# 9 Calcolo dei sequenti $\mathbf{LC}_p$

In questa sezione mostriamo un metodo più elegante, semplice e soprattutto **AUTOMATICO** per mostrare se una proposizione è valida o meno e soddisfacibile o meno.

Tale metodo è **MENO COMPLESSO** di quello delle tabelle di verità e consiste in una procedura algoritmica che **TERMINA SEMPRE** con una risposta. Questa procedura fa uso di un **calcolo dei sequenti** per la logica classica proposizionale. Anticipiamo soltanto che per verificare la validità (e soddisfacibilità) per esempio di

$$(V \to \neg R) \to (\neg V \to R)$$

costruiremo un **albero di derivazione...** in tale calcolo.

## 9.1 Cosa è un sequente?

Un **sequente** nel linguaggio delle proposizioni formali è una scrittura che può essere di quattro tipi diversi:

1. un primo tipo di sequente è la scrittura

$$\mathsf{pr}_\mathbf{1}, \mathsf{pr}_\mathbf{2}, \dots \mathsf{pr}_\mathbf{n} \quad \vdash \quad \mathsf{cl}_\mathbf{1}, \mathsf{cl}_\mathbf{2}, \dots \mathsf{cl}_\mathbf{m}$$

   che rappresenta *un'asserzione* del tipo

   **SE** $\mathsf{pr}_\mathbf{1}$ è **vero** e $\mathsf{pr}_\mathbf{2}$ è **vero**... e $\mathsf{pr}_\mathbf{n}$ è **vero** **ALLORA** uno dei $\mathsf{cl}_\mathbf{i}$ è **vero** ossia $\mathsf{cl}_\mathbf{1}$ è **vero OPPURE** $\mathsf{cl}_\mathbf{2}$ è **vero**... **OPPURE** $\mathsf{cl}_\mathbf{m}$ è **vero**

   o equivalentemente che

$$(\,\mathsf{pr}_\mathbf{1} \& \mathsf{pr}_\mathbf{2}\,) \dots \& \mathsf{pr}_\mathbf{n} \quad \longrightarrow \quad (\,\mathsf{cl}_\mathbf{1} \vee \mathsf{cl}_\mathbf{2}\,) \dots \vee \mathsf{cl}_\mathbf{m} \qquad \text{è vero}$$

   posto che tutte le $\mathsf{pr}_i$ per $i = 1, \dots, n$ (dette *premesse*) e le $\mathsf{cl}_i$ per $i = 1, \dots, m$ (dette *conclusioni*) siano proposizioni formali.

2. un altro tipo di sequente è la scrittura

$$\vdash \quad \mathsf{cl}_\mathbf{1}, \mathsf{cl}_\mathbf{2}, \dots \mathsf{cl}_\mathbf{m}$$

   che rappresenta *un'asserzione* del tipo

   $\mathsf{cl}_\mathbf{1}$ è **vero** `oppure` $\mathsf{cl}_\mathbf{2}$ è **vero**...`oppure` $\mathsf{cl}_\mathbf{m}$ è **vero**

   o equivalentemente che

$$(\,\mathsf{cl}_\mathbf{1} \vee \mathsf{cl}_\mathbf{2}\,) \dots \vee \mathsf{cl}_\mathbf{m} \qquad \text{è vero}$$

   o anche equivalentemente che

$$\top \;\to\; (\,\mathsf{cl}_\mathbf{1} \vee \mathsf{cl}_\mathbf{2}\,) \dots \vee \mathsf{cl}_\mathbf{m} \qquad \text{è vero}$$

   posto che tutte le $\mathsf{cl}_i$ per $i = 1, \dots, m$ (dette *conclusioni*) siano proposizioni formali.

3. un altro tipo di sequente è la scrittura

$$\mathsf{pr}_\mathbf{1}, \mathsf{pr}_\mathbf{2}, \dots \mathsf{pr}_\mathbf{n} \quad \vdash$$

che rappresenta *un'asserzione* del tipo

se $\mathsf{pr_1}$ è **vero** e $\mathsf{pr_2}$ è **vero**... e $\mathsf{pr_n}$ è **vero** allora il **falso è vero**

o equivalentemente che

$$(\,\mathsf{pr_1}\&\mathsf{pr_2}\,)\ldots\&\mathsf{pr_n} \quad \longrightarrow \quad \perp \text{ è vero}$$

posto che tutte le $\mathsf{pr}_i$ per $i = 1, \ldots, n$ (dette *premesse*) siano proposizioni formali.

4. infine un sequente è anche la scrittura

$$\vdash$$

che rappresenta *un'asserzione* del tipo

**il falso è vero**

o equivalentemente che

$$\perp \qquad \text{è vero}$$

o anche equivalentemente che

$$\top \;\rightarrow \perp \qquad \text{è vero}$$

Per rappresentare con un'unica scrittura i quattro tipi di sequenti illustrati usiamo lettere greche maiuscole del tipo

$$\mathbf{\Gamma}, \qquad \mathbf{\Delta}, \qquad \mathbf{\Sigma}\ldots$$

come META-VARIABILI per indicare una generica **LISTA** di **PROPOSIZIONI** anche vuota.

Per esempio, possiamo pensare che una variabile $\Gamma$ denoti $\mathbf{\Gamma} \equiv [\,]$ la lista vuota oppure

$$\mathbf{\Gamma} \equiv \mathsf{pr_1}, \mathbf{pr_2}, \ldots \mathbf{pr_n}$$

E poi indichiamo con

$$\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{\Delta}$$

un *generico sequente* ove $\Gamma$ e $\Delta$ rappresentano liste anche vuote di proposizioni.

**Esempio di sequente**. Ora mostriamo un esempio di formalizzazione in sequente.

L'asserzione

**Ammesso che "Il programma termina e dà risultato 1" allora "Il programma è corretto."**

dopo averla rappresentata secondo la convenzione della sezione 5 in tal modo

**Il programma termina e dà risultato 1.**
**Il programma è corretto.**

si può formalizzare con il sequente

$$\mathbf{P\&U \vdash C}$$

ponendo:
**P**="**Il programma termina**"
**U**="**Il programma dà risultato 1**"
**C**="**Il programma è corretto**"

## 9.2 Che proposizione rappresenta un sequente?

Coerentemente con quanto già espresso all'inizio sul significato di un sequente diciamo che il sequente $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$ rappresenta la proposizione

$$\mathbf{\Gamma}^{\&} \quad \rightarrow \quad \mathbf{\Delta}^{\vee}$$

ove le notazioni $\mathbf{\Gamma}^{\&}$ e $\mathbf{\Delta}^{\vee}$ sono definite a loro volta come segue:

| |
|---|
| $\Gamma^{\&} \equiv (\,\mathtt{pr_1}\&\mathtt{pr_2}\,)\ldots\&\mathtt{pr_n}$<br>è la congiunzione delle proposizioni in $\Gamma \equiv \mathtt{pr_1}, \mathtt{pr_2}, \ldots \mathtt{pr_n}$<br>oppure<br>$\Gamma^{\&} \equiv \mathtt{tt}$ (costante vero) se $\Gamma$ è la lista vuota<br>oppure<br>$\Gamma^{\&} \equiv \mathtt{pr_1}$ se $\Gamma \equiv \mathtt{pr_1}$ |
| $\Delta^{\vee} \equiv (\,\mathtt{pr_1}\vee\mathtt{pr_2}\,)\ldots\vee\mathtt{pr_n}$<br>è la disgiunzione delle proposizioni in $\Delta \equiv \mathtt{pr_1}, \mathtt{pr_2}, \ldots \mathtt{pr_n}$<br>oppure<br>$\Delta^{\vee} \equiv \perp$ (costante falso) se $\Delta$ è la lista vuota<br>oppure<br>$\Delta^{\vee} \equiv \mathtt{pr_1}$ se $\Delta \equiv \mathtt{pr_1}$ |

Queste notazioni sono usate nella definizione di validità di un sequente per interpretare una lista di proposizioni $\Gamma$ *a sinistra* del segno $\vdash$ come un'unica proposizione $\Gamma^{\&}$ che è la congiunzione (associata a sinistra) *delle proposizioni nella lista* $\Gamma$ e poi per interpretare una lista di proposizioni $\Delta$ *a destra* del segno $\vdash$ come un'unica proposizione $\Delta^{\vee}$ che è la *disgiunzione* (associata a sinistra) *delle proposizioni nella lista* $\Delta$.

In particolare

*il contesto vuoto a sinistra del segno* $\vdash$ rappresenta la costante *vero*

*il contesto vuoto a destra del segno* $\vdash$ rappresenta la costante *falso.*

Il motivo di ciò è il seguente. Si noti che data una lista di proposizioni $\Gamma \equiv \mathsf{pr_1}, \mathsf{pr_2}, \ldots \mathsf{pr_n}$ allora la concatenazione della lista $\Gamma$ con la lista vuota [ ] che indichiamo con una virgola

$$\Gamma, [\,]$$

è uguale alla lista $\Gamma$ ovvero

$$\Gamma, [\,] = \Gamma \qquad\qquad [\,], \Gamma = \Gamma$$

e questo succede per le liste sia a destra che a sinistra del sequente. Ma allora dovremmo avere che

$$(\Gamma, [\,])^{\&} = \Gamma^{\&} = ([\,], \Gamma)^{\&}$$

come pure

$$(\Delta, [\,])^{\vee} = \Delta^{\vee} = ([\,], \Delta)^{\vee}$$

e siccome il simbolo $\Gamma^{\&}$ esprime la congiunzione delle proposizioni in $\Gamma$ si ha che

$$(\Gamma, [\,])^{\&} = \Gamma^{\&}\&([\,])^{\&} \qquad ([\,], \Gamma)^{\&} = ([\,])^{\&}\&\Gamma^{\&}$$

ovvero $[\,]^{\&}$ deve soddisfare

$$\Gamma^{\&}\&([\,])^{\&} = \Gamma^{\&}$$

e quindi $([\,])^{\&}$ deve essere per forza $([\,])^{\&} = \top$ in quanto congiunto ad una proposizione non ne altera la tabella di verità.

Analogamente siccome il simbolo $\Delta^{\vee}$ esprime la disgiunzione delle proposizioni in $\Delta$ si ha che

$$(\Delta, [\,])^{\vee} = \Delta^{\vee} \vee ([\,])^{\vee} \qquad ([\,], \Delta)^{\vee} = ([\,])^{\vee} \vee \Delta^{\vee}$$

ovvero $[\,]^{\vee}$ deve soddisfare

$$\Delta^{\vee} \vee ([\,])^{\vee} = \Gamma^{\vee}$$

e quindi deve essere per forza $([\,])^{\vee} = \perp$ in quanto messo in disgiunzione con una proposizione non ne altera la tabella di verità.

## 9.3 Calcolo dei sequenti della Logica classica proposizionale $\mathrm{LC}_p$

Il calcolo dei sequenti è composto da assiomi e da delle regole con cui operiamo *trasformazioni di sequenti* secondo lo schema

*se* VALE QUESTO SEQUENTE (o QUESTI due SEQUENTI) *allora* VALE QUEST'ALTRO SEQUENTE

Un esempio di tale trasformazione utilizzando la convenzione di sezione 5 è la scrittura

$$\frac{\mathbf{P}\&\mathbf{U} \vdash \mathbf{C}}{\mathbf{P}\&\mathbf{U} \vdash \mathbf{C}\vee\neg\mathbf{P}}$$

il cui significato è il seguente:
"**se** vale $\mathbf{P}\&\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{C}$ **allora** vale pure $\mathbf{P}\&\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{C}\vee\neg\mathbf{P}$"

Ora presentiamo il calcolo dei sequenti $\mathrm{LC}_p$ per la Logica classica proposizionale che contiene regole per i connettivi $\perp$, $\&$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$ assieme all' **assioma identità** e alle regole di **scambio a destra e a sinistra** come segue

$$\begin{array}{ccc} \text{ax-id} & \text{ax-}\perp & \text{ax-}\mathtt{tt} \\ \Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta' & \Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \nabla & \Gamma \vdash \nabla, \mathtt{tt}, \nabla' \end{array}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'}\ \mathrm{sc_{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc_{dx}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta}\ \rightarrow-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}\ \rightarrow-\mathrm{S}$$

e tale calcolo è chiuso su tutte le regole ottenute istanziando le variabili **A** e **B** con proposizioni arbitrarie e i contesti denotati con lettere greche $\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Delta}, \mathbf{\Sigma}$, **etc.** con liste arbitrarie di proposizioni (anche vuote).

In pratica l'assioma identità è uno *schema* di assiomi uno per ogni sostituzione delle lettere greche $\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Delta}, \mathbf{\Sigma}$, **etc.** con liste precise di proposizioni e le lettere **A** e **B** con proposizioni qualsiasi.

## 9.4 A che serve il calcolo? A costruire derivazioni!

Il nostro calcolo serve a costruire **alberi di derivazione**.

Si osservi che nel calcolo dei sequenti presentato ci sono due tipi di regole: quelle ad una premessa e quelle a due premesse del tipo

$$\frac{\Gamma' \vdash D'}{\Gamma \vdash D}\ \textbf{regola1} \qquad \frac{\Gamma'' \vdash D'' \quad \Gamma'''' \vdash D''''}{\Gamma \vdash D}\ \textbf{regola2}$$

ove i sequenti sopra la sbarra $\mathbf{\Gamma' \vdash D'}$ nella regola 1 e i sequenti $\mathbf{\Gamma'' \vdash D''}$ e $\mathbf{\Gamma'''' \vdash D''''}$ nella regola 2 si dicono **premesse**, mentre il sequente $\mathbf{\Gamma \vdash D}$ in entrambi i casi si dice **conclusione**.

Poi nel calcolo ci sono anche regole a zero premesse ovvero gli **assiomi** che sono del tipo

$$\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ \mathbf{\Gamma_1, A, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, A, \Delta_2}\end{array}$$

oppure

$$\begin{array}{c}\text{ax-}\bot\\ \mathbf{\Gamma}, \bot, \mathbf{\Gamma'} \vdash \nabla\end{array}$$

Una derivazione è un genere particolare di albero del tipo

$$\dfrac{\Gamma_1 \vdash D_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma_5 \vdash D_5}{\Gamma_3 \vdash D_3}\ \textbf{regola1} \quad \dfrac{\Gamma_6 \vdash D_6}{\Gamma_4 \vdash D_4}\ \textbf{regola1}}{\Gamma_2 \vdash D_2}\ \textbf{regola2}}{\Gamma \vdash D}\ \textbf{regola2}$$

con radice un sequente, detto **sequente conclusione**, che nel caso sopra è $\mathbf{\Gamma \vdash D}$
e con foglie i sequenti $\mathbf{\Gamma_1 \vdash D_1}$, $\mathbf{\Gamma_5 \vdash D_5}$, $\mathbf{\Gamma_6 \vdash D_6}$.

Per esempio nell'albero

$$\dfrac{\Gamma_1 \vdash D_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma_5 \vdash D_5}{\Gamma_3 \vdash D_3}\ \textbf{regola1} \quad \dfrac{\Gamma_6 \vdash D_6}{\Gamma_4 \vdash D_4}\ \textbf{regola1}}{\Gamma_2 \vdash D_2}\ \textbf{regola2}}{\Gamma \vdash D}\ \textbf{regola2}$$

la radice $\mathbf{\Gamma \vdash D}$ ha due predecessori $\mathbf{\Gamma_1 \vdash D_1}$ e $\mathbf{\Gamma_2 \vdash D_2}$ ed è stata ottenuta applicando la **regola 2**.

Si noti che siccome considereremo solo regole con al più due premesse allora ogni albero di derivazione avrà nodi con al più due predecessori.

Un **albero** come quello mostrato sopra si dice **albero di derivazione** o semplicemente **derivazione** del **sequente radice** se le sue foglie sono **ASSIOMI** (= **regole senza premesse**).

Più precisamente diamo la seguente definizione:

**Def. 9.1 (sequente derivabile)** *Un sequente* $\mathbf{\Gamma \vdash \Delta}$ *si dice* `derivabile` *nel calcolo dei sequenti* $\mathbf{LC}_p$ *se esiste un albero avente*

- $\mathbf{\Gamma \vdash \Delta}$ *come radice;*

- *ogni foglia è istanza di un assioma di* $\mathbf{LC}_p$
  *ottenuto* **sostituendo** *le variabili* **A**,**B** *con arbitrarie proposizioni* $\texttt{pr}_1$ *e* $\texttt{pr}_2$
  *e le variabili* $\mathbf{\Gamma}$, $\mathbf{\Delta}$, $\nabla$, $\mathbf{\Sigma}$ *con liste di proposizioni arbitrarie (anche con la lista vuota).*

- *l'albero è costruito applicando istanze delle regole del calcolo di* $\mathbf{LC}_p$
  *ottenute* **sostituendo** *le variabili* **A**,**B** *con arbitrarie proposizioni* $\texttt{pr}_1$ *e* $\texttt{pr}_2$
  *e le variabili* $\mathbf{\Gamma}$, $\mathbf{\Delta}$, $\nabla$, $\mathbf{\Sigma}$ *con liste di proposizioni arbitrarie (anche con la lista vuota).*

### 9.4.1 Quali sono gli assiomi in $\mathbf{LC_p}$

Gli assiomi in $\mathbf{LC_p}$ sono di tre tipi: gli assiomi identità, gli assiomi del falso e quelli del vero

$$\begin{array}{ccc} \textbf{ax-id} & \textbf{ax-}\bot & \text{ax-}\mathtt{tt} \\ \Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta' & \Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla & \Gamma \vdash \nabla, \mathtt{tt}, \nabla' \end{array}$$

Quindi un albero costruito a partire da un sequente è una derivazione se e solo se le sue foglie sono istanze degli assiomi sopra.

Si noti che è *assioma identità OGNI sequente* che ha *ALMENO UNA PROPOSIZIONE (o ATOMICA o COMPOSTA) che compare a sx e a dx del segno di sequente* $\vdash$.

Ad esempio noti che il sequente

$$\mathbf{A} \vdash \mathbf{A}$$

è un'istanza dell'assioma identità **ax-id** con $\mathbf{\Gamma}$, $\mathbf{\Gamma'}$, $\mathbf{\Delta}$ e $\mathbf{\Delta'}$ tutte liste vuote.

Pure una qualsiasi proposizione `pr` dà luogo con

$$\mathbf{\Gamma}, \mathtt{pr}, \mathbf{\Gamma'} \vdash \mathbf{\Delta}, \mathtt{pr}, \mathbf{\Delta'}$$

ad un'istanza dell'assioma identità **ax-id** dopo aver sostituito proprio `pr` al posto di $\mathbf{A}$.

Ad esempio il sequente

$$\mathbf{C}, \mathbf{P}, \mathbf{A} \& (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}), \mathbf{M} \ \vdash \mathbf{H} \& \mathbf{C}, \mathbf{A} \& (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C})$$

è *assioma identità* ove al posto di $\mathbf{\Gamma}$ c'è $\mathbf{C}, \mathbf{P}$, al posto di $\mathbf{A}$ c'è $\mathbf{A} \& (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C})$, al posto di $\mathbf{\Gamma'}$ c'è $\mathbf{M}$, al posto $\mathbf{\Delta}$ c'è $\mathbf{H} \& \mathbf{C}$ e al posto di $\mathbf{\Delta'}$ c'è la lista vuota.

Si noti che uno stesso sequente può essere riconosciuto assioma identità con diverse sostituzioni delle variabili di contesto che compaiono nello schema dell'assioma identità

$$\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A}, \mathbf{\Gamma'} \vdash \mathbf{\Delta}, \mathbf{A}, \mathbf{\Delta'}$$

Ad esempio il sequente

$$\mathbf{B}, \mathbf{D} \vee \mathbf{C}, \mathbf{S} \vdash \mathbf{H}, \mathbf{D} \vee \mathbf{C}, \mathbf{S}, \mathbf{M}$$

è un'istanza dell'assioma identità **ax-id** dopo aver sostituito nello schema sopra $\mathbf{A}$ con $\mathbf{S}$ e aver posto $\mathbf{\Gamma} \equiv \mathbf{B}, \mathbf{D} \vee \mathbf{C}$, la lista vuota al posto di $\mathbf{\Gamma'}$ e aver posto $\mathbf{\Delta} \equiv \mathbf{H}, \mathbf{D} \vee \mathbf{C}$ e infine $\mathbf{\Delta'} \equiv \mathbf{M}$.

Però lo stesso sequente

$$\mathbf{B}, \mathbf{D} \vee \mathbf{C}, \mathbf{S} \vdash \mathbf{H}, \mathbf{D} \vee \mathbf{C}, \mathbf{S}, \mathbf{M}$$

è ANCHE istanza dello schema assioma identità

$$\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A}, \mathbf{\Gamma'} \vdash \mathbf{\Delta}, \mathbf{A}, \mathbf{\Delta'}$$

in altro modo sostituendo $\mathbf{A}$ con $\mathbf{D} \vee \mathbf{C}$ e ponendo $\mathbf{\Gamma} \equiv \mathbf{B}$, poi $\mathbf{\Gamma'} \equiv \mathbf{S}$ e $\mathbf{\Delta} \equiv \mathbf{H}$ e infine $\mathbf{\Delta'} \equiv \mathbf{S}, \mathbf{M}$.

In sostanza un sequente è un assioma identità se compare ALMENO una *stessa proposizione* a sinistra e a destra del segno $\vdash$ e quindi a maggior ragione nei casi in cui compaiono più proposizioni sia a dx che a sx del segno $\vdash$.

### 9.4.2 Esempio di derivazione in $\mathbf{LC_p}$

Se ad esempio vogliamo costruire un albero di derivazione per il sequente

$$\mathbf{P}\&\mathbf{Q}\vdash\mathbf{Q}\&\mathbf{P}$$

dobbiamo scrivere il sequente come radice dell'albero e quindi costruire l'albero di derivazione dal BASSO verso l'ALTO applicando le regole, per esempio la $\&-$D come segue

$$\frac{\mathbf{P}\&\mathbf{Q}\vdash\mathbf{Q} \quad \mathbf{P}\&\mathbf{Q}\vdash\mathbf{P}}{\mathbf{P}\&\mathbf{Q}\vdash\mathbf{Q}\&\mathbf{P}}$$

Il lettore noti che questa regola è un'istanza della regola $\&-$D del calcolo ottenuta ponendo: $\mathbf{Q}$ al posto di $\mathbf{A}$, $\mathbf{P}$ al posto di $\mathbf{B}$ e la lista vuota al posto di $\boldsymbol{\Delta}$ e $\mathbf{P}\&\mathbf{Q}$ al posto di $\boldsymbol{\Gamma}$.

Si noti che il pezzo di derivazione

$$\frac{\mathbf{P}\&\mathbf{Q}\vdash\mathbf{Q} \quad \mathbf{P}\&\mathbf{Q}\vdash\mathbf{P}}{\mathbf{P}\&\mathbf{Q}\vdash\mathbf{Q}\&\mathbf{P}}\ \&-\mathrm{D}$$

NON è albero di derivazione completo perchè le sue foglie non sono assiomi!

Invece applicando altre regole arriviamo a questo albero di derivazione:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\textbf{ax-id}}{\mathbf{P},\mathbf{Q}\vdash\mathbf{Q}}}{\mathbf{P}\&\mathbf{Q}\vdash\mathbf{Q}}\ \&-\mathrm{S} \qquad \cfrac{\cfrac{\textbf{ax-id}}{\mathbf{P},\mathbf{Q}\vdash\mathbf{P}}}{\mathbf{P}\&\mathbf{Q}\vdash\mathbf{P}}\ \&-\mathrm{S}}{\mathbf{P}\&\mathbf{Q}\vdash\mathbf{Q}\&\mathbf{P}}\ \&-\mathrm{D}$$

ove $\mathbf{P}\&\mathbf{Q}\vdash\mathbf{Q}\&\mathbf{P}$ è la RADICE mentre $\mathbf{P},\mathbf{Q}\vdash\mathbf{Q}$ e $\mathbf{P},\mathbf{Q}\vdash\mathbf{P}$ sono rispettivamente foglie del ramo di sinistra e di quello di destra.