Molteplicità delle logiche e necessità delle traduzioni. Logica intuizionistica e logica classica a confronto

Giovanni Sambin*†

1 La Rivoluzione di Brouwer.

Nel mare di incertezze che è la vita, la specie umana, come tutte, è sempre alla ricerca di stabilità. Ogni fonte di sicurezza è vista con entusiasmo e protetta con cura.

La logica ha svolto per millenni una funzione importante in questa direzione. Nelle *quaestiones* sulla verità astratta e la correttezza delle deduzioni c'era la certezza assoluta che logica e verità coincidessero.

Il ventesimo secolo ha messo in dubbio questa fiducia assoluta nella logica. Come accadde in tanti campi del sapere e dell'arte (Einstein e la relatività in fisica, Schönberg e la dodecafonia in musica, Picasso e l'astrattismo in pittura,...), l'inizio del Novecento segnò un periodo di svolta anche in logica. Così, se il 2006 è il centenario della nascita di Gödel, il 2007 è il centenario della dichiarazione della crisi e della rivoluzione della logica. Nel 1907 L. E. J. Brouwer nella sua tesi di dottorato, e ancor più esplicitamente l'anno successivo in un breve articolo (*De onbetrouwbaarheid der logiche principes*, L'inaffidabilità dei principi logici, 1908), apre gli occhi di chi vuol vedere, e le porte a chi vuole entrare in un mondo del tutto inaspettato: quello della molteplicità delle logiche.

L'osservazione di Brouwer è, in una prospettiva storica, addirittura ovvia: se la logica classica ben si adatta a strutture finite, in cui la verità di una proposizione può essere decisa con la "semplice osservazione", questo cessa di essere corretto per le strutture infinite, come gli insiemi introdotti da Cantor in matematica pochi anni prima.

Come Brouwer osserva, quando il dominio degli oggetti è infinito, anche per una proprietà P che sia decidibile su ogni specifico oggetto, ci si può trovare nella situazione in cui da un lato non si sa mostrare che tutti gli oggetti soddisfano la negazione di P, e dall'altro non si sa nemmeno trovare un oggetto specifico che la soddisfi: questo infatti richiederebbe una osservazione su tutto il dominio infinito, cosa umanamente impossibile. Utilizzando la

*Dipartimento di Matematica Pura e Applicata, Università di Padova.

†Ringrazio mia moglie Silvia per l'aiuto morale, intellettuale e materiale, senza il quale questo articolo forse non avrebbe mai visto una fine.

simbologia della logica formale, non si conosce la verità di $\forall x \neg P(x)$, ma nemmeno quella di $\exists x P(x)$. Dato che $\forall x \neg P(x)$ equivale a $\neg \exists x P(x)$, ci si può quindi trovare nella situazione in cui non possiamo dire che $\exists x P(x) \vee \neg \exists x P(x)$ sia vero. Brouwer conclude che alcuni principi logici, *in primis* il principio del terzo escluso, secondo cui $A \vee \neg A$ è vera qualsiasi sia la proposizione A, non sono affidabili.

La critica di Brouwer non mira a dimostrare che il principio del terzo escluso è *sempre* falso. Questo sarebbe davvero insensato: se A è una proposizione di cui si conosce il valore di verità, come $7+5=12$ e $7+5=13$, oppure se A è decidibile, come "L'Italia ha vinto i mondiali di calcio del 1986", allora chiaramente vale $A \vee \neg A$. Brouwer non ritiene invece che $A \vee \neg A$ sia sempre vero *solo* in virtù della sua forma logica. Quando egli parla di inaffidabilità si basa su una interpretazione severa delle costanti logiche.

Nella logica proposta da Brouwer, chiamata intuizionistica, conoscere $\exists x P(x)$ come vera significa essere in grado, almeno idealmente, di produrre un individuo specifico d del dominio di quantificazione D per cui $P(d)$ è vera. E similmente, conoscere la verità di $A \vee B$ significa, almeno idealmente, sapere che vale A oppure sapere che vale B.

Un esito della critica di Brouwer è che il principio del terzo escluso, e altri principi ad esso equivalenti come il principio della doppia negazione $\neg\neg AA$ o il principio di prova per casi $(A \to B)$ & $(\neg A \to B) \to B$, non sono verità incontrovertibili, ma dipendono dall'interpretazione assegnata alle costanti logiche $\vee$, $\neg$, $\exists$, ecc.

È proprio sulla interpretazione delle costanti logiche che si basa la reazione, esplicita o implicita, della maggioranza dei logici e dei matematici, tra cui principalmente Hilbert. Per poter conservare la validità universale e incondizionata del principio del terzo escluso, ci si deve arrendere ed ammettere che la verità di una proposizione è assoluta, cioè indipendente dalla nostra capacità di provarla. Solo assumendo che la verità esista di per sé, anche quando è umanamente inaccessibile, si può pensare che una proposizione esistenziale possa essere vera anche quando non abbiamo modo di trovare un individuo che la convalidi. Solo assumendo che la verità esista di per sé, si può pensare di dimostrare una disgiunzione senza saper indicare quale dei due disgiunti sia vero.

La critica di Brouwer ha quindi apportato un decisivo chiarimento: per poter estendere la validità della logica classica dal finito all'infinito, la verità di una proposizione deve essere concepita come un assoluto in sé e per sé, indipendentemente dal fatto che un soggetto sia in grado di coglierla o meno.

Questo ha un impatto concreto nel modo di fare matematica e un esempio, tra i molti possibili, può illustrarlo. La fondazione usualmente adottata dai matematici è la teoria assiomatica degli insiemi chiamata ZFC, che prende nome da Zermelo, Fraenkel e dal fatto che si assume l'assioma di scelta (Choice in inglese). In ZFC si definisce l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali (tramite le sezioni di Dedekind sui numeri razionali, o altri metodi classicamente equivalenti) che esprime il concetto della retta continua. Usando l'assioma di scelta, Zermelo dimostrò che l'insieme $\mathbb{R}$ ammette un buon ordinamento, cioè esiste un ordine lineare di $\mathbb{R}$ che gode anche della proprietà per cui ogni sottoinsieme ha un primo elemento.

Non è facile visualizzare un buon ordinamento di $\mathbb{R}$. E questo per una semplice ragione: in oltre cent'anni non ne è stato mostrato nemmeno uno! Quindi l'approccio classico accetta l'esistenza di un oggetto (nel caso specifico: la relazione di ordine) con una certa proprietà, anche se sa che non è in grado di esibirlo. La matematica d'oggi abbonda di esempi simili.

Molti ritengono che la causa di questa situazione imbarazzante, o almeno poco piacevole, sia da individuarsi nell'uso dell'assioma di scelta. Questo ha dato luogo ad un intenso dibattito, ancora aperto, sulla sua validità. Ma è un fatto che l'assioma di scelta non è il solo responsabile dei guai. Lo è anche l'adozione della logica classica. Prova ne sia che, tolto di mezzo il principio del terzo escluso, e cioè in una teoria degli insiemi basata su una logica diversa da quella classica, si può assumere la validità dell'assioma di scelta senza che con ciò risulti $\mathbb{R}$ ben ordinabile (cioè si risolve la tensione evitandola). Questo mostra che anche l'adozione della logica classica è causa, o almeno una concausa, del disagio.

Nonostante queste difficoltà, ancor oggi la massima parte della matematica è sviluppata sulla base della logica classica e della teoria degli insiemi ZFC, forse per via della loro apparente semplicità. Infatti, mancando in matematica la controprova della verifica sperimentale, l'unico criterio ineludibile rimane quello della pura assenza da contraddizioni, e questa può essere garantita anche da un concetto inaccessibile di verità.

Mi sembra del massimo interesse sapere che è possibile seguire la proposta di Brouwer e sviluppare una matematica che segua criteri più stringenti di aderenza alla realtà, e quindi sia basata sulla logica intuizionistica e su teorie degli insiemi alternative a ZFC. Lo sviluppo di una tale matematica, generalmente chiamata costruttiva, per decenni è rimasto solo una possibilità. In tempi recenti, anche per l'avvento dei calcolatori, l'approccio costruttivo è una realtà che si sta via via espandendo in tutti i rami della matematica.

2 Molteplicità delle logiche e importanza delle traduzioni.

La critica di Brouwer ha mostrato che la logica classica non è una necessità, semplicemente perché non è l'unica possibile. Oltre alla logica intuizionistica, il ventesimo secolo ha visto, di fatto, l'introduzione di molte nuove logiche, ciascuna con proprie caratteristiche e vantaggi. Se per la matematica rimangono essenzialmente solo la logica classica e la logica intuizionistica, per le applicazioni ad altre discipline e per l'indagine filosofica oggi c'è davvero una grande varietà: logica rilevante, logica quantistica, logica lineare, fuzzy logic, ecc. Ogni logica nasce da un diverso concetto di proposizione, e cioè da quale tipo di informazione si vuole privilegiare affinché una proposizione sia valida: consistenza, dimostrabilità, disponibilità, precisione, sperimentabilità,... Se poi nella stessa logica si vogliono trattare anche modi diversi di concepire la validità, si possono aggiungere varie modalità e allora si assiste ad una vera esplosione di scelte possibili: logiche modali, logiche temporali, logiche deontiche, logiche epistemiche, ecc.

La pluralità delle logiche non deve essere vista come fonte di caos (tra le mille possibili, una vale l'altra), ma di ricchezza: ogni logica vuole corrispondere a diversi aspetti della realtà, o a diversi criteri di interpretazione di uno stesso aspetto. Per poter scegliere, è necessario conoscere. E per avere una conoscenza almeno sommaria, ci limiteremo a presentare e confrontare tra loro la logica classica e la logica intuizionistica, le due concezioni che più esplicitamente trattano le proposizioni e la loro verità nel senso più astratto, e che per questo sono quelle adottate dalla matematica.

La differenza tra le due concezioni, e la loro coesistenza, è ben visibile, prima ancora che nella matematica, nella vita di tutti i giorni. Anche se nel quotidiano non compare l'infinito in senso matematico, ci sono comunque riferimenti ad un numero illimitato o incontrollabile di possibilità. Talvolta conviene distinguere tra asserzioni di esistenza positiva, che prevede l'esibizione di un "testimone" e sono espresse intuizionisticamente da $\exists$ (ad es. "ho un antenato francese", "esistono gli extraterrestri"), e la loro versione negativa, espressa da $\neg\neg\exists$ oppure $\neg\forall\neg$, (ad es."non è escluso che abbia un antenato francese", "non si può escludere che esistano gli extraterrestri").

Similmente, le complessità della vita spesso richiedono di distinguere tra una proposizione e la sua doppia negazione. Una porta aperta non è lo stesso che una porta non chiusa. Un politico che dica "non si può negare che il partito avversario non sia andato male alle elezioni", mai sottoscriverebbe il suo equivalente classico "il partito avversario ha avuto successo". E uno spasimante alla cui domanda "mi ami?" la persona amata risponda "non dico di no" non è sollevato come da un "sì" deciso (magari accompagnato da una manifestazione non verbale dell'emozione corrispondente).

D'altra parte, non sempre (che non significa "mai"!) ci si vuole sottomettere alla inesorabilità del terzo escluso, su qualunque proposizione. Talvolta si presentano casi per cui conviene astenersi. Se un condottiero esaltato proclama "o con me o contro di me", ci si vuole riservare la possibilità di rifiutare sia il "con me", e andare a bombardare qualcuno, sia il "contro di me", ed essere bombardati.

In fondo, la distinzione tra la visione classica e la visione costruttiva non è dissimile dalla nota *querelle* tra ottimisti e pessimisti (o tra spigliati e severi) di fronte ad un bicchiere a metà: c'è chi lo vede mezzo pieno e chi mezzo vuoto. Anzi, l'immagine, per quanto umile, è suggestiva e abbastanza fedele: se il bicchiere è la proposizione e il liquido la sua prova, vuoto significa che è certamente falsa e colmo significa che è certamente vera. Un classico considera vera la proposizione quando non è falsa-vuota, mentre un intuizionista solo quando la vede come vera-colma, o sa che può essere dimostrata-colmata.

La distinzione non è puramente verbale, ma anzi è la manifestazione di una diversità profonda nel modo di organizzare il proprio pensiero. Lo testimonia ad esempio la resistenza a modificare la propria visione e passare ad un'altra.

Una logica è un sistema di proposizioni specifiche considerate vere (assiomi, postulati) e di metodi per ottenere la verità di proposizioni a partire da altre proposizioni ritenute vere (regole di deduzione o inferenza).

Per ciascuno di noi, vero è ciò che si considera come aderente alla realtà dei fatti. Il concetto di verità, e la logica che lo gestisce, sono profondamente incarnati nella persona, perché sono il suo strumento di interpretazione della realtà. È naturale quindi che ciascuno di noi abbia la propria verità, perché ciascuno ha la propria visione del mondo, degli altri e di se stesso. In questo senso, la "logica" di ciascuno è parte integrante della sua soggettività. Ed è naturale che non ce ne sia una unica e obbligatoria per tutti.

La ricerca e lo studio di un concetto di verità e di logica astratto dalle verità e dalle logiche soggettive è dovuto al sacrosanto desiderio di trovare un accordo intersoggettivo. È qui che si manifesta una profonda diversità concettuale tra la logica classica e la logica intuizionistica. Per aderire alla logica classica, sembra necessario pensare che tale accordo sia ottenuto per autorità, assumendo l'esistenza di una verità "oggettiva" in sé, calata dall'alto, che rimane viva anche quando nessuno può coglierla. Il problema della ricerca di sicurezza è risolto in modo statico, ponendola come postulato.

La logica intuizionistica, invece, sembra compatibile con una visione dinamica, in cui l'accordo sulla verità intersoggettiva è visto come la meta, mai raggiunta, di un processo dialettico tra le verità dei singoli soggetti, e quindi è costruita dal basso. In tale prospettiva, non si sacrificano le verità soggettive sull'altare di una verità metafisica unica e obbligatoria per tutti, ma si accetta la loro molteplicità e si cerca di farle interagire tramite la comunicazione. La sicurezza è costruita, e la comunicazione diventa essenziale. Questo è quel che si osserva in natura.

In breve, e con una certa approssimazione, in logica classica (intesa come apparato formale, indipendentemente dal campo di applicazione) è vero tutto quello che potrebbe essere vero per almeno un soggetto, purché sia fatta salva l'assenza di contraddizioni; in logica intuizionistica è vero tutto quello che ogni soggetto accetta come vero, perché ne vede la prova.

Affinché possa iniziare una dialogo autentico tra due persone, ciascuno deve riconoscere la soggettività dell'altro e accettare la diversità e dignità del suo modo di leggere e interpretare il mondo, cioè la sua "logica". Anche nell'ambito scientifico, che pur dovrebbe essere il più aperto al dialogo, spesso purtroppo si osserva il contrario. Ad esempio, il fatto che la comunità dei logici classici tenda a indicare come non-classico (invece che costruttivo, intuizionista, modale, predicativo, ecc.) ogni individuo che non la pensa come loro, sembra già una qualifica, un giudizio di sovversione all'ordine costituito.

Ma anche quando ci siano le migliori intenzioni, sappiamo quanto sia difficile la comunicazione tra due persone, perché difficile è abbandonare o modificare la propria visione della realtà. E a guardar bene non è nemmeno giusto farlo: in fondo si tratta della lotta per la sopravvivenza. Piuttosto, quel che si può fare è cercare di capire la visione dell'altro, pur mantenendo la propria.

Per capire la logica dell'altro, non possiamo semplicemente aggiungere al nostro bagaglio un diverso criterio di verità. Se anche fosse possibile, non aggiungerebbe nulla di più alla nostra comprensione (e anzi diventeremmo scissi). Il risultato sarebbe, infatti, una copia precisa di quel che pensa l'altro, senza che i due mondi entrino davvero in comunicazione. Quel che serve è piuttosto un legame tra i due criteri di verità, legame che si ottiene non pretendendo di capire tutto dell'altro in profondità, ma descrivendo il suo criterio di verità per mezzo del nostro.

Quel che si può fare è fornirci di due tipi di proposizione, aggiungendo al nostro linguaggio una modalità, vale a dire un operatore $\circledast$ che per ogni proposizione A dia luogo ad una nuova proposizione $\circledast A$ che noi interpreteremo come: l'altro dice che A è vera. $\circledast A$ sarà quindi vera per noi quando ci renderemo conto che A è vera per l'altro. Ciò significa che per mezzo di $\circledast$, simuleremo con le nostre asserzioni le asserzioni dell'altro.

Putroppo anche questo non è sufficiente a capire attraverso quale processo l'altro arrivi a dire che A è vera. Ma almeno ora siamo in grado di capire la struttura esterna della sua logica, possiamo studiarne il comportamento formale, stabilendo quali assiomi e regole dovremo aggiungere per gestire la modalità $\circledast$ e arrivare almeno a prevedere quello che è dimostrabile per l'altro.

Ad esempio, è vero per noi che $\circledast A \to A$, cioè, che tutto quello che l'altro considera vero è vero anche per noi? Possiamo dire che vale $\circledast(A \to B) \ \& \ \circledast A \to \circledast B$, cioè che anche per l'altro vale la regola del modus ponens? Lo scopo è trovare degli assiomi per $\circledast$ in modo che valga: $\circledast A$ vera per noi se e solo se A vera per l'altro.

Con questo "trucco", potremo trattare attivamente, all'interno della nostra logica, quello che l'altro afferma. E cioè potremo giungere ad una traduzione della logica dell'altro all'interno della nostra.

Prendendo come esempio il caso della logica classica e della logica intuizionistica, nei prossimi paragrafi mostreremo che ciò è possibile. Descriveremo in modo più formale le due logiche, e mostreremo come si può tradurre l'una all'interno dell'altra.

3 Logica classica e logica intuizionistica.

Racconteremo quali traduzioni sono possibili tra la logica classica e la logica intuizionistica attraverso un ipotetico dialogo tra due persone. Alfredo e Berto saranno i protagonisti della nostra simulazione.[1]

Alfredo e Berto devono innanzitutto mettersi d'accordo sul tema del loro discorso, devono cioè convenire sulla scelta delle proposizioni da considerarsi date, o proposizioni atomiche.

Devono in seguito decidere quali sono le particelle con cui, a partire dalle proposizioni atomiche, verranno costruite proposizioni via via più complesse. Si tratta in altri termini di mettersi d'accordo sulla scelta di connettivi e quantificatori, le costanti logiche. L'accordo è relativamente facile. Le costanti logiche sono *apparentemente* le stesse: congiunzione &, disgiunzione $\vee$, implicazione $\rightarrow$, per ogni $\forall$, esiste $\exists$. Inoltre, entrambi concordano sul fatto che la negazione $\neg$ è definibile usando implicazione $\rightarrow$ e una proposizione falsa $\perp$.

Ad essere pignoli, qui Alfredo fa una piccola concessione a Berto, perché nella logica di Alfredo &, $\rightarrow$, $\perp$ e $\forall$ sarebbero già sufficienti. Ma poiché l'intento dei due è di cercare di capirsi, Alfredo accetta di trattare anche $\vee$ e $\exists$.

Come nella vita di tutti i giorni, Alfredo e Berto devono tener presente che una fonte di malintesi è il significato diverso che due persone possono dare alla stessa parola. Poiché hanno visioni diverse, in questo contesto stabiliamo che Alfredo userà i simboli $\&^c$, $\vee^c$, $\rightarrow^c$, $\exists^c$, $\forall^c$ per le sue costanti logiche, e Berto i simboli $\&^i$, $\vee^i$, $\rightarrow^i$, $\exists^i$, $\forall^i$ per le sue. Come si vede, i termini usati per indicare le costanti logiche sono gli stessi (a parte gli apici che abbiamo aggiunto noi), così come comunemente si usano le stesse parole per i concetti verità, congiunzione, disgiunzione, implicazione, quantificazione esistenziale ed universale, anche se individui diversi attribuiscono loro significati diversi. Anche Alfredo e Berto, nel loro tentativo di dialogare, devono quindi fare molta attenzione a non cadere nelle trappole dell'omonimia. E ancor più attento deve stare Berto, perché è lui che mantiene distinzioni concettuali che l'altro ha scelto di ignorare, come vedremo meglio più avanti.

Sarà anche nostra cura, e cioè di chi scrive e di chi legge questo testo, fare molta attenzione a quale dei due protagonisti farà una certa asserzione perché, viste da fuori, le loro asserzioni suoneranno apparentemente le stesse, mentre ciascuno intenderà cose diverse. È quindi molto importante distinguere *chi* sta parlando. D'altronde, non è forse questo ciò che accade in modo quasi automatico nella vita di tutti i giorni? "Le tasse scenderanno" acquista un significato molto diverso se a dirlo è Tremonti oppure Visco.

Alfredo e Berto con molta pazienza cercano allora di chiarirsi vicendevolmente sul significato che ciascuno dà a connettivi e quantificatori.

Qualunque sia il concetto di verità che Alfredo e Berto assumono per le proposizioni atomiche, nelle proposizioni composte il concetto di verità di Berto è più severo. Per convincersi della verità di una proposizione, Berto ha bisogno di una informazione positiva, e cioè deve avere (esibire a se stesso) la prova della verità.

[1] Alfred era il nome di battesimo di Tarski, uno dei principali sostenitori dei metodi "infinitari" classici in matematica. Bertus era il modo con cui Luitzen Egbertus Jan Brouwer, padre dell'intuizionismo, veniva chiamato in famiglia.

Alfredo non sente questa esigenza. Anzi, gli sembra un fardello gravoso, da cui ritiene di potersi liberare. Il suo criterio di verità non è la prova, ma l'assenza di contraddizione: affinché una proposizione A sia vera, basta che A non sia falsa, cioè non conduca a contraddizione. Per Alfredo, la negazione di A, cioè $\neg A$, è vera se e solo se A è falsa, ed è falsa se e solo se A è vera. Quindi la verità della doppia negazione $\neg\neg A$ equivale alla falsità di $\neg A$, che a sua volta equivale alla verità di A. Inoltre, ogni proposizione A può essere solo o vera o falsa, *tertium non datur*. Ovvero, A può assumere solo due valori di verità, il valore vero o il valore falso (spesso indicati da 1 e 0). E naturalmente, A non può assumere nello stesso momento entrambi.

Come conseguenza, per considerare A vera ad Alfredo basta sapere che $\neg A$ non è vera. Vedremo che per Berto questo non è sufficiente e tantomeno intuitivo. Inoltre, per decidere la validità di una proposizione composta, ad Alfredo non serve nient'altro che conoscere il valore di verità dei componenti, , e anche questo per Berto è inaccettabile.

Berto considera $A \,\&\, B$ vera quando sia A sia B sono vere, cioè quando sa esibire una prova della verità di A e una prova della verità di B. Analogamente, considera $\forall x A(x)$ vera quando sa esibire un metodo preciso che, applicato ad ogni elemento d, produce una prova di $A(d)$. Alfredo è d'accordo, anche se non capisce l'insistenza di Berto sulla questione dell'esibizione delle prove.

Su tutte le altre costanti logiche, cioè i connettivi $\vee$, $\rightarrow$ e il quantificatore $\exists$, è anche più evidente la necessità di Berto di avere una informazione positiva, che ad Alfredo non è necessaria.

Per poter riconoscere $A \rightarrow B$ come vera, Berto deve sapere che dalla verità di A può dedurre la verità di B. A questo fine, poiché per lui la verità è data da una prova, deve avere un metodo che, quando sia applicato ad una qualunque prova di A, gli permetta di ottenere una prova di B.

Per Alfredo invece la verità di $A \rightarrow B$ è riconducibile ad un calcolo sui valori di verità di A e di B. Gli basta infatti determinare quando $A \rightarrow B$ è senz'altro falsa, e questo accade quando A è vera e B è falsa (ad esempio “piove, governo ladro”). In tutti gli altri casi, $A \rightarrow B$ è vera. Quindi $A \rightarrow B$ è falsa soltanto quando A è vera e B è falsa, cioè $A \,\&\, \neg B$ è vera. Ed è vera esattamente quando è falso che A sia vera e B falsa, cioè quando $\neg(A \,\&\, \neg B)$ è vera. Per Alfredo quindi $A \rightarrow B$ e $\neg(A \,\&\, \neg B)$ sono perfettamente equivalenti.

A Berto certamente non basta sapere che non si dà il caso che A sia vera e B falsa (cioè $\neg(A \,\&\, \neg B)$ vera) per poter ricostruire il metodo che trasforma ogni prova di A in una prova di B, che è l'unico modo per convincerlo della verità di $A \rightarrow B$.

Anche sul concetto di negazione Alfredo e Berto divergono, anzi, soprattutto su quello. Per Berto, $\neg A$ può essere definita come $A \rightarrow \perp$, dove $\perp$ è una qualunque proposizione certamente falsa, o una contraddizione. Ancora una volta Alfredo, pur non vedendo la necessità di questo, può convenire sul risultato formale. Ma per il diverso concetto di implicazione che hanno, diverso diventa anche il loro concetto di negazione. Per Alfredo, $\neg A$ vera significa che A non è vera, mentre per Berto $\neg A$ vera significa sapere che, nel tentativo di esibire una prova di A, si giunge ad una contraddizione. Per Berto la negazione è un risultato, e non un'assenza. Alfredo non ha alcun problema a vedere che $\neg\neg A$ equivale ad A; Berto invece, come conseguenza della sua definizione di negazione, si trova a distinguere A da $\neg\neg A$.

Si noti però che anche per Berto vale $A \rightarrow \neg\neg A$, perché ha un metodo che trasforma ogni prova di A in una prova di $\neg\neg A$. Ecco come fa: da una qualunque prova a di A, deve estrarre una prova di $\neg\neg A$, cioè un metodo che trasformi una qualsiasi prova b di $\neg A$ in una prova di $\bot$. Ma b, in quanto prova di $\neg A$ e cioè $A \to \bot$, è per definizione un metodo che trasforma una prova di A in una prova di $\bot$. Quindi il metodo che dimostra $A \to \neg\neg A$ vera consisterà nell'applicare il metodo b alla prova a per avere la prova di $\bot$.

Conviene soffermarci ora sulla disgiunzione, perché qui è più visibile la differenza tra le due concezioni. Per Berto $A \vee B$ è vera quando, almeno idealmente, sa che A è vera oppure sa che B è vera. In altri termini, per avere una prova di $A \vee B$ Berto deve poter produrre una prova di A oppure una prova di B.

Ad Alfredo basta che almeno una delle due proposizioni A e B non sia falsa, ovvero che sia escluso che entrambe siano false. $A \vee B$ per Alfredo è lo stesso che $\neg(\neg A \ \& \ \neg B)$, mentre per Berto no, perché dalla prima segue la seconda, ma non viceversa.

Alfredo si domanda: per quale strano motivo Berto dovrebbe asserire $A \vee B$, se questo per lui significa che già deve conoscere la verità di una delle due proposizioni, ad esempio B? In questo caso, tanto varrebbe affermare direttamente B. Le ragioni di Berto risultano chiarite dalla seguente considerazione. La proposizione $A \vee B$ può comparire come parte di una proposizione più complessa, ad esempio come antecedente di una implicazione $A \vee B \to C$. Questo per Berto significa sapere come passare dalla verità di A alla verità di C e sapere come passare dalla verità di B alla verità di C. La stessa proposizione, letta da Alfredo, diventa equivalente a $\neg(\neg A \ \& \ \neg B) \to C$, un'equivalenza che non si dà nella logica di Berto. Per lui $A \vee B \to C$ può essere vera, mentre $\neg(\neg A \ \& \ \neg B) \to C$ può non esserlo. Infatti, dalla verità di $\neg(\neg A \ \& \ \neg B)$, cioè dalla falsità del fatto che sia A sia B sono false, non c'è modo di ottenere la verità di una delle due (quale?) e quindi Berto non può più ottenere la verità di C che prima poteva ottenere da una prova di A oppure da una prova di B. Si vede allora che la definizione della verità di $A \vee B$ è essenziale nelle argomentazioni ipotetiche: una prova di $A \vee B \to C$ può sfruttare a fondo l'informazione data da una ipotetica prova di $A \vee B$, che viene persa quando l'antecedente è $\neg(\neg A \ \& \ \neg B)$.

L'interpretazione di Berto, quindi, rifiuta la validità del principio del terzo escluso, così come del principio della doppia negazione. Se non si conosce nulla della proposizione A, certamente non si può essere nella condizione di produrre una prova di A oppure una di $\neg A$. Si noti invece che per Alfredo $A \vee \neg A$ è vera semplicemente per un calcolo dei valori di verità, senza nemmeno andare a vedere cosa è A.

È importante qui notare che, se Berto rifiuta la validità di un principio che Alfredo accetta, ad esempio il principio della doppia negazione, non significa che Berto si auto-costringa a considerare ogni proposizione $\neg\neg A$ come distinta da A. Anch'egli in certi casi, e cioè almeno quando è possibile decidere la verità di A, come ad esempio per $7^3 = 353$, accetta $\neg\neg A \to A$ come vera. Infatti certamente vale $7^3 = 353 \vee \neg(7^3 = 353)$ (basta fare il calcolo) e Berto sa che, per ogni A, dalla verità di $A \vee \neg A$ segue quella di $\neg\neg A \to A$. In altre parole, il rifiuto di un principio da parte di Berto non vuol dire che non se lo consente mai, ma che vuole riservarsi la possibilità di stabilire caso per caso cosa succede.

Va da sé infine che $\exists x A(x)$ è vera per Berto quando sa di poter produrre, almeno idealmente, un elemento d del dominio per il quale $A(d)$ vale. Poiché $\exists$, come tutti sappiamo, è simile ad una disgiunzione infinita, Berto potrà dimostrare la verità di $\exists x A(x)$ solo esibendo la prova di almeno uno dei termini della disgiunzione.

Questa è la spiegazione di Brouwer-Heyting-Kolmogorov delle costanti logiche nella logica intuizionistica. Anche altre spiegazioni sono possibili, ma certamente non è possibile ridurre la logica intuizionistica ad un calcolo di valori di verità, che invece caratterizza la logica classica di Alfredo. E questo rimane vero anche se si passa da 0,1 ad un qualunque numero finito di valori di verità.

Questo lo si può intuire facilmente, con la seguente argomentazione. Per Alfredo, $A \to B$ equivale in tutto e per tutto a $\neg(A \ \& \ \neg B)$ cioè al fatto che A e $\neg B$ assieme sono incompatibili (contraddittori), in quanto le due proposizioni hanno la stessa tavola di verità. E abbiamo visto che per Berto questa equivalenza non vale, poiché la verità di $\neg(A \ \& \ \neg B)$ non gli permette di ricostruire il metodo richiesto per provare $A \to B$. La complessità di un metodo che prova $A \to B$, che potrebbe richiedere la considerazione di una infinita variazione di prove di A possibili, non è rappresentabile mediante una sola tabella finita, per quanto grande (e che inoltre si dovrebbe applicare a tutte le proposizioni). Per questi motivi il tentativo di Alfredo di rappresentare con una tabella il concetto di verità di Berto, compresa la sua richiesta di esibire il metodo, risulta vano.

Gödel ne ha dato una dimostrazione rigorosa in *Zum intuitionistichen Aussagenkalkül*, 1932.

Prima di iniziare la trattazione delle traduzioni vere e proprie dobbiamo ancora sgomberare il campo da un comune equivoco. Visto da fuori, l'apparato deduttivo di Alfredo è apparentemente più esteso di quello di Berto, perché per Alfredo valgono tutti gli assiomi e le regole di Berto, e anche qualcuno in più (come ad esempio il terzo escluso). Tutte le proposizioni che sono vere per Berto, rimangono vere anche per Alfredo. Ma questo è possibile solo a patto che Alfredo le legga "a modo suo", semplicemente sostituendo gli apici ^{i} delle costanti logiche di Berto con apici ^{c}.

Questo non significa affatto (come purtroppo comunemente si crede) che la logica di Alfredo sia più forte, e che quindi è inutile adottare quella di Berto. Se davvero fosse più forte, adottare la logica di Berto sarebbe come imporsi arbitrariamente una rinuncia che non ha motivazioni oggettive. Ma non è affatto così. Perché le regole di deduzione di Berto sono sì tutte valide anche per Alfredo, ma *nella interpretazione di Alfredo*!!! E abbiamo visto che Alfredo non fa le distinzioni che fa Berto. Detto in altri termini, la traduzione fatta da Alfredo sostituendo gli apici non è fedele.

Un esempio può essere utile per cogliere l'importanza delle distinzioni. Si dice che nella lingua degli eschimesi ci sia una dozzina di termini diversi per indicare il colore che in italiano si indica con la sola parola bianco. Si può immaginare che questa "complicazione" abbia una funzione vitale nell'ambiente in cui vivono gli eschimesi. Ad esempio, può essere che sia sicuro camminare sopra un'area in cui la neve ha il colore bianco$_1$, mentre questo non sia affatto garantito quando la neve ha colore bianco$_2$. Se B_1 significa che la neve è bianco$_1$, B_2 che è bianco$_2$ e C che è possibile camminarci sopra, allora per gli eschimesi vale $B_1 \to C$ ma non $B_2 \to C$. Non sarebbe forse stupido e pericoloso trascurare la distinzione tra B_1 e B_2 e considerare "più forte" la logica in cui vale una legge in più, per cui B_1 equivale a B_2?

4 Le traduzioni di Gödel.

Alla luce della considerazioni precedenti, per ottenere una traduzione fedele di quel che dice Berto, Alfredo non ha altro modo che introdurre una modalità, che indicheremo con $\Box$. Grazie a $\Box$, per ogni proposizione A, Alfredo potrà rappresentare, nella propria logica, l'asserzione A vera di Berto. Così Alfredo dirà che $\Box A$ è vera quando A è vera costruttivamente, ovvero A è dimostrabile. $\Box A$ è un sostituto per Alfredo dell'asserzione A vera per Berto, anche se non ne comprende interamente il senso. Tramite $\Box$, Alfredo può simulare, dentro il suo linguaggio, i connettivi di Berto aggiungendo ai propri i connettivi $\&^i, \vee^i, \rightarrow^i, \forall^i, \exists^i$ definiti nel modo seguente:

$$A \,\&^i\, B =_{def} A \,\&^c\, B$$

$$A \vee^i B =_{def} \Box A \vee^c \Box B$$

$$A \rightarrow^i B =_{def} \Box A \rightarrow^c \Box B$$

Questo significa che, per capire quello che dice Berto, ora Alfredo deve operare una traduzione di ogni proposizione A nel linguaggio di Berto. La traduzione A° è ottenuta traducendo *tutte* le occorrenze delle costanti logiche che compaiono in A (la traduzione non può limitarsi all'ultimo connettivo o quantificatore usato da Berto, altrimenti "dentro" la proposizione complessa possono restare connettivi con apice i incomprensibili per Alfredo). Questo è espresso sinteticamente da una definizione di $^\circ$ per induzione, con le clausole seguenti:

$$P^\circ =_{def} P \text{ per ogni formula atomica } P$$

$$(A \,\&^i\, B)^\circ =_{def} A^\circ \,\&\, B^\circ$$

$$(A \vee^i B)^\circ =_{def} \Box A^\circ \vee \Box B^\circ$$

$$(A \rightarrow^i B)^\circ =_{def} \Box A^\circ \rightarrow \Box B^\circ$$

Poiché ora i connettivi di Berto sono sempre sotto il segno di $^\circ$, non ci sono ambiguità e quindi si può trascurare la noia di indicare ogni volta l'apice.

Si tratta, quindi, di scegliere degli assiomi per $\Box$ in modo che Alfredo possa simulare il concetto di verità di Berto. Gödel ha dimostrato, in *Eine Interpretation des intuitionistichen Aussagenkalküls*, 1933, che basta aggiungere agli assiomi e regole di Alfredo gli assiomi:

$$\Box A \rightarrow A, \quad \Box A \rightarrow \Box\Box A, \quad \Box(A \rightarrow B) \,\&\, \Box A \rightarrow \Box B$$

e la regola:

$$\text{se } A \text{ è dimostrabile, allora } \Box A \text{ è dimostrabile}$$

che gestiscono la modalità $\Box$. Questa è una logica modale nota col nome di S4. Anche altri sistemi di assiomi e regole su $\Box$ svolgono lo stesso ruolo ai fini della traduzione.

A questo punto si può dimostrare che per ogni proposizione A (del linguaggio di Berto) si ha:

$$A^\circ \text{ è dimostrabile per Alfredo} \quad \text{se e solo se} \quad A \text{ è dimostrabile per Berto}$$

Non è necessario avere una clausola che traduca la negazione $\neg$, perché la negazione è definita da $\neg A =_{def} A \rightarrow \bot$, e quindi la clausola su $\rightarrow$ dice che vale $(\neg^i A)^\circ =_{def} \neg\Box A^\circ$. Infatti, $(\neg^i A)^\circ =_{def} (A \rightarrow \bot)^\circ =_{def} \Box A^\circ \rightarrow \Box\bot^\circ =_{def} \Box A^\circ \rightarrow \bot =_{def} \neg\Box A^\circ$ perché $\bot^\circ =_{def} \bot$ e $\Box\bot$ equivale a $\bot$.

Una delle caratteristiche più tipiche del sistema formale per la logica intuizionistica, e delle teorie matematiche basate su di esso, è la proprietà di disgiunzione: se $A \vee B$ è dimostrabile nel sistema, allora anche uno dei due, A oppure B, risulta dimostrabile. Vale spesso anche la proprietà di esistenza: se $\exists x A(x)$ è dimostrabile nel sistema, allora anche $A(t)$ è dimostrabile, per qualche termine t. Si può dimostrare che anche la traduzione $^\circ$ conserva questa proprietà: $\Box A \vee \Box B$ è dimostrabile in S4 se e solo se $\Box A$ è dimostrabile in S4 oppure $\Box B$ è dimostrabile in S4.

Una traduzione da Alfredo a Berto, che permetta a Berto di comprendere fedelmente ciò che afferma Alfredo, segue la stessa strategia adottata nella traduzione da Berto ad Alfredo. La si ottiene aggiungendo una modalità $\Diamond$ al linguaggio di Berto, con cui egli rappresenta le asserzioni di verità di Alfredo. Così Berto dirà che $\Diamond A$ è vera quando A è vera per Alfredo, ovvero A è potenzialmente vera. La traduzione * si definisce per induzione con le seguenti clausole:

$$P^* =_{def} \Diamond P \text{ per ogni proposizione atomica } P,$$

$$(A \;\&^c\; B)^* =_{def} A^* \;\&\; B^*,$$

$$(A \vee^c B)^* =_{def} \Diamond(A^* \vee B^*),$$

$$(A \to^c B)^* =_{def} A^* \to B^*,$$

$$(\forall^c x A(x))^* =_{def} \forall x A^*(x),$$

$$(\exists^c x A(x))^* =_{def} \Diamond(\exists x A^*(x)).$$

Ora potremmo studiare quali assiomi è necessario assumere su $\Diamond$ per ottenere una traduzione fedele. Ma non è necessario! Per Berto non c'è bisogno di aggiungere la modalità $\Diamond$ per capire cosa intende per vero Alfredo. Infatti un secondo risultato di Gödel del 1933 (*Zur intuitionistichen Arithmetik und Zahlentheorie*), mostra che una modalità $\Diamond$ utilizzabile per la traduzione è definibile all'interno delle costanti logiche di Berto in modo molto semplice: $\Diamond =_{def} \neg\neg$.[2]

Vediamo per bene come si fa, e perché. Cominciamo dalle proposizioni atomiche, per le quali Berto deve "fare la tara" su quel che dice Alfredo. Infatti, Berto ha capito che per Alfredo l'asserzione P vera equivale all'asserzione $\neg\neg P$ vera, e quindi quando Alfredo asserisce P vera, Berto deve ricordare che per Alfredo essa equivale a $\neg\neg P$ vera. E quindi, quando Alfredo asserisce P vera, Berto sa che deve tener conto di questa equivalenza. Il "trucco" di Berto è di tradurre ogni asserzione P vera direttamente con l'equivalente (per Alfredo) $\neg\neg P$ vera. Berto pone quindi $P^* =_{def} \neg\neg P$, ottenendo in tal modo una proposizione equivalente alla propria doppia negazione. Anche per lui P^* equivale a $\neg\neg P^*$. Egli infatti accetta che $\neg A$ equivalga a $\neg\neg\neg A$ (egli accetta "non ti amo" come equivalente di "non è escluso che non ti ami"), ma continua a non ammettere che A debba essere equivalente a $\neg\neg A$ (per lui rimane impensabile che "ti amo" possa equivalere a "non è escluso che ti ami").

[2]Gerhard Gentzen trovò lo stesso risultato indipendentemente da Gödel, per cui oggi la traduzione * è nota come traduzione negativa di Gödel-Gentzen.

D'altra parte, rimane vero che per Berto una proposizione è vera solo quando se ne abbia una prova. Per cui, quando Alfredo affermerà che P è vera, per capirlo Berto dovrà assumere che la traduzione P^*, cioè $\neg\neg P$, sia accompagnata da una prova.

Da qui in poi, Berto può intendere perfettamente il modo di operare di Alfredo, non solo sul risultato finale ma anche in ciascun passaggio delle deduzioni (anche se questo richiede un po' di lavoro in più da parte di Berto). Resta che per convincersi della validità di una regola usata da Alfredo, riguardante una certa costante logica, Berto deve sapere come trasformare una prova delle premesse in una prova della conclusione.

Sui connettivi &, $\rightarrow$ e sul quantificatore $\forall$, in un certo senso non è necessaria a Berto una traduzione per capire quello che intende Alfredo, fermo restando che Berto dà il proprio significato anche a tali costanti logiche. In altre parole, per Berto continua a valere che per verificare ad esempio $A \rightarrow B$ deve avere un metodo che trasforma prove di A in prove di B. Questo è possibile perché, per ogni regola di deduzione usata da Alfredo su $\rightarrow$ e che abbia come conclusione $A \rightarrow B$ vera, supponendo di avere una prova (nel suo senso) delle premesse, Berto sa ricostruire il metodo che lo convince della verità di $A \rightarrow B$. E lo stesso discorso vale per & e $\forall$.

Tutto ciò risulterebbe più chiaro se si specificassero formalmente tutte le regole di deduzione, sia di Alfredo sia di Berto, e poi si dimostrasse l'asserto per induzione sulle derivazioni classiche (quelle di Alfredo).[3]

La differenza tra Alfredo e Berto emerge in modo palpabile nel caso di $A \vee B$. Il motivo è sempre lo stesso: mentre per gli altri connettivi Berto riusciva, magari a fatica, a ricostruire la prova per lui necessaria a seguire le argomentazioni di Alfredo, nel caso di $A \vee B$ non sa proprio come fare.

La combinazione delle regole di deduzione che usa Alfredo fa sì che in qualche caso egli si trovi a dedurre $A \vee B$ senza poter in alcun modo sapere quale delle due è vera (ciò accade ad esempio quando usa una istanza del terzo escluso $A \vee \neg A$). In tal caso una informazione che permetta a Berto di ricostruire una prova di A o una prova di B non c'è, nemmeno implicitamente. E dunque l'inferenza fatta da Alfredo per concludere $A \vee B$ risulta per Berto incomprensibile all'interno della propria logica.

Ma Berto trova uno stratagemma. Basta che si ricordi che, nella logica classica di Alfredo, è possibile dimostrare l'equivalenza di $A \vee B$ con $\neg(\neg A \ \& \ \neg B)$. Dal punto di vista di Berto, questa equivalenza significa che Alfredo tratta la disgiunzione in un modo ambiguo, in quanto confonde due asserzioni che invece Berto tiene ben distinte. Ma dato che per Alfredo sono equivalenti, Berto sceglie di considerare tra le due quella che anche lui riesce a provare costruttivamente, come è nel suo stile, e cioè non la disgiunzione, ma la contraddizione delle due negazioni $\neg A$ e $\neg B$, ovvero $\neg(\neg A \ \& \ \neg B)$, che per lui è più debole. Infine, $\neg(\neg A \ \& \ \neg B)$ è equivalente, nel sistema di Berto, a $\neg\neg(A \vee B)$, e questo è infatti il modo in cui egli traduce nel suo sistema la $A \vee B$ di Alfredo.

Alfredo non può che essere d'accordo, anche se non capisce la complicazione, dato che per lui A e A^* sono equivalenti, qualunque sia la proposizione A.

È chiaro che un discorso del tutto analogo vale per il quantificatore $\exists$.

[3] Per non intimorire il lettore, conviene comunque ricordare che le derivazioni di Berto sono formalmente semplici tanto quelle di Alfredo. Infatti, il sistema di regole di deduzione è così ben congegnato che l'informazione aggiuntiva sulle prove, richiesta dalla concezione di verità di Berto, può rimanere implicita, e può essere in ogni momento ricostruita in modo effettivo. La stessa cosa non vale per il sistema di Alfredo.

Abbiamo spiegato nei dettagli (anche se manca tutto il formalismo dell'apparato deduttivo) che per la traduzione *, in cui si legga $\neg\neg$ al posto di $\Diamond$, vale:

$$A \quad \text{è dimostrabile per Alfredo} \quad \text{se e solo se} \quad A^* \quad \text{è dimostrabile per Berto}$$

È naturale domandarsi se un analogo risultato vale, allora, anche per la traduzione $^\circ$, e cioè se una modalità $\Box$ con le proprietà opportune sia definibile nella logica classica. Anche qui Gödel, con il suo risultato del 1932, ci aiuta a capire che non è proprio possibile. Infatti, se ci fosse una traduzione fedele della logica intuizionistica dentro quella classica, cioè se valesse che A° è dimostrabile in logica classica se e solo se A è dimostrabile in logica intuizionistica per una traduzione $^\circ$ nel linguaggio senza $\Box$ (ovvero, se fosse definibile un $\Box$ con le proprietà opportune), per calcolare il valore di A basterebbe calcolare il valore di A° classicamente, e con ciò ottenere una caratterizzazione della logica intuizionistica con i soli valori 0 e 1. Questo non è possibile, perché una tabella finita di valori non può essere sufficiente, come afferma il risultato di Gödel del 1932.

A posteriori ci si può convincere anche con un'altra osservazione. Dal punto di vista di Berto, tutta la logica di Alfredo si spiega usando solo il frammento $\neg, \&, \rightarrow, \forall$. Cioè, dal punto di vista Berto, Alfredo non ha né una vera disgiunzione $\vee$ né un vero quantificatore esistenziale $\exists$, ma solo la loro versione debole, definibile negativamente. Ecco perché non c'è una traduzione fedele della logica intuizionistica di Berto dentro la logica classica di Alfredo: la logica classica non ha proprio alcun modo di esprimere $\vee$ e $\exists$.[4]

Il fatto che per la traduzione dalla logica classica alla logica intuizionistica non sia necessario aggiungere una modalità $\Diamond$, in quanto è definibile, ha una importanza per la matematica che non può essere sottovalutata. Infatti, la traduzione permette, in linea di principio e sotto certe limitazioni sulla potenza fondazionale della teoria degli insiemi sottostante (in pratica, deve essere una fondazione per cui abbia senso e valga la traduzione negativa), di trasportare ogni enunciato della matematica classica in un enunciato della matematica costruttiva.[5] Gödel stesso dà la sua traduzione nell'ambito delle teorie formali per l'aritmetica di Peano (PA) e di Heyting (HA).

Invece, il viceversa non si dà, cioè non c'è modo di interpretare classicamente la matematica costruttiva, perché in matematica (classica o costruttiva che sia) c'è un solo tipo di asserzione, la verità, e mai compaiono proposizioni della forma $\Box A$ oppure $\Diamond A$.

Nella matematica classica vale *a fortiori* tutto quello che vale nella matematica costruttiva. Per essere più precisi, bisognerebbe specificare che, contrariamente alla matematica classica che è basata su un'unica fondazione, cioè ZFC o suoi equivalenti (unica nel senso che non c'è altra scelta), sono state introdotte molte e diverse fondazioni per la matematica costruttiva. Si ha quindi anche una molteplicità di matematiche possibili. E ci sono varianti, come la matematica intuizionista "ortodossa" di Brouwer, che assumono principi che la rendono non compatibile con una lettura classica (come il famoso principio di continuità).

[4]È curioso constatare che le due traduzioni sono state trovate da Gödel nel stesso anno, il 1933. Insieme all'articolo del 1932, i tre contributi (per un totale di sole 8 pagine!) danno una risposta completa al problema dei legami tra logica classica e logica intuizionistica.

[5]Dico in linea di principio, perché la traduzione *, oltre a risultare di impraticabile complessità, spesso è troppo debole costruttivamente e non riflette il contenuto inteso classsicamente. Per questo definizioni diverse, pur se equivalenti classicamente, possono suggerire formulazioni costruttive diverse e *non* equivalenti nella logica intuizionistica. Rimane allora il compito di scegliere qual sia la più feconda e conveniente.

Ma quando un matematico classico legge “a modo suo” la matematica costruttiva, fa come Alfredo quando ingloba la logica di Berto nella sua, senza capirla del tutto. Anche se talvolta può capitare che legga qualche risultato nuovo anche per lui, in generale dimostra di non considerare interessanti e degne di attenzione le distinzioni tipiche del costruttivismo, trascurandole totalmente. Quindi, dimostra di non considerare interessante e degna di attenzione tutta l’informazione aggiuntiva che ne deriva (e cioè l’esibizione degli oggetti di cui si dichiara l’esistenza, la possibilità di ottenere algoritmi dalle dimostrazioni, l’implementabilità al calcolatore, la certezza dell’assenza di contraddizioni nonostante il secondo teorema di incompletezza di Gödel,...) e la perde totalmente. Non sorprende allora che consideri le argomentazioni costruttive come inutilmente complicate, e non riesca a darsene una ragione.