ANALISI MATEMATICA 1

Commissione V. Casarino, P. Mannucci, C. Marchi
Ingegneria Gestionale, Meccanica-Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 10 Luglio 2012

TEMA 1

Esercizio 1 (9 punti)
Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{\arctan|x^2-1|}$$

(a) Determinare il dominio di f, eventuali simmetrie, periodicità e segno della funzione.

(b) Determinare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di f.

(c) Studiare la continuità e la derivabilità di f; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f.

(d) Calcolare i limiti di f', se significativi.

(e) Disegnare un grafico qualitativo di f in tutto il dominio.

Facoltativo: Studiare la convessità di f sull'intervallo $(1, +\infty)$ e determinare gli eventuali flessi.

Esercizio 2 (8 punti).

(a) Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = \frac{4 + \log x}{x(9 - \log^2 x)}$$

e dedurne il massimo intervallo contenente $x_0 = 2$ sul quale la funzione è definita.

(b) Calcolare tutte le primitive di f su tale intervallo.

Esercizio 3 (8 punti). Si consideri la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{2}{n} - \log(1 + \frac{2}{n})\Big)\frac{1}{n^\alpha}.$$

(a) Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il termine $n-$esimo della serie a_n tende a zero.

(b) Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie converge.

Esercizio 4 (6 punti). Si consideri la funzione

$$g(x, y) = e^{2x \log y}$$

.

(a) Determinare il dominio di definizione di g e disegnarlo nel piano cartesiano.

(b) Calcolare le derivate parziali prime di g.

(c) Calcolare le derivate direzionali di g nel punto $(1, 1)$ nella generica direzione $\mathbf{v} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\alpha \in [0, 2\pi)$.

Tempo: **due ore e mezza**. Motivare tutte le risposte

N.B. Le parti facoltative vanno svolte dopo aver completato le altri parti e non servono per ottenere l'ammissione all'orale.

N.B. Chi è sorpreso a parlare o copiare non solo verrà allontanato dall'aula ma non potrà sostenere l' appello successivo a questo.

ANALISI MATEMATICA 1

Commissione V. Casarino, P. Mannucci, C. Marchi

Ingegneria Gestionale, Meccanica-Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 10 Luglio 2012

TEMA 2

Esercizio 1 (9 punti)

Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{\arctan|x^2-4|}$$

(a) Determinare il dominio di f, eventuali simmetrie, periodicità e segno della funzione.

(b) Determinare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di f.

(c) Studiare la continuità e la derivabilità di f; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f.

(d) Calcolare i limiti di f', se significativi.

(e) Disegnare un grafico qualitativo di f in tutto il dominio.

Facoltativo: studiare la convessità di f sull'intervallo $(2, +\infty)$ e determinare gli eventuali flessi.

Esercizio 2 (8 punti).

(a) Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = \frac{3 + \log x}{x(16 - \log^2 x)}$$

e dedurne il massimo intervallo contenente $x_0 = 3$ sul quale la funzione è definita.

(b) Calcolare tutte le primitive di f su tale intervallo.

Esercizio 3 (8 punti). Si consideri la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{3}{n} - \log(1 + \frac{3}{n})\Big)\frac{1}{n^\alpha}.$$

(a) Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il termine $n-$esimo della serie a_n tende a zero.

(b) Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie converge.

Esercizio 4 (6 punti). Si consideri la funzione

$$g(x, y) = e^{2y \log x}$$

.

(a) Determinare il dominio di definizione di g e disegnarlo nel piano cartesiano.

(b) Calcolare le derivate parziali prime di g.

(c) Calcolare le derivate direzionali di g nel punto $(2, 2)$ nella generica direzione $\mathbf{v} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\alpha \in [0, 2\pi)$.

Tempo: **due ore e mezza**. Motivare tutte le risposte

N.B. Le parti facoltative vanno svolte dopo aver completato le altri parti e non servono per ottenere l'ammissione all'orale.

N.B. Chi è sorpreso a parlare o copiare non solo verrà allontanato dall'aula ma non potrà sostenere l' appello successivo a questo.

ANALISI MATEMATICA 1

Commissione V. Casarino, P. Mannucci, C. Marchi
Ingegneria Gestionale, Meccanica-Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 10 Luglio 2012

Soluzioni del tema 1

Esercizio 1

$$f(x) = e^{\arctan|x^2-1|}$$

(a) Il dominio di f è tutto $\mathbb{R}$. Inoltre, poiché $f(x) = f(-x)$, la funzione è pari, cioè simmetrica rispetto all'asse delle ordinate. La funzione, essendo un esponenziale, è sempre positiva e inoltre, poiché l'argomento dell'esponente è sempre maggiore o uguale a zero, si ha che $f(x) \geq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre $f(\pm 1) = 1$ quindi $x = \pm 1$ sono i punti di minimo assoluto e $f = 1$ è il minimo assoluto. Per la simmetria della funzione, studiamola per $x \geq 0$ e di conseguenza otterremo le informazioni anche per gli $x < 0$.

(b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = e^{\pi/2}$ quindi $y = e^{\pi/2}$ è un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. Inoltre, poiché $\arctan() < \pi/2$ si ha che $f(x) < e^{\pi/2}$, quindi $f(x)$ tende a $e^{\pi/2}$ "da sotto".

(c) La funzione è continua su $\mathbb{R}$ perché composizione di funzioni continue. Per studiarne la derivata prima conviene spezzare la funzione per $x > 1$ e per $0 < x < 1$. Per $x > 1$ si ha $f(x) = e^{\arctan(x^2-1)}$ da cui $f'(x) = e^{\arctan(x^2-1)} \frac{1}{1+(x^2-1)^2} 2x$. Quindi, poiché stiamo considerando gli $x > 1$ si ha che $f' > 0$ cioè f è strettamente crescente per ogni $x > 1$. Per $0 < x < 1$ si ha $f(x) = e^{\arctan(1-x^2)}$ da cui $f'(x) = e^{\arctan(1-x^2)} \frac{1}{1+(1-x^2)^2}(-2x)$. Quindi, poiché stiamo considerando gli $0 < x < 1$ si ha che $f' < 0$ cioè f è strettamente decrescente per ogni $0 < x < 1$. Inoltre abbiamo già osservato in a) che $x = 1$ è un punto di minimo assoluto. Nel punto $x = 0$ f è derivabile. Inoltre f è strettamente decrescente a destra di 0 ed è simmetrica, $f(0) = e^{\pi/4}$, quindi $x = 0$ è un punto di massimo relativo.

(d) Dall'espressione della derivata prima di f trovata in c) si ha che $f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = 2$ e $f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = -2$ quindi f non è derivabile in $x = 1$ e $x = 1$ è un punto spigoloso. Una volta ottenute tutte queste informazioni si può disegnare il grafico per $x > 0$ e poi disegnare la curva simmetrica rispetto all'asse delle y ottenendo così il grafico di $f(x)$.

Facoltativo: Derivando l'espressione di f' per $x > 1$ si ottiene $f''(x) = e^{\arctan(x^2-1)} \frac{2}{(1+(x^2-1)^2)^2}(-3x^4 + 2 + 4x^2)$. Poiché la funzione è due volte derivabile per $x > 1$ i possibili flessi si trovano cercando gli zeri di f'', ciè risolvendo $-3x^4 + 2 + 4x^2 = 0$. Ponendo $x^2 = y$ si ha $3y^2 - 4y - 2 = 0$ da cui $x^2 = \frac{2+\sqrt{10}}{3}$. Quindi c'è un flesso per $x > 1$ in $x_0 = \sqrt{\frac{2+\sqrt{10}}{3}}$ e la funzione è concava a destra di tale punto e convessa per $1 < x < x_0$.

Esercizio 2

(a) Il dominio della funzione

$$f(x) = \frac{4 + \log x}{x(9 - \log^2 x)}$$

si ottiene imponendo $x > 0$ (in quanto x è argomento del logaritmo) e la condizione $\log^2 x \neq 9$, cioè $\log x \neq \pm 3$, cioè ancora $x \neq e^{\pm 3}$. Risulta quindi

$$\text{dom} f := \{x > 0 \,:\, x \neq e^{\pm 3}\} = (0, e^{-3}) \cup (e^{-3}, e^3) \cup (e^3, +\infty)\,.$$

Ciò implica che il più grande intervallo contenente $x_0 = 2$ sul quale la funzione è definita sia (e^{-3}, e^3).

(b) Calcoliamo l'integrale indefinito

$$I := \int \frac{4 + \log x}{x(9 - \log^2 x)}\,dx$$

imponendo la sostituzione $\log x = t$. Otteniamo

$$I = \int \frac{4+t}{9-t^2}dt = \int \frac{3+t+1}{(3+t)(3-t)}dt = \int \frac{1}{3-t}dt + \int \frac{1}{(3+t)(3-t)}dt$$

$$= -\log|3-t| + C + \int \frac{1}{(3+t)(3-t)} dt\,.$$

Per calcolare quest'ultimo integrale, applichiamo il metodo dei fratti semplici, ottenendo

$$\int \frac{1}{(3+t)(3-t)} dt = \frac{1}{6}\int \frac{1}{3+t} dt + \frac{1}{6}\int \frac{1}{3-t} dt = \frac{1}{6}\log|3+t| - \frac{1}{6}\log|3-t| + C\,.$$

Si ha quindi

$$I = -\log|3-t| + \frac{1}{6}\log|3+t| - \frac{1}{6}\log|3-t| + C = \frac{1}{6}\log|3+t| - \frac{7}{6}\log|3-t| + C$$

$$= \frac{1}{6}\log|3+\log x| - \frac{7}{6}\log|3-\log x| + C\,.$$

Concludiamo osservando che sull'intervallo (e^{-3}, e^3) l'insieme delle primitive di f si può scrivere come

$$I = \frac{1}{6}\log(3+\log x) - \frac{7}{6}\log(3-\log x) + C\,.$$

Esercizio 3

Per $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri

$$a_n = \Big(\frac{2}{n} - \log(1+\frac{2}{n})\Big)\frac{1}{n^\alpha}.$$

Usando lo sviluppo di Taylor della funzione $\log(1+x)$ di ordine 2 ($\log(1+x) = x - x^2/2 + o(|x|^2)$), otteniamo

$$\Big(\frac{2}{n} - \log(1+\frac{2}{n})\Big) \sim \frac{2}{n^2} \qquad \text{per } n \to +\infty$$

e quindi

$$a_n \sim \frac{2}{n^{\alpha+2}}.$$

Ne deduciamo

(a) $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ se, e solo se, $\alpha > -2$;

(b) per il criterio del confronto asintotico, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente se $\alpha > -1$, divergente se $\alpha \leq -1$.

Esercizio 4

(a) Il dominio della funzione è dato da tutti i punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ove risulti definito "$\log y$" cioè è l'insieme

$$\mathrm{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, y > 0\}.$$

(b) Le derivate parziali della funzione g sono

$$g_x(x, y) = (2\log y)e^{2x\log y}, \qquad g_y(x, y) = \frac{2x}{y}e^{2x\log y}.$$

(c) Per la formula del gradiente, la derivata direzionale della g nella direzione $\mathbf{v} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ è

$$D_{\mathbf{v}}g(1, 1) = g_x(1, 1)\cos\alpha + g_y(1, 1)\sin\alpha = 2\sin\alpha.$$