Analisi Matematica 1   2011/2012

- numeri e funzioni
- limiti di successioni e di funzioni
- derivate e studio di funzione
- Taylor e sviluppi asintotici
- Integrali
- Serie
- Funzioni in più variabili

Cap. 1 Numeri

Insieme A, B, X

elementi a, b, x

$a \in A$ — a elemento — $\{a\}$ insieme

$A = \{a, b, c\}$ $\qquad \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

$D := \{n \in \mathbb{N} : \underbrace{n \text{ è dispari}}_{p(n)}\}$ proprietà o predicato

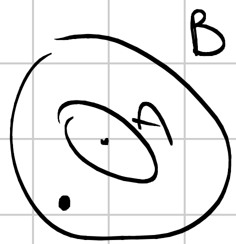
Simboli $\forall, \exists, \nexists, \exists!, \Rightarrow, \Leftrightarrow,$

$\notin, \emptyset$

$A = B \iff \forall x \in A \Rightarrow x \in B$ e $\forall x \in B \Rightarrow x \in A$ $\qquad A \subseteq B$, $B \subseteq A$

$A \subseteq B$ A sottinsieme di B

$\iff \forall x \in A \Rightarrow x \in B$

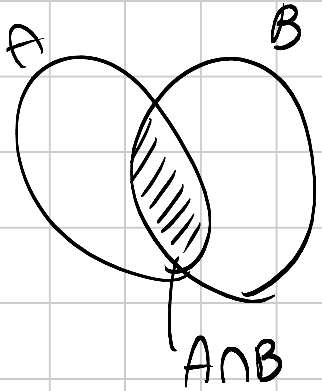


$A \subsetneq B$ A è strettamente contenuto in B

$\forall x \in A \Rightarrow x \in B$

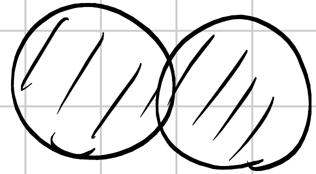
e $\exists x \in B$ t.c. $x \notin A$

$A \subseteq B$

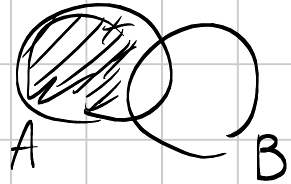


$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$

$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}$



$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$



$X \qquad A \subseteq X$

$C_X A = X \setminus A = A^c$

complementare

$\emptyset$ insieme vuoto = l'insieme che ha zero elementi.

$\emptyset \subseteq A \quad \forall A$ insieme

Insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$

$X \qquad \mathcal{P}(X) = \{$ sottinsiemi di $X \}$

es. $X = \{a, b, c\}$ $\quad X$ ha 3 elementi

$$\mathcal{P}(X) = \{ \emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\} \}$$

$\mathcal{P}(X)$ ha 2^3 elementi

In generale se X ha n elementi

$\Rightarrow \mathcal{P}(X)$ ha 2^n elementi

<u>Proprietà operazioni su insiemi</u>

$A \cap B = B \cap A \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap A \cup C$

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \qquad (A^c)^c = A$

Numeri

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ numeri naturali

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ numeri interi (relativi)

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} ,\ n, m \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \right\}$ numeri razionali

forma decimale

- sviluppo finito $p, \alpha_1 \dots \alpha_n$ — $\frac{3}{4} = 0,75$
- " infinito periodico $p, \alpha_1\alpha_2\alpha_1\alpha_2 \dots$ — $\frac{1}{3} = 0,3$

$\mathbb{R}$ ogni sviluppo decimale

$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$

Prodotto cartesiano A, B insiemi

$a \in A, \quad b \in B \qquad (a, b)$ **coppia ordinata**

$\neq (b, a)$

$$A \times B := \{ (a,b) : a \in A, b \in B \}$$

es. $A = \{0, 1\} \qquad B = \{2, 3\}$

$$A \times B = \{ (0,2), (0,3), (1,2), (1,3) \}$$

$$B \times A = \{ (2,0), (2,1), (3,0), (3,1) \}$$

$(a, b) \qquad \{a, b\} = \{b, a\} \qquad$ non confondere!

$A \times A = A^2$ (si prende $B = A$)

$A = \{0, 1\}$

$A^2 = \{(0,0), (0,1), (1,1), (1,0)\}$

$\mathbb{N}^2$ $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$

n-uple

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots x_n),\ x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots n\}$

$n=2$ coppie $n=3$ terne ...

Negazioni di proposizioni e dimostrazioni

$\forall x \in A \quad p(x) \Rightarrow q(x)$

$p(x)$ e $q(x)$ sono proprietà verificate da x.

è equivalente a dire

$\forall x \in A \quad \text{non } q(x) \Rightarrow \text{non } p(x)$

es. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \boxed{\underbrace{n \text{ dispari}}_{p(x)} \Rightarrow \underbrace{n^2 \text{ è dispari}}_{q(x)}}$

Dim. $n = 2K+1$ è un qualsiasi numero dispari

$n^2 = (2K+1)^2 = \underbrace{4K^2 + 4K}_{\text{pari}} + 1$ è dispari.

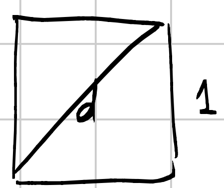
Conseguenza

n^2 è pari $\Rightarrow$ n è pari

$\text{non } q(x) \Rightarrow \text{non } p(x)$.

Dimostrazione per assurdo.

Teo. $\nexists\ r \in \mathbb{Q}$ t.c. $r^2 = 2$



$d^2 = 2$

$d \notin \mathbb{Q}$

Dim Supp. per assurdo $\exists\ r \in \mathbb{Q}$

$r^2 = 2$

$r = \frac{n}{m}$, $n, m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$

prendo n e m primi fra loro (frazione già semplificata)

$r^2 = \left(\frac{n}{m}\right)^2 = 2$ $\quad \boxed{n^2 = 2m^2}$;

$\Rightarrow n^2$ è pari $\xRightarrow{\text{prop. precedente}}$ n è pari

$n = 2 \cdot k$, $k \in \mathbb{Z}$

$(2k)^2 = 2m^2 \quad 2\cancel{4}k^2 = \cancel{2}m^2$

$m^2 = 2k^2$ $\quad$ m^2 è pari $\Rightarrow$ m è pari

$r = \frac{n}{m}$ $\quad$ n pari, m pari $\Rightarrow$ assurdo perché avevo preso n e m primi fra loro!

$\forall x$ vale $p(x)$

negazione

$\exists x$ t.c. non vale $p(x)$