \geq 10 & \text{(calcio)}
\end{array}
$$

$$x_i \in \Re_+, \;\; \forall i \in \{1, 2, 3\}$$



# Indagine di mercato

Un'azienda pubblicitaria deve svolgere un'indagine di mercato per lanciare un nuovo prodotto. Si deve contattare telefonicamente un campione significativo di persone: almeno 150 donne sposate, almeno 110 donne non sposate, almeno 120 uomini sposati e almeno 100 uomini non sposati. Le telefonate possono essere effettuate al mattino (al costo operativo di 1.1 euro) o alla sera (al costo di 1.6 euro). Le percentuali di persone mediamente raggiunte sono riportate in tabella.

| | Mattino | Sera |
|---|---|---|
| Donne sposate | 30% | 30% |
| Donne non sposate | 10% | 20% |
| Uomini sposati | 10% | 30% |
| Uomini non sposati | 10% | 15% |
| Nessuno | 40% | 5% |

Si noti come le telefonate serali sono più costose, ma permettono di raggiungere un maggior numero di persone: solo il 5% va a vuoto. Si vuole minimizzare il costo complessivo delle telefonate da effettuare (mattina/sera) in modo da raggiungere un campione significativo di persone

# Modello PLI

- Siano $x_1$ e $x_2$ il numero di telefonate da fare al mattino e alla sera, rispettivamente

$$
\begin{array}{lll}
\min & 1.1\, x_1 + 11.6\, x_2 & \text{(costo totale telefonate)} \\
s.t. & & \\
& 0.3x_1 + 0.3x_2 \geq 150 & \text{(donne sposate)} \\
& 0.1x_1 + 0.2x_2 \geq 110 & \text{(donne non sposate)} \\
& 0.1x_1 + 0.3x_2 \geq 120 & \text{(uomini sposati)} \\
& 0.1x_1 + 0.15x_2 \geq 100 & \text{(uomini non sposati)}
\end{array}
$$

$$x_i \in Z_+, \ \forall i \in \{1, 2\}$$

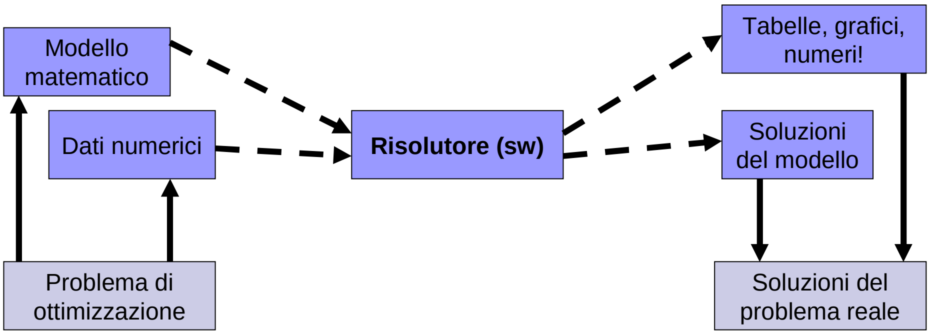


# Soluzione dei modelli

- Risolutore di Excel
- Software di ottimizzazione
  - Linguaggi di modellazione matematica (AMPL, Mosel, OPL, Lingo, GAMS etc.)
  - Motori di ottimizzazione (Cplex, Xpress, GPLK, LPsolve etc.)
- Importante disporre di un buon modello matematico: considereremo modelli di programmazione lineare (PL)

# Utilizzo di solver

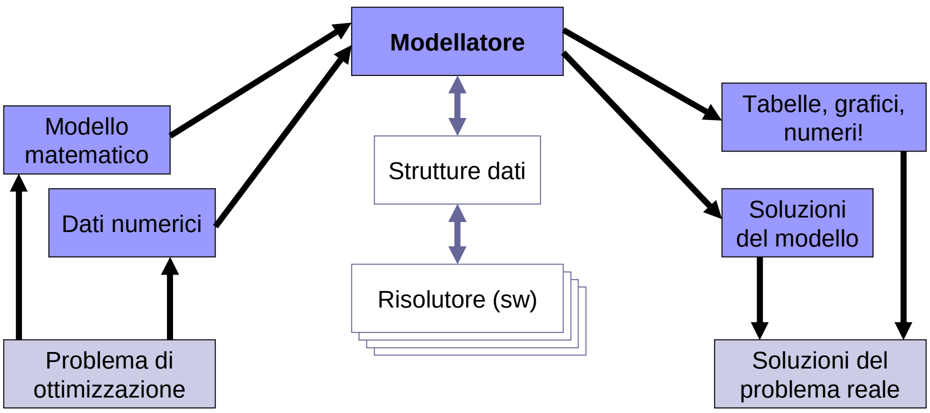
Un **solver** (o risolutore) è un software che riceve in input una descrizione di un problema di ottimizzazione e produce in output la soluzione ottima del modello e informazioni ad essa collegate.






# Ruolo dei modellatori

Un **modellatore** fornisce un'interfaccia verso un risolutore.



# Obiettivi dei modellatori

- Disporre di un **linguaggio** semplice:
  - ad alto livello;
  - simile a quello di modellazione (linguaggio matematico);
  - formalmente strutturato;
  - possibilità di commenti.
- Mantenere la **separazione tra modello e dati** del problema: per cambiare l'istanza basta cambiare i dati, non il modello.
- Dialogare con **diversi solver** (strutture di I/O standardizzate).
- Linguaggio per script.



# Possibili configurazioni

**Modellatori**:
- Foglio elettronico
- AMPL
- Mosel
- Lingo
- …

**Solver**:
- Risolutore per fogli elettronici
- Cplex (PL, PLI)
- XPress
- Minos (PNL)
- Lindo (motore di ottimizzazione)
- GPLK (librerie di ottimizzazione)
- Lp_solve
- …