

LA TEORIA DEI TIPI

MARIA EMILIA MAIETTI

1. INTRODUZIONE

La teoria dei tipi odierna è una branca sia della matematica che dell'informatica. In Italia è studiata sia da gruppi di informatici, per esempio quelli presso l'Università di Torino (si veda [Car15]) e presso l'Università di Bologna (si veda la sezione su "Verifica automatica" in questo volume), che da gruppi di matematici come quello dei logici dell'Università di Padova di cui faccio parte.

Il principale oggetto di studio della teoria dei tipi sono i sistemi formali che classificano gli enti matematici tramite i "tipi" e i loro elementi detti "termini".

La teoria dei tipi è stata originariamente introdotta da Bertrand Russell nei primi del novecento come fondamento affidabile della matematica di fronte alla contraddittorietà da lui notata di alcune formulazioni insiemistiche (rimandiamo il lettore a [Coq14] per un approfondimento delle sue origini).

2. PROPRIETÀ DISTINTIVE DELLA TEORIA DEI TIPI

Sottolineiamo di seguito alcune caratteristiche che distinguono la teoria dei tipi dalla teorie degli insiemi assiomatiche nello stile di quella di Zermelo-Fraenkel.

Distinzione tra tipi e loro elementi. La principale novità della teoria dei tipi rispetto alle teorie degli insiemi assiomatiche alla Zermelo-Fraenkel, incluse quelle in versione costruttiva descritte in [Cro14], è che mentre in queste ultime sia gli enti matematici che i loro elementi sono indistintamente insiemi (per esempio il numero "3" è un insieme tanto quanto l'insieme dei numeri naturali), in teoria dei tipi gli elementi dei tipi non sono generalmente a loro volta tipi e sono descritti separatamente, e pure separatamente vengono descritte le uguaglianze tra tipi e tra termini, anche se in modo mutuamente ricorsivo tra loro.

Tali distinzioni ricordano quella di oggetto e morfismo e relative uguaglianze di una categoria. A testimonianza di ciò si può osservare il fatto che per molte teorie dei tipi è più naturale definire una nozione di modello utilizzando la teoria delle categorie invece che la usuale teoria degli insiemi (si veda per esempio [Rey84]).

Definizione primitiva di funzione del lambda-calcolo di Church. Un'altro aspetto molto rilevante che distingue molte teorie dei tipi attuali dalla teoria

Dipartimento di Matematica "Tullio Levi Civita"
Università di Padova
indirizzo di posta elettronica: maietti@math.unipd.it.

degli insiemi è l'adozione della notazione del *lambda-calcolo* di Church che permette di definire *funzioni in modo primitivo* come *lambda-termini* associando ad esse un tipo che ne stabilisce dominio e codominio. Se la teoria dei tipi ha abbastanza costrutti per interpretare la logica del primo ordine con la possibilità di definire relazioni funzionali, allora ci si può chiedere se una qualsiasi relazione funzionale $R(x, y)$ ($x \in A, y \in B$) definibile nella teoria tra due tipi A, B descriva il grafo di una lambda-funzione con dominio A e codominio B . Il principio affermando che ogni relazione funzionale è il grafo di una lambda-funzione va sotto il nome di *assioma di scelta unica* e non è derivabile in tutte le teorie dei tipi (per esempio non è derivabile nella “Minimalist Foundation” descritta in sezione 4).

Molteplici interpretazioni della teoria dei tipi: insiemistica, computazionale, logica. Alcune teorie dei tipi ammettono più di una interpretazione che spiega la natura dei loro tipi e termini:

- Un'interpretazione *insiemistica* secondo cui i tipi rappresentano insiemi e i loro termini i corrispondenti elementi. Tale interpretazione consente di considerare la teoria dei tipi come una *teoria degli insiemi*.
- Un'interpretazione *computazionale* secondo cui i tipi sono visti come tipi di dati di un linguaggio di programmazione e i loro termini come programmi che producono output del loro tipo di dati. Tale interpretazione consente di considerare la teoria dei tipi come un *linguaggio di programmazione*;
- Un'interpretazione *logica* secondo cui i tipi rappresentano proposizioni e i loro termini codifiche di loro dimostrazioni. Tale interpretazione consente di considerare la teoria dei tipi come un *calcolo logico*.

In genere le teorie dei tipi ammettono l'interpretazione computazionale per tutti i tipi mentre solo alcuni tipi vengono visti come insiemi e altri ancora come proposizioni.

Proposizioni come tipi. La lettura logica menzionata nella voce precedente secondo cui le *proposizioni logiche* possono essere rappresentate come *tipi delle loro dimostrazioni codificate tramite opportuni termini* fu introdotta da H. Curry (si veda [DP14] per i riferimenti bibliografici). Essa permette di rappresentare *i connettivi logici come costruttori di tipi*. Ad esempio il connettivo *implicazione* viene fatto corrispondere al *tipo delle funzioni del lambda-calcolo* tra il tipo dell'antecedente a quello del conseguente. Inoltre l'operazione di astrazione dell'assunzione di una proposizione in una dimostrazione che permette di dedurre un'implicazione viene fatta corrispondere all'operazione di lambda-astrazione del lambda-calcolo di Church relativo al termine codificante la derivazione di partenza.

La corrispondenza tra proposizioni e tipi e tra dimostrazioni di una proposizione e termini tipati risulta molto naturale se si adotta il formalismo della *deduzione naturale* di Prawitz come sistema formale per le deduzioni proposizionali (si veda [Coq14] per riferimenti bibliografici).

Predicati come tipi. Un'importante novità della teoria dei tipi di Russell rispetto alla teoria degli insiemi è stata quella di adottare l'idea di Frege di rappresentare un predicato $P(x)$ come *funzione proposizionale* da un dominio di definizione della variabile x , rappresentato come un tipo, a valori in un tipo di tutte le proposizioni (per approfondimenti si veda [Coq14]).

Se la teoria dei tipi ammette anche la definizione di una singola proposizione come un tipo nel senso di Curry, allora il tipo delle proposizioni è di fatto un tipo di tipi, talvolta chiamato “universo” delle proposizioni.

Sviluppando ulteriormente questa idea, W. Howard e N. de Bruijn dapprima e P. Martin-Löf poi (si veda [Coq14] per i riferimenti bibliografici) hanno introdotto in teoria dei tipi la rappresentazione dei *predicati* come *tipi dipendenti*. Questa rappresentazione ha a sua volta ispirato una grossa novità inconcepibile nei formalismi di logica e teoria degli insiemi allora conosciuti. Tale novità consiste nel fatto di poter definire *predicati che dipendono da tipi che sono a loro volta predicati o proposizioni* ovvero di poter definire *predicati dipendenti da dimostrazioni di proposizioni/predicati codificati come termini*.

Coerentemente con la rappresentazione di predicati come tipi dipendenti anche le *quantificazioni universali ed esistenziali* e pure *l'uguaglianza proposizionale* possono essere definite in teoria dei tipi come *costruttori di tipi dipendenti*. In particolare la *rappresentazione intensionale del tipo dell'uguaglianza proposizionale* nella teoria dei tipi di Martin-Löf ha permesso di stabilire importanti collegamenti tra la *teoria dei tipi* e la *teoria dell'omotopia in topologia* di cui tratteremo brevemente nel seguito.

3. LA TEORIA DEI TIPI DI MARTIN-LÖF

Negli anni '70 Per Martin-Löf ha introdotto una teoria dei tipi chiamata **Intuitionistic Type Theory**. Attualmente tale teoria è denominata semplicemente **Martin-Löf's type theory** e nel seguito per essere brevi ci riferiremo ad essa con la sola sigla **MLTT**.

Un aspetto rilevante della teoria **MLTT** che ha attratto l'interesse sia di informatici che di matematici come pure di filosofi e linguisti, e negli ultimi anni anche di un vincitore di una medaglia Fields come Vladimir Voevodsky, è descritto in una pubblicazione di Martin-Löf del 1982 intitolata “*Computer programming and constructive mathematics*” in cui l'autore propone la sua *teoria dei tipi* sia come *paradigma di un linguaggio di programmazione* che al contempo come *una teoria degli insiemi* adatta a *formalizzare la matematica costruttiva*, per esempio l'analisi costruttiva sviluppata da E. Bishop [Bis67], con la *possibilità di estrarre il contenuto computazionale delle dimostrazioni costruttive tramite programmi*. Questa doppia identità di **MLTT** come “fondazione per la matematica” e “linguaggio di programmazione (funzionale)” ha ispirato l'introduzione di programmi detti *proof-assistant* in grado di aiutare un utente a formalizzare una dimostrazione matematica al calcolatore utilizzando il linguaggio di **MLTT**.

Il primo testo comprensivo di ogni dettaglio sulla teoria dei tipi [Mar84] è stato scritto e pubblicato nel 1984 proprio in Italia a cura di Giovanni Sambin.

In esso è descritta quella che ora si chiama *versione estensionale* di **MLTT**. Questa teoria è alla base del proof-assistant “Nuprl” sviluppato negli Stati Uniti da un gruppo di informatici della Cornell University.

Descrizione di tipi e termini tramite giudizi. La teoria dei tipi **MLTT** di Martin-Löf non è descritta come una teoria della logica del primo ordine come ad esempio accade per la teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel.

MLTT è invece descritta in modo primitivo attraverso quattro forme principali di giudizi

$$A \text{ type } [\Gamma] \quad A = B \text{ type } [\Gamma] \quad a \in A [\Gamma] \quad a = b \in A [\Gamma]$$

a cui si aggiunge un giudizio per derivare i contesti Γ della forma

$$\Gamma \text{ cont}$$

Tra i contesti vi sono la lista vuota e liste di assunzioni della forma

$$x_1 \in A_1, x_2 \in A(x_1), \dots, x_n \in A_n(x_1, \dots, x_{n_1})$$

con un carattere *telescopico*, nel senso che in tali liste la prima assunzione a sinistra consta di una variabile x_1 tipata con un tipo chiuso A_1 , mentre la seconda assunzione consta di una variabile x_2 tipata con un tipo $A(x_1)$ che può dipendere dall'assunzione x_1 e così via fino a giungere all'ultima assunzione data dalla variabile x_n che è tipata con un tipo che può dipendere da tutte le precedenti assunzioni.

Inoltre il significato delle quattro forme principali di giudizi è il seguente:

- il giudizio $A \text{ type } [\Gamma]$ afferma che A è un tipo nel contesto Γ ;
- il giudizio $A = B \text{ type } [\Gamma]$ afferma che il tipo A è uguale *per definizione* al tipo B nel contesto Γ ;
- il giudizio $a \in A [\Gamma]$ afferma che il termine a è di tipo A nel contesto Γ ;
- il giudizio $a = b \in A [\Gamma]$ afferma che il termine a di tipo A è uguale *per definizione* al termine b anche lui di tipo A nel contesto Γ .

La teoria dei tipi consiste poi in regole di inferenza per derivare contesti Γ e poi giudizi nelle forme elencate sopra.

Tali giudizi della teoria dei tipi di Martin-Löf ammettono almeno due interpretazioni: una computazionale e una insiemistica. Inoltre permettono un'interpretazione dei connettivi e quantificatori della logica intuizionista.

Secondo l'interpretazione computazionale i tipi vengono identificati come *tipi di dato* e i loro elementi come *programmi dipendenti dagli input del contesto*. Quindi in particolare:

- il giudizio $A \text{ type } [\Gamma]$ afferma che A è un tipo di dati indicato dal contesto Γ ;
- il giudizio $A = B \text{ type } [\Gamma]$ afferma che i tipi di dati A e B , entrambi indicati da medesimi indici nel contesto Γ , sono *computazionalmente* uguali;

- il giudizio $a \in A \ [\Gamma]$ afferma che il termine a è un programma di specifica A nel contesto Γ ;
- il giudizio $a = b \in A \ [\Gamma]$ afferma che i programmi a e b di specifica A , tutti indicati da medesimi indici nel contesto Γ , sono *computazionalmente* uguali.

Secondo l'interpretazione insiemistica i *tipi* non dipendenti da un contesto rappresentano degli *insiemi* e i *tipi dipendenti da un contesto* rappresentano delle *famiglie di insiemi indicate dal contesto* mentre i loro elementi sono semplicemente visti come elementi dell'insieme o della famiglia di insiemi indicata dal contesto. Quindi in particolare:

- il giudizio $A \text{ type} \ [\Gamma]$ afferma che A è una famiglia di insiemi indicata dal contesto Γ ;
- il giudizio $A = B \text{ type} \ [\Gamma]$ afferma che le famiglie A e B , entrambe indicate da medesimi indici nel contesto Γ , sono uguali;
- il giudizio $a \in A \ [\Gamma]$ afferma che il termine a è un elemento della famiglia A indicato dal contesto Γ ;
- il giudizio $a = b \in A \ [\Gamma]$ afferma che gli elementi a e b della famiglia A , tutti indicati da medesimi indici nel contesto Γ , sono uguali.

L'interpretazione dei connettivi logici e delle quantificazioni logiche data da Martin-Löf nella sua teoria dei tipi è un'estensione di quella data da Curry e Howard. Secondo questa interpretazione *alcuni tipi rappresentano proposizioni dipendenti da un contesto*, ovvero rappresentano dei *predicati* e i loro elementi sono *proof-term* ovvero codifiche di loro dimostrazioni dipendenti dalle assunzioni del contesto su cui sono definiti.

Quindi in particolare per tali tipi

- il giudizio $A \text{ type} \ [\Gamma]$ rappresenta una proposizione A dipendente dal contesto Γ ;
- il giudizio $A = B \text{ type} \ [\Gamma]$ afferma che le proposizioni A e B , entrambe dipendenti da medesime variabili nel contesto Γ , sono uguali;
- il giudizio $a \in A \ [\Gamma]$ afferma che il termine a è un *proof-term* della proposizione A , ovvero un termine denotante una dimostrazione della proposizione A , dipendente dal contesto Γ ;
- il giudizio $a = b \in A \ [\Gamma]$ afferma che i proof-term a e b della proposizione A , tutti dipendenti da medesime variabili nel contesto Γ , sono uguali.

C'è da osservare che saranno poi i costruttori di tipi e di termini a rendere appropriata ciascuna di queste letture.

La varietà di interpretazioni del concetto di tipo e dei suoi elementi presentata è alla base dei collegamenti della teoria dei tipi con la logica, l'informatica e i

fondamenti della matematica. Applicazioni notevoli sono presenti anche in ambito filosofico e linguistico (si veda [DP14] per un approfondimento).

Correttezza dei programmi in MLTT. Un'importante caratteristica dei programmi funzionali rappresentabili nella teoria dei tipi di Martin-Löf come termini tipati è che sono *totali e terminanti*. Inoltre *dimostrare che un programma in MLTT è un elemento di un tipo* che ne rappresenta la sua specifica corrisponde a *verificare la correttezza del programma* rispetto alla sua specifica.

Costruttività di MLTT. La teoria dei tipi di Martin-Löf supporta una naturale interpretazione della *logica intuizionista* ed anzi dell'*aritmetica intuizionista*, mentre non rende valida la logica classica che è falsificata proprio dalla semantica computazionale di MLTT già menzionata (in particolare dai teoremi di riduzione a forma normale a cui accenneremo più avanti) o da modelli della *realizzabilità* in [Tv88].

Si osservi inoltre che la dimostrazione che lo zero è diverso da ogni numero naturale successore richiede l'uso di un universo [Smi88].

Pensando al fatto che le proposizioni sono interpretate come tipi delle loro dimostrazioni codificate come proof-term, e che comunque i tipi di Martin-Löf ammettono un'interpretazione computazionale, possiamo considerare i proof-term come dei *realizzatori* e l'interpretazione dell'aritmetica intuizionista nella teoria dei tipi di Martin-Löf come una alternativa all'interpretazione della realizzabilità di Kleene [Tv88].

3.1. Aspetti insiemistici della teoria dei tipi di Martin-Löf. Nel seguito sottolineeremo soprattutto gli aspetti caratteristici della teoria dei tipi di Martin-Löf in quanto fondazione insiemistica della matematica costruttiva.

Predicatività della teoria dei tipi di Martin-Löf. Tutti i tipi della teoria di Martin-Löf MLTT nelle sue varie versioni [Mar71, Mar84, NPS90a] sono predicativi nel senso che sono tutti **induttivamente generati** da dei costruttori a cui è associato un **principio di induzione** con uno schema ricorsivo per definire funzioni dal tipo introdotto a valori in tipi già definiti precedentemente. Tale caratteristica non vale per tipi definiti impredicativamente come quelli della teoria dei tipi del Calcolo delle Costruzioni Induttive di T.Coquand and C. Paulin-Mohring [CP90] su cui si basa il famoso proof-assistant francese Coq.

In MLTT però gli universi non sono dotati di una eliminazione induttiva anche se, essendo comunque entità induttivamente generate, sarebbe possibile aggiungerla senza perdere la consistenza dell'intera teoria. Il motivo di tale assenza è che secondo Martin-Löf la sua teoria dei tipi è da considerarsi una teoria *aperta* a

possibili estensioni con altri **tipi induttivi** e questa proprietà è messa in risalto proprio dalle particolari regole degli universi.

La predicatività degli universi di **MLTT** è garantita dal fatto che essi sono chiusi solo su codici di tipi cosiddetti *più piccoli* e quindi non contengono il codice di se stessi (questa accortezza permette di evitare l'inconsistenza riscontrata da Y. Girard in una delle prime versioni di **MLTT**).

Lo schema di definizione induttiva dei tipi e termini di **MLTT** segue quello della *deduzione naturale di Gentzen-Prawitz* attraverso regole di *introduzione* a cui vengono associate, secondo uno schema uniforme, regole di *eliminazione* e regole di *uguaglianza definizionale dei costruttori introdotti*.

Presentiamo ora due esempi di tipi, il **tipo prodotto dipendente** e il **tipo dei numeri naturali**, con le loro regole di formazione e di introduzione ed eliminazione dei loro termini e alcune loro uguaglianze.

Il **tipo prodotto dipendente** è definito dalla seguente regola di formazione

$$\text{F-II)} \quad \frac{C(x) \text{ type } [\Gamma, x \in B]}{\prod_{x \in B} C(x) \text{ type } [\Gamma]}$$

dove si introduce il tipo prodotto dipendente $\prod_{x \in B} C(x)$ nel contesto Γ a partire da un tipo dipendente qualsiasi $C(x)$ dipendente dalla variabile x di tipo B oltre che da Γ .

Poi vi è una regola per formare gli elementi del tipo prodotto dipendente

$$\text{I-II)} \quad \frac{c(x) \in C(x) [\Gamma, x \in B]}{\lambda x. c(x) \in \prod_{x \in B} C(x) [\Gamma]}$$

che usa la notazione del lambda-calcolo di Church assieme alla seguente regola

$$\text{E-II)} \quad \frac{b \in B [\Gamma] \quad f \in \prod_{x \in B} C(x) [\Gamma]}{\text{Ap}(f, b) \in C(b) [\Gamma]}$$

che rappresenta l'applicazione di una funzione nel tipo dipendente su un argomento in modo tale che valga la seguente equazione tipica del lambda-calcolo

$$\beta\text{C-II)} \quad \frac{b \in B [\Gamma] \quad c(x) \in C(x) [\Gamma, x \in B]}{\text{Ap}(\lambda x. c(x), b) = c(b) \in C(b) [\Gamma]}$$

Con il tipo prodotto dipendente si rappresenta pure il tipo delle funzioni tra due tipi A e B , denotato con il simbolo $A \rightarrow B$, tramite la seguente definizione

$$A \rightarrow B \equiv \prod_{x \in A} B$$

ove si pensa il tipo B come dipendente da A , anche se non vi dipende. Infatti usando le regole date sopra del tipo prodotto dipendente con questa definizione

risulta che gli elementi del tipo $A \rightarrow B$ sono proprio funzioni che associano elementi di tipo B ad elementi di tipo A come ci si aspetta.

Nello stesso tempo il tipo prodotto dipendente permette di interpretare pure la quantificazione universale e l'implicazione a patto di rappresentare i predicati come tipi dipendenti. Infatti supposto di aver un predicato dipendente da un tipo B rappresentato dal tipo dipendente $\alpha(x)$ *type* $[x \in B]$ la sua quantificazione universale su B si interpreta in tal modo

$$\forall_{x \in B} \alpha(x) \equiv \Pi_{x \in B} \alpha(x)$$

Analogamente date due proposizioni α e β pensate come tipi l'implicazione tra loro si può definire in tal modo

$$\alpha \rightarrow \beta \equiv \Pi_{x \in \alpha} \beta$$

Ora mostriamo le regole del **tipo dei numeri naturali** iniziando con il presentare la sua regola di formazione che consente di dichiarare il tipo dei numeri naturali sotto ogni contesto Γ di assunzioni di variabili tipate:

$$\text{Nat-F)} \quad \frac{\Gamma \text{ cont}}{\text{Nat type } [\Gamma]}$$

Vi sono poi regole per formare i numeri naturali canonici che includono lo zero e il successore di un qualsiasi altro suo elemento

$$\text{Nat-I}_1) \quad \frac{\Gamma \text{ cont}}{0 \in \text{Nat } [\Gamma]} \quad \text{Nat-I}_2) \quad \frac{m \in \text{Nat } [\Gamma]}{\text{succ}(m) \in \text{Nat } [\Gamma]}$$

Poi si aggiunge la regola di eliminazione che formalizza la definizione di una funzione $\text{El}_{\text{Nat}}(m, d, e)$ dai numeri naturali verso un qualsiasi altro tipo dipendente tramite una generalizzazione della definizione di funzione ricorsiva primitiva

$$\text{Nat-e)} \quad \frac{\begin{array}{l} m \in \text{Nat } [\Gamma] \quad D(z) \text{ type } [\Gamma, z \in \text{Nat}] \\ d \in D(0) [\Gamma] \quad e(x, z) \in D(\text{succ}(x)) [\Gamma, x \in \text{Nat}, z \in D(x)] \end{array}}{\text{El}_{\text{Nat}}(m, d, e) \in C(m) [\Gamma]}$$

grazie alla presenza delle seguenti due regole di uguaglianza definizionale

$$\text{Nat-c}_1) \quad \frac{\begin{array}{l} D(z) \text{ type } [\Gamma, z \in \text{Nat}] \\ d \in D(0) [\Gamma] \quad e(x, z) \in D(\text{succ}(x)) [\Gamma, x \in \text{Nat}, z \in D(x)] \end{array}}{\text{El}_{\text{Nat}}(0, d, e) = d \in D(0) [\Gamma]}$$

$$\text{Nat-c}_2) \quad \frac{\begin{array}{l} m \in \text{Nat } [\Gamma] \quad D(z) \text{ type } [\Gamma, z \in \text{Nat}] \\ d \in D(0) [\Gamma] \quad e(x, z) \in D(\text{succ}(x)) [\Gamma, x \in \text{Nat}, z \in D(x)] \end{array}}{\text{El}_{\text{Nat}}(\text{succ}(m), d, e) = e(m, \text{El}_{\text{Nat}}(m, d, e)) \in D(\text{succ}(m)) [\Gamma]}$$

Un esempio di funzione definita usando le regole sopra è la funzione primitiva ricorsiva della somma di due numeri naturali. In tal caso $D(z)$ è proprio il tipo dei

numeri naturali e la somma di due numeri naturali x' e y' risulta definita in tal modo:

$$x' + y' = \text{El}_{\text{Nat}}(y', x', (x, z).\text{succ}(z)) \in \text{Nat} [x' \in \text{Nat}, y' \in \text{Nat}]$$

ove la notazione $(x, z).\text{succ}(z)$ codifica l'espressione ipotetica della quarta premessa nella regola di eliminazione **Nat-e**.

Se invece pensiamo al tipo $D(z)$ come un predicato su un numero naturale $z \in \text{Nat}$ allora si nota che il termine $\text{El}_{\text{Nat}}(m, d, e)$ di tipo $D(m)$ parameterizzato su m, d ed e , sotto l'ipotesi di validità delle assunzioni nel contesto Γ , rappresenta una codifica del *principio di induzione sui numeri naturali* per il predicato $D(z)$.

Infatti la funzione

$$\lambda z. \text{El}_{\text{Nat}}(z, d, e)$$

scritta nella notazione del lambda calcolo è una funzione di tipo

$$\Pi_{z \in \text{Nat}} D(z)$$

che rappresenta una codifica di una dimostrazione di

$$\forall_{z \in \text{Nat}} D(z)$$

sotto contesto Γ a partire appunto da una dimostrazione codificata del caso base dell'induzione

$$d \in D(0)$$

e da una dimostrazione del passo induttivo

$$\lambda x. \lambda y. e(x, y) \in \forall_{x \in \text{Nat}} \forall_{y \in D(x)} D(\text{succ}(x))$$

sotto contesto Γ .

Due forme di uguaglianza tra termini. Una novità peculiare della teoria dei tipi di Martin-Löf è la distinzione di due forme di uguaglianza tra termini e tipi. Abbiamo già menzionato che, in **MLTT**, dati due termini di tipo A sotto un certo contesto

$$a \in A [\Gamma] \quad b \in A [\Gamma]$$

possiamo esprimere su di essi un giudizio di **uguaglianza definizionale**

$$a = b \in A [\Gamma]$$

che, ricordiamo, dice pure che i termini a e b sono *uguali computazionalmente*. Ma dati i termini suddetti all'interno di **MLTT** possiamo anche formare un **tipo dipendente dell'uguaglianza proposizionale**

$$\text{ld}(A, a, b) \text{ type } [\Gamma]$$

che è da considerarsi alla stregua di una vera e propria proposizione i cui elementi denotano dimostrazioni della proposizione di uguaglianza del termine a con b . In particolare se riusciamo a derivare un proof-term p di tale tipo, ovvero se riusciamo a derivare nella teoria un giudizio del tipo

$$p \in \text{ld}(A, a, b) [\Gamma]$$

allora possiamo concludere che il termine a è uguale *proposizionalmente* al termine b .

Martin-Löf ha introdotto due versioni diverse della sua teoria dei tipi

- una versione *intensionale*;
- una versione *estensionale*.

che si distinguono proprio per le regole dell'uguaglianza proposizionale relativamente al fatto di riuscire a rendere equivalente la derivabilità dell'uguaglianza definizionale $a = b \in A \ [\Gamma]$ tra due termini $a \in A \ [\Gamma]$ e $b \in A \ [\Gamma]$ con la validità della loro uguaglianza proposizionale tramite un proof-term, per esempio p , per cui si derivi $p \in \text{ld}(A, a, b) \ [\Gamma]$.

La versione estensionale della teoria dei tipi di Martin-Löf. Tale versione è introdotta in [Mar84] e si caratterizza per il fatto che *l'uguaglianza definizionale* di due termini è *equivalente* alla *validità dell'uguaglianza proposizionale* relativa agli stessi termini.

La versione intensionale della teoria dei tipi di Martin-Löf. Questa versione è descritta nel libro [NPS90b] ed è chiamata *intensionale* in quanto *l'uguaglianza definizionale* di due termini implica *soltanto l'esistenza di un proof-term dell'uguaglianza proposizionale* relativa agli stessi termini ed ammette esempi di termini che sono uguali dal punto di vista *proposizionale* ma *non sono uguali definizionalmente* o in altre parole non sono identici computazionalmente.

Un'altra caratteristica della versione intensionale è che non è detto che i proof-term del tipo uguaglianza proposizionale siano unici ossia valga per il tipo uguaglianza proposizionale la cosiddetta *proof-irrelevance*; difatti per tale tipo si dice che vale la *proof-relevance*.

Dipendenza del tipo uguaglianza da altri tipi uguaglianza. Un'ulteriore peculiare caratteristica del tipo uguaglianza proposizionale introdotto da Martin-Löf in tutte le sue versioni è che *il tipo uguaglianza proposizionale può dipendere dai proof-term di una proposizione qualsiasi, incluso un'altro tipo uguaglianza proposizionale!* In altre parole possiamo considerare il tipo uguaglianza proposizionale del tipo uguaglianza proposizionale di due termini

$$\text{ld}(\text{ld}(A, a, b), p, q) \text{ type } [\Gamma]$$

e poi il tipo uguaglianza proposizionale del tipo uguaglianza proposizionale di un altro tipo uguaglianza di due termini

$$\text{ld}(\text{ld}(\text{ld}(A, a, b), p, q), l, k) \text{ type } [\Gamma]$$

e così via iterando il tipo uguaglianza proposizionale a piacimento. Questa dipendenza dà luogo ad una sorta di struttura infinitaria di gruppoide debole.

Un modello che esalta la versione *proof-relevant* del tipo uguaglianza proposizionale è in [HS98] ed è un precursore del modello omotopico della teoria dei tipi di Martin-Löf in [KLL12].

I ruoli del tipo somma indicata: come somma disgiunta o assioma di separazione o quantificazione esistenziale. Martin-Löf ha introdotto nella sua teoria dei tipi dipendenti un costrutto detto *somma indicata* che si scrive

$$\Sigma_{x \in A} B(x) \text{ type } [\Gamma]$$

di un tipo $B(x) \text{ type } [\Gamma, x \in A]$ dipendente da un contesto formato a sua volta da un contesto Γ esteso con l'assunzione di una variabile nel tipo A che può dipendere dal contesto Γ stesso.

Il tipo somma indicata ha varie funzioni a seconda di cosa rappresenta il tipo dipendente di partenza a cui si applica.

Innanzitutto se $B(x) \text{ type } [\Gamma, x \in A]$ rappresenta una famiglia di insiemi allora il tipo $\Sigma_{x \in A} B(x) \text{ type } [\Gamma]$ rappresenta la somma disgiunta della famiglia rispetto all'insieme A di indici.

Se invece il tipo dipendente $B(x) \text{ type } [\Gamma, x \in A]$ rappresenta *un predicato dipendente dai tipi in Γ e da A* allora il tipo $\Sigma_{x \in A} B(x)$ può essere usato per rappresentare due concetti diversi:

- *l'insieme ottenuto per separazione* dall'insieme rappresentato da A con il predicato $B(x)$ ovvero permette la seguente identificazione

$$\{ x \in A \mid B(x) \} = \Sigma_{x \in A} B(x)$$

- *la quantificazione esistenziale su A del predicato $B(x)$* ovvero permette la seguente identificazione

$$\exists_{x \in A} B(x) = \Sigma_{x \in A} B(x)$$

Validità della regola e dell'assioma di scelta. Ricordiamo che una delle tante formulazioni equivalenti del cosiddetto *assioma di scelta di Zermelo* afferma che *per ogni relazione totale $R(x, y)$ da un insieme A ad un insieme B esiste una funzione, detta funzione di scelta da A a B , il cui grafo è contenuto nella relazione $R(x, y)$* ovvero valgono i seguenti enunciati

$$(\mathbf{AC}_{A,B,R}) \quad \forall_{x \in A} \exists_{y \in B} R(x, y) \longrightarrow \exists_{f \in A \rightarrow B} \forall_{x \in A} R(x, f(x))$$

supposto che A e B siano insiemi e che con $A \rightarrow B$ si intenda l'insieme delle funzioni da A verso B e che $R(x, y)$ sia una relazione tra gli elementi di A e quelli di B .

Ora se interpretiamo lo schema $\mathbf{AC}_{A,B,R}$ al variare di A e B e $R(x, y)$ in insiemi e predicati della teoria dei tipi \mathbf{MLTT} di Martin-Löf, utilizzando l'interpretazione data da Martin-Löf delle formule logiche del primo ordine e interpretando $A \rightarrow B$

come l'insieme delle funzioni tra i due insiemi A e B , ne segue che ogni istanza di $AC_{A,B,R}$ risulta *valida* in **MLTT** ovvero in **MLTT** l'assioma di scelta è *valido*.

Va qui specificato che la particolare interpretazione delle formule del primo ordine data da Martin-Löf nella sua teoria dei tipi fa sì che ciascuna formula $AC_{A,B,R}$ risulti equivalente alla seguente altra formula $AC_{A,B,R}^{ML}$ pensando ad $R(x, y)$ come una famiglia di insiemi indicata sugli insiemi A e B

$$(AC_{A,B,R}^{ML}) \quad \prod_{x \in A} \sum_{y \in B} R(x, y) \simeq \sum_{f \in A \rightarrow B} \prod_{x \in A} R(x, \text{Ap}(f, x))$$

dato che Martin-Löf interpreta la quantificazione universale come prodotto dipendente, la quantificazione esistenziale come somma disgiunta indicata e l'implicazione pure come prodotto dipendente tra le proposizioni pensate come insiemi.

Si osservi che gli enunciati $AC_{A,B,R}^{ML}$ rappresentano una sorta di proprietà distributiva del prodotto dipendente sulla somma indicata e sono pure validi nella teoria degli insiemi Zermelo-Fraenkel **ZF** interpretando il prodotto dipendente in quello di **ZF** e la somma indicata in quella di **ZF** e gli $R(x, y)$ come famiglie di insiemi.

Risulta quindi di facile comprensione il motivo per cui l'assioma di scelta rappresentato dalle formule $AC_{A,B,R}$ risulti valido in **MLTT**.

Martin-Löf stesso in [Bel15, ML06] ha discusso l'assioma di scelta di Zermelo e la sua validità nella sua teoria di tipi argomentando come mai l'assioma di scelta diventa *accettabile e dimostrabile* in una teoria degli insiemi *intensionale e costruttiva*.

Dobbiamo però aggiungere che la validità costruttiva dello schema $AC_{A,B,R}$ è proprio una *peculiarità* della teoria dei tipi di Martin-Löf. Infatti in quasi tutte le altre teorie costruttive note, tra cui la teoria interna dei topos elementari o la teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel in versione costruttiva, lo schema $AC_{A,B,R}$ *non risulta dimostrabile e neanche accettabile costruttivamente sotto forma di assunzione*.

Il motivo è che la validità di $AC_{A,B,R}$ in tali teorie costruttive implica la validità del principio del terzo escluso (per un famoso argomento dovuto originariamente a Diaconescu) comportando la perdita del contenuto computazionale e costruttivo originario della teoria in questione:

Teorema (Diaconescu): *Ogni topos elementare che rende valida ogni formula $AC_{A,B,R}$ nel suo linguaggio interno, al variare di A e B tra gli oggetti del topos, rende valido pure il principio del terzo escluso, ovvero rende valida la formula*

$$\phi \vee \neg\phi$$

per ogni formula ϕ della teoria.

Teorema (Goodman-Myhill): *Nella teoria costruttiva degli insiemi di Zermelo-Fraenkel di Aczel la validità dello schema $AC_{A,B,R}$ implica il principio del terzo escluso.*

La causa della perdita di costruttività dovuta all'assunzione dello schema $AC_{A,B,R}$ si può ricondurre all'uso di questo schema su costruzioni tipicamente

estensionali di insiemi presenti nella teoria interna dei topos e in quella costruttiva di Zermelo-Fraenkel come gli insiemi quozienti o l'insieme delle parti di un insieme.

In particolare in [MV99, Mai99, Mai09] viene analizzata la dimostrazione originale di Diaconescu all'interno della teoria dei tipi intensionale mettendo in luce le proprietà estensionali necessarie alla sua validità.

Un'altra importante conseguenza dell'identificazione della quantificazione esistenziale con la somma indicata della teoria dei tipi **MLTT** è la validità della cosiddetta *regola di scelta* che afferma la *possibilità di estrarre un testimone della validità di una quantificazione esistenziale anche sotto contesto*, ovvero essa afferma che dalla validità di una quantificazione esistenziale

$$\exists_{x \in A} B(x) \text{ type } [\Gamma]$$

si può estrarre un *testimone* p e un proof-term q nella teoria (grazie alle proiezioni della somma indicata) per cui vale

$$q \in B(p) [\Gamma]$$

La regola di scelta è valida usualmente in una teoria costruttiva quando Γ è il contesto vuoto ed è proprio una peculiarità della teoria dei tipi di Martin-Löf che essa valga con contesti arbitrari.

Si noti che non si conoscono teorie dei tipi con proposizioni chiuse su una quantificazione universale ed esistenziale *impredicativa* e in cui sia possibile *l'identificazione della quantificazione esistenziale con il tipo somma indicata* e la conseguente validità della regola e dell'assioma di scelta.

Teoremi di riduzione dei termini a forma normale. Un'importante proprietà che distingue la versione intensionale della teoria dei tipi di Martin-Löf da quella estensionale, è che nella versione intensionale vale un teorema di riduzione dei termini a forma normale. Questo teorema, studiato da Martin-Löf sin dall'inizio dell'introduzione delle sue teorie dei tipi [Mar75], afferma che

Teorema: *Ogni termine tipato di MLTT in un qualsiasi contesto si riduce ad una forma normale.*

Questo teorema permette di dimostrare:

- la consistenza logica della teoria, ovvero che il tipo vuoto non ha elementi;
- la consistenza computazionale della teoria, ovvero che non si dà il caso che gli elementi di ogni tipo siano tutti uguali;
- la costruttività di **MLTT** ovvero che il principio del terzo escluso non è dimostrabile tramite un proof-term;
- la *decidibilità del type-checking*, ovvero permette di dedurre meccanicamente se ad un certo termine si può associare un certo tipo in un determinato contesto. Questa è una proprietà fondamentale per la formalizzazione interattiva al calcolatore delle dimostrazioni in teoria dei tipi, ad esempio tramite il proof-assistant svedese Agda o il francese Coq o l'italiano Matita dell'Università di Bologna (si veda la sezione “Verifica automatica” in questo volume).

È ben noto che la versione estensionale della teoria dei tipi di Martin-Löf in [Mar84] non soddisfa il teorema di riduzione dei termini a forma normale e che non esiste un algoritmo di controllo della correttezza dell'associazione di un tipo ad un dato termine in tale teoria, ovvero il type-checking della versione estensionale di **MLTT** è *indecidibile*.

Però è possibile dimostrare per teorie dei tipi estensionali una versione ridotta del teorema di riduzione a forma normale per *i soli termini senza variabili libere* ovvero per *i termini chiusi*.

Un importante contributo padovano ad opera di Annalisa Bossi e Silvio Valentini in [BV92] è stata la dimostrazione della validità del teorema di riduzione ad una forma normale canonica per i termini chiusi della teoria dei tipi estensionale di Martin-Löf in [Mar84]. Questo teorema, pur non implicando la decidibilità dell'uguaglianza computazionale, basta per dedurre la consistenza logica e la costruttività di tale teoria.

Rappresentazione delle funzioni ricorsive parziali in teoria dei tipi.

Dato che le funzioni definibili in una teoria dei tipi intensionale come **MLTT** rappresentano solo funzioni ricorsive totali, la rappresentazione delle funzioni ricorsive parziali in tali teorie necessita dell'uso di predicati.

In [BC05, BC08] and loc. cit. Ana Bove e Venanzio Capretta hanno proposto e analizzato un metodo per formalizzare funzioni ricorsive parziali formalizzando il loro dominio di definizione tramite un predicato induttivo e la definizione della funzione stessa per ricorsione sulla dimostrazione di appartenenza al dominio.

Successivamente hanno sviluppato altri metodi di rappresentazione delle funzioni ricorsive parziali definendo il loro dominio tramite la coinduzione in [Cap05, BC07]. Un'esplorazione panoramica dell'uso di tecniche coinduttive in teoria dei tipi che include le applicazioni relative alla rappresentazione di funzioni ricorsive parziali si trova in [Cap11].

Toolbox dei sottoinsiemi e topologia formale. Successivamente alla stesura del libro [Mar84] Giovanni Sambin in collaborazione con Martin-Löf in [Sam87] ha introdotto la nozione di *topologia formale* come struttura topologica di base per sviluppare la topologia costruttiva prendendo come fondamento la teoria dei tipi in [Mar84].

Il concetto di topologia formale è una versione *costruttiva e predicativa* del concetto di *locale* introdotto negli anni '70 per studiare la struttura algebrica astratta degli aperti di uno spazio topologico.

Alle ricerche in topologia formale hanno collaborato con Sambin, Silvio Valentini, loro studenti e ricercatori di università straniere tra cui Thierry Coquand e Peter Schuster. Tra i laureati padovani avviati alla ricerca in logica o in topologia formale o in teoria dei tipi ricordiamo: Giulia Battilotti, Sara Negri, l'autrice, Silvia Gebellato, Sara Sadocco, Claudia Faggian, Giovanni Curi, Ferruccio Guidi, Venanzio Capretta e Nicola Gambino.

A metà degli anni '90 in [SV98], a seguito della pratica acquisita di sviluppo della topologia in teoria dei tipi, Sambin in collaborazione con Valentini ha sentito la necessità di estendere il linguaggio della teoria dei tipi di Martin-Löf con il cosiddetto *toolbox dei sottoinsiemi*, ovvero con delle definizioni utili per rappresentare la collezione dei sottoinsiemi di un insieme non presente come costruito primitivo nella teoria dei tipi stessa.

Sambin ha ideato pure un principio detto del *forget-restore* secondo cui si possono aggiungere alla teoria dei tipi tutte quelle definizioni prive di informazioni tipiche della teoria dei tipi che in verità sono ripristinabili a posteriori nel momento in cui si dimostra che tali definizioni risultano godere di un'interpretazione opportuna in teoria dei tipi.

Parallelamente all'arricchimento della teoria dei tipi con il toolbox, Sambin ha anche arricchito la nozione di topologia formale (si veda [Sam03, Sam]) con nuovi concetti in grado di rappresentare algebricamente i chiusi di uno spazio topologico introducendo il concetto di *topologia positiva*. Successivamente ha pure avviato uno studio algebrico della stessa tramite le *overlap algebra*. Su questi temi Sambin ha stretto un'intensa collaborazione con un laureato palermitano Francesco Ciraulo ora membro del gruppo di logica padovano (si veda [Sam15] e per esempio [CS10]).

Modello dei quozienti sopra la teoria di Martin-Löf. Contrariamente a quel che accade nelle usuali teorie degli insiemi classiche, nelle teorie dei tipi intensionali non è presente un costruito tipato che rappresenta il quoziente di un insieme rispetto ad una relazione di equivalenza non decidibile. Per quanto riguarda la teoria dei tipi intensionale di Martin-Löf **MLTT** non c'è da sorprendersi di questo considerando che l'insieme quoziente dovrebbe avere come elementi le classi di equivalenza la cui uguaglianza definizionale non è decidibile come invece succede per l'uguaglianza definizionale tra termini tipati di **MLTT**.

Dall'altra parte essendo necessario per la formalizzazione della matematica rappresentare in teoria dei tipi anche gli insiemi quozienti la soluzione adottata finora è stata quella di rappresentare i quozienti costruendo sopra la teoria dei tipi un modello detto **setoid model** in cui un insieme è rappresentato come un'opportuno quoziente di un insieme intensionale rispetto ad una relazione di equivalenza (si veda [BCP03, Pal17] e loro citazioni ad esempio).

Una proprietà importante è che il modello dei setoidi sopra la teoria di Martin-Löf categoricamente è una *categoria localmente cartesiana chiusa* che è un *pretopos con alberi ben fondati* secondo la definizione in [MP00]. Uno studio astratto delle proprietà universali del modello dei setoidi sulla teoria di Martin-Löf e altre teorie si trova in [MR13b, MR13a, MR15].

3.2. Dalla teoria dei tipi estensionale di Martin-Löf ai linguaggi interni di strutture categoriali. Attualmente la versione intensionale della teoria dei tipi in [NPS90b] è considerata da Martin-Löf *la versione ortodossa della sua teoria dei tipi* in quanto più adatta di quella estensionale a formalizzare della matematica al calcolatore.

Tuttavia è stata proprio l'esistenza della versione estensionale in [Mar84] ad ispirare all'autrice in [Mai98, Mai05] una *teoria dei tipi dipendenti* che non è solo valida e completa rispetto a diverse classi di strutture categoriali, dalle categorie con limiti finiti, alle categorie regolari, ai pretopoi e ai topoi elementari, ma può pure essere usata come loro *linguaggio interno*, per altro in modo *modulare*.

Per esempio, il cosiddetto *frammento del primo ordine* della teoria dei tipi estensionale di Martin-Löf in [Mar84] può essere usato per rappresentare il linguaggio interno delle *categorie localmente cartesiane chiuse* secondo il teorema in [Mai05] (dimostrato a partire da risultati in [See83, Hof94]):

Teorema: *Ogni categoria localmente cartesiana chiusa (piccola, ovvero i cui oggetti formano un insieme e i cui morfismi formano un insieme) è equivalente alla categoria sintattica del suo linguaggio interno ottenuto come teoria del frammento del primo ordine della teoria dei tipi estensionale di Martin-Löf in [Mar84].*

Inoltre godono di un linguaggio interno in termini di teoria di tipi dipendenti estensionale alla Martin-Löf anche gli universi categoriali di Joyal [Mai10] utilizzati per una dimostrazione categoriale dei teoremi di incompletezza di Gödel.

È da notare che nelle teorie dei tipi dipendenti menzionate le proposizioni sono interpretate come insiemi con al più una prova, nel senso che, data una proposizione P con proof-term $p \in P$ e $q \in P$, allora il suo tipo uguaglianza proposizionale

$$\text{Id}(P, p, q)$$

è al più un singoletto, ovvero P è *proof-irrelevant* e la quantificazione esistenziale *non è interpretata* con il tipo somma indicata come avviene nell'interpretazione delle proposizioni data da Martin-Löf, in quanto i tipi *proof-irrelevant* non sono chiusi sul tipo somma indicata.

Un'importante conseguenza di questa diversa interpretazione delle proposizioni, e quindi dei loro connettivi e quantificatori, è che nelle teorie dei tipi dipendenti interne alle strutture categoriali menzionate *non vale in genere l'assioma di scelta* per le teorie in cui è esprimibile.

3.3. Univalent Foundation e Homotopy Type Theory. Vladimir Voevodsky nel 2006 ha costruito un modello della teoria dei tipi intensionale di Martin-Löf negli insiemi simpliciali (vedi [KLL12]). Tale modello, detto "omotopico", esalta in modo originale due caratteristiche peculiari del tipo uguaglianza proposizionale di Martin-Löf

- la sua *proof-relevance*;
- la possibilità di formare il tipo uguaglianza proposizionale di altri tipi uguaglianza proposizionale permettendo così di associare ad ogni tipo una struttura infinitaria di gruppoide debole.

Secondo il modello omotopico i tipi sono interpretati come *tipi di omotopia di spazi topologici* e le *proposizioni* sono *tipi omotopici delle loro prove* (si veda [Awo17]). In particolare tale modello rende vero un assioma detto *univalence* (o di univalenza) caratteristica principale delle *Univalent Foundation* proposte da Voevodsky in [Voe06, Voe10, PVW15]. L'idea delle Univalent Foundation ha ispirato l'introduzione della **Homotopy Type Theory**, in breve **HoTT**, come

estensione propria della teoria dei tipi di Martin-Löf con l'assioma di univalenza che essenzialmente garantisce che *strutture isomorfe possano essere considerate uguali* (si veda [Uni13]). Tale teoria appare ideale per sviluppare una versione sintetica e costruttiva della teoria dell'omotopia classica dato che l'assioma di univalenza afferma essenzialmente che il tipo uguaglianza proposizionale di due tipi pensati come spazi topologici è omotopicamente equivalente alle equivalenze omotopiche tra i due tipi.

Esempi di proprietà sintattiche ispirate dalla semantica omotopica della teoria dei tipi sono state individuate da N. Gambino in collaborazione con altri in [GG08, AGS12]. In particolare in [GG08] gli autori mostrano che la categoria sintattica della teoria dei tipi di Martin-Löf gode di un'importante proprietà omotopica ovvero è dotata di un *weak factorization system* indotto dal tipo di uguaglianza proposizionale. Invece in [AGS12] si dimostra una versione intensionale dell'equivalenza tra induzione e ricorsione tipica delle teorie estensionali come mostrato in [Mai05] e una caratterizzazione dei tipi di buoni ordini come algebre iniziali a meno di omotopia ispirati dalla caratterizzazione categoriale in [GH03].

Un importante avanzamento in teoria dei tipi offerto dalla Homotopy type theory è la concezione dei cosiddetti *higher inductive types* in [Uni13] costruiti secondo uno schema di generazione induttiva che oltre a generare gli elementi del nuovo tipo genera anche elementi del suo tipo di uguaglianza proposizionale che ne rappresenta la teoria omotopica. In particolare questi tipi includono la generazione di particolari tipi di quozienti.

Uno dei problemi aperti più rilevanti in Homotopy Type Theory è dotare **HoTT** di una semantica computazionale. Solo di recente è stato prodotto un modello *costruttivo* di **HoTT** il cui linguaggio interno ha ispirato l'introduzione di una nuova teoria dei tipi, chiamata *cubical type theory*, che sembra essere uno strumento utile a risolvere il problema (si veda [BCH13, CCM16, Hub16] e i relativi riferimenti bibliografici).

4. LA TEORIA DEI TIPI NELLA MINIMALIST FOUNDATION

La Minimalist Foundation, in breve **MF**, è un sistema formale a due livelli ideato assieme a Giovanni Sambin in [MS05]. Essa è intesa come una fondazione di base per la matematica costruttiva che ha la proprietà di essere compatibile con le più rilevanti fondazioni costruttive note in letteratura.

Il sistema formale completo si trova in [Mai09] ed entrambi i suoi livelli sono teorie dei tipi dipendenti alla Martin-Löf.

Nel seguito enunciamo alcune ragioni motivanti la costruzione di **MF**, le sue principali peculiarità e in cosa **MF** differisce dalla teoria dei tipi di Martin-Löf.

Perché introdurre una fondazione minimalista. L'idea di costruire una fondazione per la matematica costruttiva diversa da quelle presenti in letteratura e pure dotata di due livelli è scaturita principalmente da due esigenze:

- l'esigenza di introdurre un linguaggio formale il più possibile simile a quello della pratica matematica informale senza rinunciare ad interpretarlo in modo naturale in una teoria dei tipi intensionale, come quella di Martin-Löf, le cui dimostrazioni hanno un evidente contenuto computazionale e possono essere verificate facilmente al calcolatore da un *proof-assistant*;
- l'esigenza di fornire la matematica costruttiva di una fondazione *minimalista* compatibile con le più rilevanti fondazioni costruttive note in letteratura, vista l'assenza di una fondazione di riferimento comune per i matematici costruttivi come la teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel per i matematici classici, e la presenza di principi accettabili costruttivamente in alcune fondazioni costruttive ma non in altre. Ad esempio una dimostrazione in teoria dei tipi di Martin-Löf che usa l'assioma di scelta (che ricordiamo in tale teoria dei tipi è addirittura un teorema!) non è a priori interpretabile in una fondazione come la versione costruttiva della teoria di Zermelo-Fraenkel ad opera di Peter Aczel [AR01] o nel linguaggio interno di un topos generico [Mai05], in quanto in tali fondazioni l'assioma di scelta, oltre a non valere, non può neppure essere assunto in quanto rende le teorie in questione classiche e ne invalida l'interpretazione computazionale.

Nozione di fondazione a due livelli. Al fine di soddisfare queste esigenze abbiamo proposto in [MS05] come nozione di fondazione per la matematica costruttiva un *sistema formale a due livelli* dotato di:

- (1) un livello *intensionale* costituito da una teoria intensionale dotata di un'interpretazione computazionale che renda evidente l'estrazione del contenuto computazionale delle sue dimostrazioni; tale livello, se basato su una teoria dei tipi come quella intensionale di Martin-Löf, può essere pensato come la base di un proof-assistant per la formalizzazione interattiva al calcolatore delle sue prove;
- (2) un livello *estensionale* costituito da una teoria insiemistica formulata in un linguaggio vicino alla pratica matematica usuale e dotata di un'interpretazione nel livello intensionale in grado di ripristinare a livello intensionale le informazioni computazionali non presenti a livello estensionale, dimostrando così che il livello estensionale è ottenuto per astrazione da quello intensionale secondo il principio del *forget-restore* in [SV98].

Più specificatamente, come avviene nell'esempio della Minimalist Foundation in [Mai09], si richiede che gli *insiemi del livello estensionale* risultino interpretabili nel livello intensionale come *quozienti di insiemi a livello intensionale* e che in particolare *i predicati del livello estensionale* risultino interpretabili come *quozienti banali* dei corrispondenti predicati a livello intensionale.

Questa divisione sembra ricordare le due versioni di teoria dei tipi di Martin-Löf e non a caso. Infatti sia il livello intensionale che quello estensionale della Minimalist Foundation in [Mai09] sono descritti come particolari teorie dei tipi alla Martin-Löf

basate sulle sue versioni intensionale ed estensionale rispettivamente.

Caratteristiche delle teorie dei tipi di MF. Le teorie dei tipi associate ai livelli di **MF** possono brevemente essere descritte in tal modo:

- la teoria dei tipi intensionale di **MF** è versione *predicativa* della teoria dei tipi impredicativa e costruttiva chiamata *Calculus of Inductive Constructions* [CP90] che è alla base del proof-assistant francese *Coq* e ne eredita molte proprietà;
- la teoria dei tipi estensionale di **MF** può essere considerata una versione *minimalista*, e in particolare *predicativa*, della *teoria dei tipi dipendenti interna ad un generico topos elementare* in [Mai98, Mai05];
- l'interpretazione del livello estensionale nel livello intensionale di **MF** in [Mai09] è avvenuto tramite un modello di quozienti; l'analisi categoriale di tal modello, condotta dall'autrice in collaborazione con Giuseppe Rosolini, ha ispirato in [MR13b] la definizione di un *completamento dei quozienti relativo ad una opportuna dottrina* che *generalizza* ben noti *completamenti esatti* (si veda [MR15, MPR17]); Rosolini ha pure avviato alla ricerca su questi temi Fabio Pasquali, attualmente membro del gruppo di logica padovano e coautore di [MPR17];
- la teoria soddisfa i principi del *costruttivismo dinamico* di G. Sambin (vedi sezione su “Matematica Costruttiva” in [Sam15]).

L'assioma di scelta in MF. La struttura a due livelli di **MF** aiuta a capire meglio lo status dell'assioma di scelta in teoria dei tipi.

Infatti mentre l'estensione del livello intensionale di **MF** con l'assioma di scelta formulato tramite gli enunciati $AC_{A,B,R}$ al variare di A e B e $R(x, y)$ in insiemi e predicati del livello stesso risulta interpretabile nella teoria dei tipi di Martin-Löf **MLTT** (con un universo) e quindi conserva il carattere computazionale della teoria originaria, questo non accade estendendo il livello estensionale di **MF** con l'assioma di scelta formulato tramite gli enunciati $AC_{A,B,R}$ al variare di A e B e $R(x, y)$ in insiemi e predicati del livello stesso. Il motivo è che tale estensione risulta non essere più costruttiva in quanto in essa, grazie alla presenza di insiemi quozienti, si può riprodurre un argomento simile a quello originale di Diaconescu tramite il quale concludere la validità del principio del terzo escluso e la conseguente perdita del carattere costruttivo della teoria originale (si veda [Mai09]).

Infine se formuliamo gli enunciati $\mathbf{AC}_{A,B,R}$ nel linguaggio del livello estensionale di **MF** e li interpretiamo secondo l'interpretazione in [Mai09] nel modello dei quozienti costruito sopra il livello intensionale di **MF** otteniamo che la loro interpretazione risulta coincidere con l'*assioma di scelta estensionale* $\mathbf{AC}_{A,B,R,\simeq_A,\simeq_B}^{\text{ext}}$ con A e B insiemi dotati rispettivamente di una relazione di equivalenza \simeq_A su A e una \simeq_B su B e una relazione $R(x, y)$ da A a B compatibile con le relazioni di equivalenza \simeq_A e \simeq_B ove

$$(\mathbf{AC}_{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{R}, \simeq_{\mathbf{A}}, \simeq_{\mathbf{B}}}^{\text{ext}}) \quad \forall_{x \in A} \exists_{y \in B} R(x, y) \longrightarrow \exists_{f \in A \rightarrow B} (\mathbf{Ext}(\mathbf{f})_{\simeq_{\mathbf{A}}}^{\mathbf{B}} \ \& \ \forall_{x \in A} R(x, \mathbf{Ap}(f, x)))$$

e

$$\mathbf{Ext}(\mathbf{f})_{\simeq_{\mathbf{A}}}^{\mathbf{B}} \equiv \forall_{x_1 \in A} \forall_{x_2 \in A} (x \simeq_{\mathbf{A}} y \rightarrow \mathbf{Ap}(f, x_1) \simeq_{\mathbf{B}} \mathbf{Ap}(f, x_2))$$

posto che l'insieme $A \rightarrow B$ sia l'insieme delle funzioni intensionali da A a B .

Interpretando tali enunciati $\mathbf{AC}_{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{R}, \simeq_{\mathbf{A}}, \simeq_{\mathbf{B}}}^{\text{ext}}$ nella teoria dei tipi di Martin-Löf secondo la sua interpretazione dei connettivi e quantificatori logici si ritrova la formulazione del cosiddetto *extensional axiom of choice* data da Martin-Löf in [ML06] che permette di capire il significato dell'assioma di Zermelo formulato in una teoria estensionale all'interno della teoria dei tipi intensionale.

Principali differenze tra le teorie dei tipi di MF e la teoria dei tipi di Martin-Löf. Menzioniamo brevemente alcune caratteristiche distintive di **MF** rispetto alla teoria di Martin-Löf:

- entrambi i livelli di **MF** sono compatibili con teorie *predicative e classiche*, nel senso che rimangono *predicative* le loro estensioni con il principio del terzo escluso, contrariamente alla teoria dei tipi di Martin-Löf che con l'aggiunta di principi classici diventa impredicativa;
- entrambi i livelli di **MF** sono *indipendenti da assiomi di scelta e da regole di scelte*, incluso l'assioma di scelta unica e la regola di scelta unica (si veda [Mai17] e loc.cit.), come conseguenza del fatto che le proposizioni sono definite come *tipi primitivi*; inoltre l'idea in [MS05] di definire la logica in modo primitivo è stata adottata anche da P. Aczel e N. Gambino nella loro logic-enriched type theory in [GA06] al fine di studiare il ruolo dei principi di scelta nell'interpretazione della teoria costruttiva degli insiemi alla Zermelo-Fraenkel di Aczel in [AR01] nella teoria dei tipi di Martin-Löf;
- la teoria dei tipi intensionale di **MF** è interpretabile nelle più rilevanti teorie dei tipi intensionali note conservando il significato inteso di insiemi e proposizioni;
- la teoria dei tipi estensionale di **MF** è interpretabile nelle più rilevanti teorie degli insiemi note come fondazioni per la matematica costruttiva o classica conservando il significato inteso di insiemi e proposizioni;
- il livello intensionale di **MF** è *predicativo* nel senso di S. Feferman riguardo all'ordinale sufficiente per provarne la consistenza; tale fatto è stato dimostrato dall'autrice in collaborazione con Samuele Maschio, attualmente membro del gruppo padovano, in [MM16];
- **MF** è intesa come sistema di base per sviluppare *reverse mathematics* per la matematica costruttiva; quindi **MF** non è intesa come fondazione esaustiva per sviluppare tutta la matematica costruttiva possibile ma piuttosto come una *fondazione minimalista* da estendere opportunamente

con le eventuali costruzioni insiemistiche *extra* necessarie allo sviluppo matematico desiderato (in particolare con tutte le possibili definizioni di insiemi e proposizioni *induttive e coinduttive* utili per una formalizzazione predicativa della matematica costruttiva).

Abbiamo accennato all’inizio come la presenza dei due livelli della *Minimalist Foundation* è stata motivata pure dall’idea di formalizzare le sue dimostrazioni al calcolatore. Tuttavia attualmente non esiste un proof-assistant basato sul livello intensionale di **MF**, e sue estensioni con definizioni induttive e coinduttive, in grado di formalizzare le dimostrazioni del livello estensionale di **MF** e corrispondenti estensioni. Auspichiamo di poter colmare tale mancanza nel futuro grazie alla collaborazione con esperti informatici.

5. CONCLUSIONI

La teoria dei tipi dipendenti è un bellissimo esempio di teoria logico-matematica che per la sua varietà di interpretazioni, di natura insiemistica, logica e computazionale, rappresenta uno strumento prezioso per lo studio della logica e delle sue applicazioni.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [AR01] P. Aczel and M. Rathjen. Notes on constructive set theory. Mittag-Leffler Technical Report No.40, 2001.
- [Awo17] S. Awodey. A proposition is the (homotopy) type of its proofs. 2017. See <https://arxiv.org/abs/1701.02024>.
- [AGS12] S. Awodey, N. Gambino, and K. Sojakova. Inductive types in homotopy type theory. In *Proceedings of the 27th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science, LICS 2012, Dubrovnik, Croatia, June 25-28, 2012*, pages 95–104, 2012.
- [BCP03] G. Barthes, V. Capretta, and O. Pons. Setoids in type theory. *J. Funct. Programming*, 13(2):261–293, 2003. Special issue on Logical frameworks and metalanguages.
- [Bel15] John Bell. The axiom of choice in type theory. In *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2015. See <https://plato.stanford.edu/entries/axiom-choice/choice-and-type-theory.html>.
- [BCH13] M. Bezem, T. Coquand, and S. Huber. A model of type theory in cubical sets. In *19th International Conference on Types for Proofs and Programs, TYPES 2013, April 22-26, 2013, Toulouse, France*, pages 107–128, 2013.
- [Bis67] E. Bishop. *Foundations of Constructive Analysis*. McGraw-Hill Book Co., 1967.
- [BV92] A. Bossi and S. Valentini. An intuitionistic theory of types with assumptions of high-arity variables. *Ann. Pure Appl. Logic*, 57(2):93–149, 1992.
- [BC05] A. Bove and V. Capretta. Modelling general recursion in type theory. *Mathematical Structures in Computer Science*, 15(4):671–708, 2005.
- [BC07] A. Bove and V. Capretta. Computation by prophecy. In *Typed Lambda Calculi and Applications, 8th International Conference, TLCA 2007, Paris, France, June 26-28, 2007, Proceedings*, pages 70–83, 2007.
- [BC08] A. Bove and V. Capretta. A type of partial recursive functions. In *Theorem Proving in Higher Order Logics, 21st International Conference, TPHOLs 2008, Montreal, Canada, August 18-21, 2008. Proceedings*, pages 102–117, 2008.
- [Cap05] V. Capretta. General recursion via coinductive types. *Logical Methods in Computer Science*, 1(2), 2005.
- [Cap11] V. Capretta. Coalgebras in functional programming and type theory. *Theor. Comput. Sci.*, 412(38):5006–5024, 2011.

- [Car15] F. Cardone. Logica e informatica. In H. Hosni, G. Lolli, and C. Toffalori, editors, *Le direzioni della ricerca logica in Italia*, CRM Series, pages 85–115. Edizioni della Normale, 2015.
- [CCM16] S. Huber C. Cohen, T. Coquand and A. Mörtberg. Cubical Type Theory: a constructive interpretation of the univalence axiom. *ArXiv e-prints*, 2016. <https://arxiv.org/abs/1611.02108>.
- [Coq14] T. Coquand. Type theory. In *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2014. See <https://plato.stanford.edu/entries/type-theory/>.
- [CP90] T. Coquand and C. Paulin-Mohring. Inductively defined types. In Per Martin-Löf and Grigori Mints, editors, *COLOG-88: International Conference on Computer Logic, 1988 Proceedings*, volume 417 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 50–66, Berlin and Heidelberg, Germany, February 1990. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [Cro14] L. Crosilla. Set Theory: Constructive and intuitionistic ZF. In *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2014. See <https://plato.stanford.edu/entries/set-theory-constructive/>.
- [CS10] F. Ciraulo and G. Sambin. The overlap algebra of regular opens. *Journal of pure and applied algebra*, 214(11):1988–1995, 2010.
- [DP14] P. Dybjer and E. Palmgren. Type theory. In *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2014. See <https://plato.stanford.edu/entries/type-theory-intuitionistic/>.
- [GA06] N. Gambino and P. Aczel. The generalized type-theoretic interpretation of constructive set theory. *Journal of Symbolic Logic*, 71(1):67–103, 2006.
- [GG08] N. Gambino and R. Garner. The identity type weak factorisation system. *Theor. Comput. Sci.*, 409(1):94–109, 2008.
- [GH03] N. Gambino and M. Hyland. Wellfounded trees and dependent polynomial functors. In *Types for Proofs and Programs, International Workshop, TYPES 2003, Torino, Italy, April 30 - May 4, 2003, Revised Selected Papers*, pages 210–225, 2003.
- [Hof94] M. Hofmann. On the interpretation of type theory in locally cartesian closed categories. In *Proceedings of CSL'94*, September 1994.
- [HS98] M. Hofmann and T. Streicher. The groupoid interpretation of type theory. In G. Sambin and J. Smith, editors, *Twenty-five years of constructive type theory (Venice, 1995)*, volume 36 of *Oxford Logic Guides*, pages 83–111. Oxford Univ. Press, New York, 1998.
- [Hub16] S. Huber. *Cubical Interpretations of Type Theory*. PhD thesis, Göteborgs universitet. IT-fakulteten, Department of Computer Science and Engineering, 11 2016.
- [KLL12] C. Kapulkin and P. LeFanu Lumsdaine. The simplicial model of univalent foundations (After Voevodsky). *arXiv preprint arXiv:1211.2851*, 2012.
- [Mai98] M. E. Maietti. *The type theory of categorical universes*. PhD thesis, University of Padova, February 1998.
- [Mai99] M. E. Maietti. About effective quotients in Constructive Type Theory. In W. Naraschewski T. Altenkirch and B. Reus, editors, *Types for proofs and programs. International workshop, TYPES '98. Kloster Irsee, Germany, March 27-31. 1999*, volume 1657 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 164–178. Springer Verlag, 1999.
- [Mai05] M.E. Maietti. Modular correspondence between dependent type theories and categories including pretopoi and topoi. *Mathematical Structures in Computer Science*, 15(6):1089–1149, 2005.
- [Mai09] M. E. Maietti. A minimalist two-level foundation for constructive mathematics. *Annals of Pure and Applied Logic*, 160(3):319–354, 2009.
- [Mai10] M.E. Maietti. Joyals arithmetic universe as list-arithmetic pretopos. *Theory and Applications of Categories*, 24(3):39–83, 2010.
- [Mai17] M.E. Maietti. On choice rules in dependent type theory. In *Theory and Applications of Models of Computation - 14th Annual Conference, TAMC 2017, Bern, Switzerland, April 20-22, 2017, Proceedings*, pages 12–23, 2017.
- [MM16] M.E. Maietti and S. Maschio. A predicative variant of a realizability tripos for the minimalist foundation. *IfCoLog Journal of Logics and their Applications*, special issue Proof Truth Computation, 2016.

- [MPR17] M.E. Maietti, F. Pasquali and G. Rosolini. Tripases, exact completions, and hilbert's ϵ -operator. *Tbilisi Mathematical Journal*, 10(3):141–166, December 2017.
- [MR13a] M. E. Maietti and G. Rosolini. Elementary quotient completion. *Theory and Applications of Categories*, 27(17):445–463, 2013.
- [MR13b] M.E. Maietti and G. Rosolini. Quotient completion for the foundation of constructive mathematics. *Logica Universalis*, 7(3):371–402, 2013.
- [MR15] M.E. Maietti and G. Rosolini. Unifying exact completions. *Applied Categorical Structures*, 23(1):43–52, 2015.
- [MS05] M. E. Maietti and G. Sambin. Toward a minimalist foundation for constructive mathematics. In L. Crosilla and P. Schuster, editor, *From Sets and Types to Topology and Analysis: Practicable Foundations for Constructive Mathematics*, number 48 in Oxford Logic Guides, pages 91–114. Oxford University Press, 2005.
- [MV99] M. E. Maietti and S. Valentini. Can you add powersets to Martin-Löf intuitionistic type theory? *Mathematical Logic Quarterly*, 45:521–532, 1999.
- [Mar71] P. Martin Löf. Hauptsatz for the intuitionistic theory of iterated inductive definitions. In J.E. Fenstad, editor, *Proceedings of the second Scandinavian logic symposium*, North-Holland, pages 179–216. North-Holland, 1971.
- [Mar75] P. Martin Löf. An intuitionistic theory of types: predicative part. In *Logic Colloquium '73 (Bristol)*, volume 80 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, pages 73–118. North-Holland, Amsterdam, 1975.
- [Mar84] P. Martin-Löf. *Intuitionistic Type Theory. Notes by G. Sambin of a series of lectures given in Padua, June 1980*. Bibliopolis, Naples, 1984.
- [ML06] Per Martin-Löf. 100 years of Zermelo's axiom of choice: what was the problem with it? *The Computer Journal*, 49(3):10–37, 2006.
- [MP00] Ieke Moerdijk and Erik Palmgren. Wellfounded trees in categories. *Ann. Pure Appl. Logic*, 104(1-3):189–218, 2000.
- [NPS90a] B. Nordström, K. Petersson, and J. Smith. *Programming in Martin Löf's Type Theory*. Clarendon Press, Oxford, 1990.
- [NPS90b] B. Nordström, K. Petersson, and J. M. Smith. *Programming in Martin-Löf's Type Theory, an introduction*. Oxford University Press, 1990.
- [Pal17] Erik Palmgren. Constructions of categories of setoids from proof-irrelevant families. *Arch. Math. Log.*, 56(1-2):51–66, 2017.
- [PVW15] Álvaro Pelayo, Vladimir Voevodsky, and Michael A. Warren. A univalent formalization of the p-adic numbers. *Mathematical Structures in Computer Science*, 25:1147–1171, 2015.
- [Rey84] John C. Reynolds. Polymorphism is not set-theoretic. In Gilles Kahn, David B. MacQueen, and Gordon D. Plotkin, editors, *Semantics of Data Types*, volume 173 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 145–156. Springer, 1984.
- [Sam] G. Sambin. *Positive Topology and the Basic Picture. New structures emerging from constructive mathematics*. Oxford University Press. To appear.
- [Sam87] G. Sambin. Intuitionistic formal spaces - a first communication. In D. Skordev, editor, *Mathematical Logic and its Applications*, pages 187–204. Plenum, 1987.
- [Sam03] G. Sambin. Some points in formal topology. *Theoretical Computer Science*, 305:347–408, 2003.
- [Sam15] G. Sambin. Matematica costruttiva. In H. Hosni, G. Lolli, and C. Toffalori, editors, *Le direzioni della ricerca logica in Italia*, CRM Series, pages 255–282. Edizioni della Normale, 2015.
- [SV98] G. Sambin and S. Valentini. Building up a toolbox for Martin-Löf's type theory: subset theory. In G. Sambin and J. Smith, editors, *Twenty-five years of constructive type theory, Proceedings of a Congress held in Venice, October 1995*, pages 221–244. Oxford U. P., 1998.
- [See83] R. A. G. Seely. Hyperdoctrines, natural deduction and the beck condition. *Zeitschr. f. math. Logik. und Grundlagen d. Math.*, 29:505–542, 1983.

- [Smi88] J. Smith. The independence of Peano’s fourth axiom from Martin L of’s type theory without universes. *Journal of Symbolic Logic*, 53, 1988.
- [Tv88] A. S. Troelstra and D. van Dalen. Constructivism in mathematics, an introduction, vol. I and II. In *Studies in logic and the foundations of mathematics*. North-Holland, 1988.
- [Uni13] The Univalent Foundations Program. *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*. Institute for Advanced Study, 2013. see <https://homotopytypetheory.org/book>.
- [Voe06] V. Voevodsky. A very short note on homotopy λ -calculus. *Unpublished*, page 1–7, September 2006.
- [Voe10] V. Voevodsky. Univalent foundations project. *A modified version of an NSF grant application*, page 1–12, October 2010.

Maria Emilia Maietti

Dipartimento di Matematica “Tullio Levi-Civita”, Universit  degli Studi di Padova
maietti@math.unipd.it